

CÀLCUL  
INFINITESIMAL

Carles Perelló



---

Publicacions de la SCM  
Volum 9



# CÀLCUL INFINITESIMAL

Carles Perelló

**Societat Catalana de Matemàtiques**  
Filial de l'Institut d'Estudis Catalans

Barcelona, 2023

Aquest llibre va ser publicat l'any 1994 per Enciclopèdia Catalana.  
Aquesta edició digital és la reproducció fidel de l'edició original.

L'edició d'aquesta obra  
ha estat a cura de Pere Pascual

© Carles Perelló  
© Societat Catalana de Matemàtiques, filial de l'Institut d'Estudis Catalans,  
per a aquesta edició  
Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició (Enciclopèdia Catalana): setembre de 1994  
Primera edició (IEC): desembre de 2023

ISBN: 978-84-9965-707-3

DOI: 10.2436/10.2002.04.1



Aquesta obra és d'ús lliure, però està sotmesa a les condicions de la llicència pública de *Creative Commons*. Es pot reproduir, distribuir i comunicar l'obra sempre que se'n reconegui l'autoria i l'entitat que la publica i no se'n faci un ús comercial ni cap obra derivada. Es pot trobar una còpia completa dels termes d'aquesta llicència a l'adreça:  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/deed.ca>.

A Marcel Santaló,  
que me'n va obrir la porta,  
i a Francesc Tomàs,  
que me'n va mostrar el camí.



# Sumari

<b>Prefaci</b>	<b>17</b>
<b>1 Introducció</b>	<b>19</b>
1.1 El rept de del continu . . . . .	19
1.2 La gènesi del càlcul infinitesimal . . . . .	21
1.3 Utilització i teorització del càlcul infinitesimal . . . . .	24
1.4 La fonamentació del càlcul . . . . .	26
1.5 Terminologia i notació . . . . .	28
1.6 Nocions prèvies . . . . .	30
<b>2 Els números</b>	<b>35</b>
2.1 Introducció . . . . .	35
2.2 Els números naturals . . . . .	36
2.3 Successions . . . . .	37
2.4 Els números enters . . . . .	38
2.5 Els números racionals . . . . .	39
2.6 Els números irracionals . . . . .	40
2.7 Els números reals . . . . .	40
2.8 Completesa dels reals . . . . .	43
2.9 Els reals no es poden comptar . . . . .	45
2.10 Els reals com a punts d'una recta . . . . .	46
2.11 Compacitat d'un interval tancat . . . . .	48
2.12 Exemples . . . . .	48
Exercicis i problemes . . . . .	54
Apèndixs . . . . .	56
<b>3 Funcions, derivades i integrals</b>	<b>65</b>
3.1 Introducció històrica . . . . .	65
3.2 Funcions . . . . .	67
3.3 Introducció a la derivada . . . . .	69
3.4 Límit d'una funció . . . . .	70
3.5 La derivada en un punt . . . . .	71
3.6 La funció derivada . . . . .	73
3.7 Funcions contínues . . . . .	73

3.8	Derivabilitat i continuïtat . . . . .	74
3.9	Derivades de sumes, productes i quocients de funcions . . . . .	75
3.10	Composició de funcions i regla de la cadena . . . . .	77
3.11	La funció inversa i la seva derivada . . . . .	77
3.12	Derivades de potències fraccionàries . . . . .	79
3.13	Introducció a la integral . . . . .	79
3.14	Acotament i continuïtat uniforme . . . . .	80
3.15	Integral d'una funció contínua en un interval tancat . . . . .	81
3.16	Teorema fonamental del càlcul . . . . .	83
3.17	Propietat del valor mitjà per a la integral . . . . .	85
3.18	Teorema fonamental del càlcul i regla de la cadena . . . . .	86
	Exercicis i problemes . . . . .	87
	Apèndixs . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Les funcions elementals</b>	<b>99</b>
4.1	Introducció històrica . . . . .	99
4.2	Les funcions circulars . . . . .	101
4.3	El logaritme natural . . . . .	105
4.4	La funció exponencial . . . . .	106
4.5	Integració en termes de funcions elementals . . . . .	108
4.6	Substitució de variables a la integral . . . . .	109
4.7	Integració per parts . . . . .	111
4.8	Integració de funcions racionals . . . . .	112
4.9	Integrals en termes de funcions elementals . . . . .	113
4.10	Primitives no expressables en termes de funcions elementals . . . . .	113
	Exercicis i problemes . . . . .	116
	Apèndixs . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Tècniques de càlcul</b>	<b>129</b>
5.1	Introducció . . . . .	129
5.2	Convergència de successions . . . . .	130
5.3	Límits superior i inferior d'una successió . . . . .	130
5.4	Exemples i límits de successions . . . . .	131
5.5	La constant d'Euler . . . . .	133
5.6	Suma de sèries . . . . .	134
5.7	Sèries alternants . . . . .	135
5.8	Sèries absolutament convergents . . . . .	136
5.9	Criteris de convergència de sèries . . . . .	136
5.10	Criteri de convergència del quocient . . . . .	137
5.11	Criteri de convergència de l'arrel . . . . .	138
5.12	Criteri de convergència mitjançant la integral . . . . .	139
5.13	Càlcul de límits de funcions . . . . .	140
5.14	La regla de l'Hôpital . . . . .	142
5.15	Ordre de creixement de les funcions . . . . .	143
5.16	Regularitat de funcions . . . . .	144



5.17	Màxims, mínims i punts d'inflexió . . . . .	145
5.18	Gràfiques de funcions . . . . .	146
5.19	Límits superior i inferior d'una funció . . . . .	147
5.20	Integrals impròpies . . . . .	148
5.21	Integrals de funcions no acotades . . . . .	149
5.22	Les desigualtats de Cauchy-Schwartz . . . . .	151
	Exercicis i problemes . . . . .	152
	Apèndixs . . . . .	156
<b>6</b>	<b>Convergència de successions i sèries de funcions</b>	<b>169</b>
6.1	Introducció . . . . .	169
6.2	Fórmula de Taylor . . . . .	170
6.3	Sèries de potències . . . . .	172
6.4	Sèries de Taylor . . . . .	173
6.5	Funcions analítiques . . . . .	174
6.6	Convergència uniforme . . . . .	176
6.7	Convergència uniforme de funcions contínues . . . . .	179
6.8	Convergència uniforme i integració . . . . .	179
6.9	Convergència uniforme de funcions derivables . . . . .	181
6.10	La prova $M$ de Weierstrass . . . . .	182
6.11	Funcions definides per sèries de potències . . . . .	183
6.12	Continuació analítica . . . . .	186
6.13	El teorema de Weierstrass d'aproximació amb polinomis . . . . .	186
6.14	Sèries de Fourier . . . . .	188
6.15	Exemples de sèries de Fourier . . . . .	190
6.16	Sèries de Fourier amb període diferent de $2\pi$ . . . . .	191
6.17	La integral de Dirichlet . . . . .	192
6.18	Convergència puntual de la sèrie de Fourier . . . . .	193
6.19	Convergència de la sèrie de Fourier als punts de discontinuïtat . . . . .	195
	Exercicis i problemes . . . . .	196
	Apèndixs . . . . .	198
<b>7</b>	<b>Interpolació, aproximació i avaluació numèrica</b>	<b>215</b>
7.1	Introducció . . . . .	215
7.2	Interpolació de funcions . . . . .	217
7.3	Interpolació polinomial . . . . .	217
7.4	L'error a la interpolació polinomial . . . . .	219
7.5	Fórmules d'interpolació de Newton i Lagrange . . . . .	220
7.6	Interpolació de Txebixev . . . . .	222
7.7	Interpolació polinomial a la pràctica . . . . .	224
7.8	Interpolació amb "splines" . . . . .	226
7.9	Combinacions lineals de vectors i de funcions . . . . .	228
7.10	Aproximació de mínims quadrats. Cas discret . . . . .	229
7.11	Aproximació de mínims quadrats. Cas continu . . . . .	232
7.12	Aproximació de mínims quadrats amb polinomis trigonomètrics . . . . .	233

7.13	Aproximació uniforme. Economitziació de sèries de potències	233
7.14	Integració numèrica. Regles del rectangle i del trapezi	234
7.15	Integració numèrica. Fórmula de Newton-Cotes	236
7.16	Els polinomis ortogonals en un interval i els seus zeros	238
7.17	Integració numèrica. El mètode de Gauss	241
7.18	Altres mètodes de quadratura de Gauss	243
7.19	El mètode d'integració numèrica de Romberg	243
7.20	Exemple comparatiu d'integració numèrica	246
7.21	Avaluació numèrica d'integrals impròpies	248
7.22	Càlcul numèric de zeros de funcions	249
7.23	Avaluació del punt fix d'una funció	253
	Exercicis i problemes	255
	Apèndixs	259
<b>8</b>	<b>Funcions de múltiples variables</b>	<b>265</b>
8.1	Introducció	265
8.2	L'espai $\mathbb{R}^n$	266
8.3	Successions a $\mathbb{R}^n$ . Completesa i compacitat	268
8.4	Les funcions entre espais euclidians	269
8.5	Continuïtat i límits	271
8.6	Les aplicacions lineals	273
8.7	La derivada o diferencial	276
8.8	Les derivades parcials	278
8.9	Diferenciabilitat	281
8.10	La regla de la cadena	282
8.11	Teorema de la funció inversa	283
8.12	Canvis de variables	285
8.13	El teorema de funció implícita	286
8.14	Derivades parcials d'ordre superior	288
8.15	El teorema de Taylor	290
8.16	Màxims, mínims i altres punts crítics	292
8.17	Extremes condicionats. Multiplicadors de Lagrange	294
8.18	Derivada de la integral respecte a un paràmetre	295
8.19	Corbes i la seva longitud	297
	Exercicis i problemes	300
	Apèndixs	302
<b>9</b>	<b>Les equacions diferencials de primer ordre</b>	<b>311</b>
9.1	Introducció	311
9.2	L'equació diferencial de primer ordre autònoma	313
9.3	Exemples: creixement i decreixement exponencial	314
9.4	Exemple: l'equació logística	315
9.5	Exemple: buidatge d'un dipòsit cilíndric en temps finit	316
9.6	Comportament de solucions properes a solucions constants	317
9.7	Comportament de solucions tendint a infinit	318

9.8	Propietats del conjunt de solucions . . . . .	319
9.9	L'equació de primer ordre de variables separables . . . . .	320
9.10	Equació lineal de primer ordre . . . . .	322
9.11	Unicitat de les solucions de l'equació lineal . . . . .	323
9.12	Existència de solucions d'equacions de primer ordre . . . . .	324
9.13	Unicitat de la solució . . . . .	328
9.14	El mètode d'Euler per aproximar la solució . . . . .	329
9.15	Mètodes numèrics per a aproximar solucions . . . . .	332
	Exercicis i problemes . . . . .	337
	Apèndixs . . . . .	339
<b>10</b>	<b>Les equacions diferencials d'ordre dos i més gran</b>	<b>349</b>
10.1	Introducció . . . . .	349
10.2	Equacions de segon ordre lineals amb coeficients constants i homogènies . . . . .	350
10.3	Reducció d'una equació de segon ordre . . . . .	352
10.4	Exemples de sistemes de dues equacions lineals . . . . .	354
10.5	Anàlisi dels sistemes de dues equacions lineals . . . . .	356
10.6	Solucions com a exponencials de matrius . . . . .	362
10.7	Exemple: Dipòsits comunicats . . . . .	363
10.8	L'equació no homogènia. Fórmula de variació de paràmetres . . . . .	366
10.9	Les equacions lineals de coeficients no constants . . . . .	372
10.10	Equacions no lineals de segon ordre integrables . . . . .	374
10.11	El sistema de Lotka-Volterra . . . . .	379
10.12	Un sistema no integrable: presa-depredador . . . . .	380
10.13	El cas general. Existència i unicitat. Mètodes numèrics . . . . .	387
	Exercicis i problemes . . . . .	389
	Apèndixs . . . . .	394
<b>11</b>	<b>Integració de funcions de múltiples variables</b>	<b>421</b>
11.1	Introducció . . . . .	421
11.2	La integral d'una funció contínua sobre un rectangle . . . . .	422
11.3	La integral sobre un rectangle com a integrals iterades . . . . .	423
11.4	La integral d'una funció contínua sobre un domini del pla . . . . .	424
11.5	La integral sobre un domini $D$ del pla com a integrals iterades . . . . .	429
11.6	Integració a $\mathbb{R}^3$ i a $\mathbb{R}^n$ . . . . .	432
11.7	Canvi de variable a la integració . . . . .	436
11.8	Integrals sobre corbes i teorema de Green . . . . .	439
11.9	Integrals sobre superfícies i els teoremes de Gauss i de Stokes . . . . .	442
	Exercicis i problemes . . . . .	448
	Apèndixs . . . . .	451
	<b>Bibliografia</b>	<b>457</b>
	<b>Índex</b>	<b>459</b>



# Prefaci

Aquest llibre ha estat escrit inspirat per una conversa que fa molts anys vaig tenir amb Alfred Molina, tot pujant la Pica d'Estats, en la qual constàvem la manca de llibres de matemàtiques en la nostra llengua. Ara potser la situació ja no és tan depauperada i algunes obres han anat apareixent, empeses per una societat que es va desvetllant.

L'escriptura del llibre ha pres temps. Des de la seva concepció fins al seu acabament han passat prop de quatre anys. I el resultat ha estat un retorn al classicisme. No ens hem deixat endur pels corrents de pretensió formalista que han arrossegat l'escriptura de les matemàtiques després de la segona guerra. D'alguna manera hem cregut més a continuar escrivint, tot salvant les distàncies, com es feia al començament del segle.

Es tracta d'un llibre més de càlcul infinitesimal, nom que avui s'ha assimilat al d'"anàlisi matemàtica", però que m'agrada distingir: l'anàlisi ha de filar molt més prim que el que fem. Està dedicat a qui està estudiant o ja ha estudiat la matèria. No pretén ser un *manual*, en el sentit que s'ha de seguir pas a pas el fil del llibre, però sí que és un *text*, en el sentit que l'expressió és discursiva i els coneixements estan organitzats. La matèria s'estudia als primers cursos de la universitat. Si es vol seguir el llibre per a fer-los s'ha de comptar amb 4 semestres per a veure'l complet: el primer per al material fins al capítol 7, deixant de banda apèndixs i molt dels capítols 5, 6 i 7 (a criteri del professor), el segon per als capítols 8 i 11 i per al romanent dels capítols 6 i 7, el tercer per als capítols d'equacions diferencials, 9 i 10, i el darrer per a un repàs i enfilada, via apèndixs, de tot el material.

Potser el més important en què aquest llibre es distingeix d'altres que han anat proliferant, és que no s'acaba on solen acabar-se, ni comença on d'altres ho fan. Utilitzem els mètodes del càlcul per a tractar equacions diferencials, i posem tota la base metodològica del càlcul abans de parlar d'aquestes darreres i dels mètodes numèrics. És a dir, és un llibre que pretén abraçar una mica més.

I ara els agraïments. A n'Àngel Calsina, que a més d'ésser el meu company de feina, ha tingut la bona disposició de llegir tot el material i fer-hi innombrables correccions i, en general, millores. A Rosa Rodríguez, també companya de feina, que durant vacances i caps de setmana, ha buidat el meu manuscrit inintelligible fins a transformar-lo en un llibre. També a en Josep Llosa, de la

casa editorial, i a na Marianna Bosch, per haver fet revisions, suggeriments i correccions. Al meu fill Carles que m'ha donat els mitjans materials i el "know how" per a fer els dibuixos amb ordinador (com canvien els temps!). I finalment, però no la darrera en importància, a na Cristina Fabregat, que verament ha fet possible el llibre amb el seu suport.

Universitat Autònoma de Barcelona  
Bellaterra, abril del 1994

Carles Perelló

# Capítol 1

## Introducció

### 1.1 El repte del continu

D'una manera intuïtiva anomenem continu allò que consta de punts que no deixen buits entre ells. Per exemple un tros de recta o de corba, una figura plana, la idealització geomètrica d'un cos sòlid o d'un fluid, etc.

El continu forma una part important de l'experiència, almenys de manera idealitzada, i per tant ha estat objecte d'inquietud des del moment que l'home ha intentat entendre el món. Un problema del continu rau en la dificultat de la seva definició precisa i del seu tractament mitjançant mètodes matemàtics. D'altra banda, de la capacitat de fer-ho depèn la resolució de molts problemes teòrics i pràctics, a més de la satisfacció que produeix trobar una racionalitat al món que ens envolta.

Per tal d'entendre el continu s'han anat desenvolupant conceptes i altres eines al llarg de tota la història, i aquest desenvolupament ha anat lligat als progressos científics i tècnics, que n'eren per una banda els motivadors i per l'altra els que els aprofitaven. La matemàtica ha tingut el paper central d'aquesta modelització racional mitjançant els mètodes del càlcul infinitesimal.

Des de l'antiguitat clàssica s'han fet esforços per a descriure el continu i per a desenvolupar les eines per a resoldre els problemes que presenta, com poden ser el càlcul de longituds, àrees i volums, els càlculs relacionats amb el moviment, i d'altres més lligats a la física i d'altres ciències.

Relacionat amb el problema de mesurar la longitud d'una recta, ja a l'escola pitagòrica, fa uns vint-i-cinc segles, es van trobar amb la dificultat de no poder expressar la raó entre la diagonal del quadrat i el seu costat com a raó entre dos números naturals. Això va posar de manifest que no es podien fer servir els números naturals i les seves raons, és a dir, les fraccions, per a mesurar intervals i altres magnituds en termes d'una unitat donada, i va decantar la matemàtica grega cap a la geometria, allunyant-la de la utilització dels números per a expressar magnituds incommensurables, i, amb això, d'una descripció del continu on s'utilitzessin els números irracionals. Tot i això, la seva inquietud

filosòfica no els va deixar al marge de la problemàtica del continu, i així *Zenó d'Elea* presenta paradoxes que posen dificultats al fet que Aquil·les guanyi una cursa a la tortuga o que una sageta arribi a la seva fita. Aquestes paradoxes són analitzades per *Aristòtil*, el qual descarta la idea que el continu estigui format d'indivisibles, és a dir de parts, que serien punts, que no poden partir-se en trossos més petits. En la seva manera de veure les coses, els intervals es poden anar partint en trossos més i més petits, sense arribar mai als punts (o als instants, si es tracta d'interval de temps). No accepta que acumulant només punts es pugui fer una recta: dos punts que es "toquen" constitueixen un sol punt.

En contraposició, *Arquimedes* acceptava d'una manera intuïtiva les figures com formades per seccions sense gruix. De fet al seu *Mètode* utilitza arguments basats en aquesta idea per a deduir-ne àrees i volums, encara que manifesta que aquesta utilització és poc rigorosa, i quan vol demostrar que les fórmules obtingudes d'aquesta manera són correctes, fa servir el mètode d'exhaustió, del qual parlarem a la següent secció.

Aquesta consideració de les figures formades per seccions sense gruix va ser represa molt després, al segle XVII, i fou utilitzada també per a calcular àrees i volums. Això sí, sense els miraments d'Arquimedes, s'acceptaven els valors obtinguts sense necessitat d'una justificació més rigorosa. Als seus *Discorsi* sobre dues noves ciències, *Galileu* dedica esforços a justificar la utilització d'aquests *indivisibles*, com van ser anomenades aquestes seccions sense gruix (els punts d'una recta es poden considerar com a seccions sense gruix, és clar). Utilitzant aquesta visió de les figures formades per indivisibles, tenim *Kepler*, *Cavalieri*, *Roberval* i *Torricelli*, entre d'altres.

Aquesta manera de veure les coses, que per altra banda no va fer progressar gaire la matemàtica, va ser bandejada per les tècniques del càlcul infinitesimal que apareguren al final d'aquest segle XVII, exposades principalment per *Newton* i *Leibniz*. En aquest càlcul s'admeten processos infinits, com són les successions i sumes infinites de números, a les quals s'associa el seu *límit*. De pas, amb això es dóna carta de naturalitat als números irracionals, que vénen a ser resultat d'aquestes fórmules amb un nombre infinit d'operacions.

No vol dir que tot quedi clar: tant el concepte de límit com el de número irracional hauran d'esperar fins a mitjan segle XIX, amb *Bolzano*, *Weierstrass*, *Cantor* i *Dedekind*, per a ser rigoritzats. Sense necessitat d'esperar aquesta rigorització, amb els mètodes del càlcul infinitesimal s'obre des del final del segle XVII tot un seguit de possibilitats de resoldre problemes del continu, precisament en un món que en aquells moments està evolucionant científicament i tècnicament, i on troba un camp de cultiu extraordinari, que avui encara està en explotació.

Podem dir que el càlcul infinitesimal representa un dels aconseguiments més importants de la matemàtica, i els progressos tècnics dels darrers tres segles estan fermament recolzats en la seva utilització, principalment en la física i en l'enginyeria.



## 1.2 La gènesi del càlcul infinitesimal

Dèiem a la secció anterior que el càlcul infinitesimal es caracteritza per la utilització de processos infinits. D'aquesta manera es generalitzen les operacions algebraïques per a donar cabuda a un nombre infinit d'operacions. El resultat d'aquestes operacions, encara que existeix, no s'assoleix en general més que com a límit, és a dir, ens hi podem acostar tant com vulguem, però sense arribar-hi.

Ja els antics mesopotamis feien aproximacions numèriques de números irracionals, i d'alguna manera es podria veure aquí el naixement de la utilització de processos infinits. Potser un antecedent més directe del càlcul infinitesimal es troba en el *mètode d'exhaustió d'Èndox*, que va ser utilitzat per *Arquimedes* per a validar les seves fórmules per a àrees, volums i centres de gravetat de figures planes i de cossos. El mètode consisteix a aproximar la figura o el cos de què es tracta, amb una successió d'altres d'àrea o volum coneguts, fins que l'aproximació és prou bona per a entrar en contradicció amb la negació de la validesa de la fórmula que es posava a prova. Arquimedes utilitza aquests resultats, junt amb les seves lleis sobre les forces que experimenta un cos immers i sobre les de la palanca, per a estudiar l'estabilitat de cossos en flotació. Això mostra almenys una possible motivació basada en l'aplicació per als càlculs que feia, a banda, probablement, del desig de recerca de la racionalitat del món que menava tots els pensadors grecs.

No és fins molt més tard, a l'Europa medieval, que es torna a despertar l'interès per la descripció matemàtica dels processos continus. Possiblement aquest interès és despertat pel descobriment de les armes de foc, en particular dels canons, i la conveniència d'entendre la balística. Al segle XIV, tant al *Merton College*, d'Oxford, com amb *Oresme* a París, es consideren gràfiques indicant la velocitat en funció del temps, en particular pel moviment uniformement accelerat, i es constata que es cobreix el mateix espai amb el mateix temps amb un moviment uniforme a la velocitat mitjana. *Galileu* utilitza aquestes mateixes gràfiques als seus *Discorsi*, on fa una descripció detallada del moviment uniformement accelerat.

Una de les raons que obstaculitzen en aquest moment el desenvolupament del càlcul és la manca d'una relació entre la geometria, que ens descriu el continu d'una manera gràfica, i l'àlgebra, que hauria de proporcionar la manera de descriure la geometria mitjançant fórmules amb números.

Podem dir que l'àlgebra, en el sentit de resolució d'equacions, ja és coneguda pels mesopotamis i grecs, els mesopotamis amb exemples de resolució d'equacions de segon grau d'una manera numèrica, i els grecs amb l'àlgebra geomètrica de l'aplicació d'àrees. S'ha d'esmentar aquí *Diofant*, que cap al segle IV introduí certa notació algebraica, tot i que la seva problemàtica era, però, la resolució d'equacions amb números racionals. Els mètodes de resolució d'equacions no són tractats en general, però, fins al segle IX a Bagdad per *Al-Khowarizmi*, i perfeccionats en les següents generacions de matemàtics àrabs, d'entre els quals destaca *Omar-Khayam*, que ja tracta geomètricament equacions de tercer grau,

sense donar-ne la fórmula de resolució amb operacions algebraiques.

Aquests coneixements dels àrabs arriben a Europa i des del final del segle XV fins al principi del XVII experimenten un desenvolupament important en mans de matemàtics com *Chuquet*, *Tartaglia*, *Cardano*, *Bombelli*, *Vieta* i *Descartes*. De fet es passa de no tenir notació apropiada (s'havia perdut fins i tot la notació que *Diofant* havia fet servir feia 1300 anys), a la notació que tenim avui.

El mèrit de *René Descartes* és el de la culminació d'associar equacions algebraiques a les corbes. D'aquesta manera crea la *geometria analítica*, on ja no ens hem de basar en una figura feta amb regla i compàs o qualsevol altra recepta geomètrica, sinó que podem expressar les corbes mitjançant una relació entre números variables, és a dir, mitjançant una equació. Certament, aquesta associació de relacions entre magnituds de segments i la forma de les corbes no era nova: *Apol·loni* i *Pappos* a l'antiguitat alexandrina ja les havien fet notar, però va ser gràcies a la nova notació algebraica que va poder fer-se servir com a mètode.

És amb aquesta eina, doncs, que *Pierre Fermat* cap al 1636 dóna els primers exemples del que es pot considerar ja el càlcul infinitesimal. Per a calcular l'àrea sota una corba d'equació  $y = x^m$  (on  $m$  és qualsevol número racional més gran que  $-1$ ), definida en un interval que vagi de 0 a  $a$ , diguem, divideix aquest interval en trossos de longitud en progressió geomètrica, i calcula la suma de les àrees dels rectangles que tenen aquests trossos per base i altura donada pel valor de  $x^m$  calculat en un extrem de la base, que també formen una progressió geomètrica. Fent tendir a 1 la raó de la progressió geomètrica es força els trossos a fer-se més i més petits, i els rectangles a aproximar més i més la regió sota la corba, i el límit de la fórmula per a la suma li dóna l'àrea sota la corba, és a dir la integral, tal com l'entendem avui.

Per a calcular la tangent a una paràbola, troba els paràmetres de la recta que passa pel punt de la gràfica on volem trobar la tangent i per un altre punt de la gràfica proper a l'anterior. Després iguala (*adequa*, diu Fermat) l'ordenada de la gràfica al segon punt amb la de la tangent que cerquem a la mateixa abscissa. Simplificant, dividint per la diferència  $e$  de les abscisses dels dos punts, i fent després  $e$  igual a 0, obté els paràmetres de la tangent. Observem que aquest és precisament el procediment que seguim quan volem calcular la derivada d'una funció: donem un increment  $e$  a la variable independent, calculem l'increment de la funció, el dividim per  $e$  i després fem tendir  $e$  a 0, que en el cas de Fermat es redueix a fer  $e$  igual a 0.

Per a trobar el màxim d'una funció utilitza la mateixa idea: iguala el canvi de la funció de la qual vol trobar el màxim a 0 quan es dóna un increment  $e$  a la variable independent. Dividint per  $e$  i després fent  $e$  igual a 0 obté el punt en què la funció ateny el seu màxim. Els mètodes de Fermat, però, no tingueren gaire ressò al seu temps.

*Christiaan Huygens* es preocupa per una gran quantitat de problemes físics. Entre d'altres coses és l'inventor del rellotge de pèndol i també del de molles. S'adona que el pèndol simple no té la mateixa freqüència en canviar d'amplitud

el seu batec. Seguint mètodes dignes d'Arquimedes demostra que un pèndol que bati isocrònicament amb qualsevol amplitud s'ha de moure seguint una cicloide. També demostra que per aconseguir que un pèndol es mogui d'aquesta manera, s'han de posar unes guies limitadores cicloïdals. Matemàticament això representa calcular l'evoluta de la cicloide, és a dir, el lloc dels seus centres de curvatura, la qual cosa requereix, essencialment, el càlcul de derivades de segon ordre. Això, i molt més, ho fa Huygens amb mètodes geomètrics, sense la metodologia del càlcul que serà introduïda poc després per Newton i Leibniz, però certament els seus resultats corresponen al reialme del càlcul infinitesimal, i potser són els primers resultats que podríem qualificar de no trivials, fins i tot una vegada establerta la metodologia.

Durant tot el segle hi ha un seguit de contribucions, més o menys esporàdiques, al que esdevindria el càlcul infinitesimal. Així, *Gregori de Sant Vicent* suma la sèrie geomètrica infinita i explica la paradoxa d'Aquilles i la tortuga, i el seu deixeble *Alfons Antoni de Sarasa* mostra que l'àrea sota la hipèrbola defineix els logaritmes naturals. També *Gilles Personne de Roberval* troba l'àrea sota la cicloide i *Blaise Pascal* integra la funció senoïdal, tots dos fent servir la concepció de les figures planes com constituïdes per segments de recta (indivisibles). Els raonaments i les figures que fa Pascal per aconseguir-ho inspiraran Leibniz uns quants anys més tard per a la seva definició de derivada.

Cal destacar en aquesta època les aportacions de *John Wallis* que utilitza mètodes d'inducció i d'interpolació per a trobar l'àrea del cercle i expressar  $\pi$  com a producte infinit. Per la seva banda, *James Gregory* contribueix amb el teorema del binomi, l'expressió de l'arc tangent i del logaritme com a sèries infinites, i la problemàtica d'expressar la longitud d'arcs d'el·lipse i d'hipèrbola fent servir les funcions conegudes. Per a Gregory una funció es podia definir mitjançant "operacions algebraïques o qualsevol operació imaginable", que volia dir que acceptava operacions en nombre infinit i el pas al límit.

El naixement del càlcul infinitesimal es produeix al final del segle XVII amb *Isaac Newton* i *Gottfried Leibniz*. Tots dos ho aborden més o menys independentment i amb dues motivacions força diferents. Per a Newton el càlcul serà una eina per a descriure el moviment dels planetes, a més de permetre-li resoldre una sèrie de problemes tant pràctics com acadèmics. Leibniz, en canvi, està interessat en l'essència mateixa de la matemàtica i del pensament, i cerca l'estructura de les relacions entre funcions, la qual cosa no li nega habilitat per a resoldre tota mena de problemes.

Pensem que Newton, una mica com Arquimedes, no solament fa la teoria física que necessita, en aquest cas la mecànica de partícules i la llei de gravitació universal, sinó que posa a punt l'eina matemàtica per a expressar-ne les lleis i resoldre els problemes. I no ho fa perquè veu caure una poma d'un arbre, sinó perquè vol saber com es mouen els planetes, i no només com a curiositat, ni per raons astrològiques, sinó per fer bones efemèrides per als navegants.

Potser el factor que fa més útil el càlcul, a més de la introducció dels processos infinits i el seu límit, és la relació inversa que hi ha entre la derivada i la integral, l'anomenada *regla de Barrow* (Barrow va ser un professor de Newton)

o *teorema fonamental del càlcul*, que permet portar a terme els càlculs sense necessitat de cercar límits cada vegada.

El càlcul infinitesimal de Newton, inspirat en el moviment, té la seva base en el concepte de derivada (*fluxió*, que diu Newton), el límit del quocient entre l'increment de la funció (fluent) i l'increment de la variable independent. No el valor d'aquest quocient abans que l'increment de la variable independent es faci zero, ni quan ja s'ha fet zero, sinó en el moment de fer-se zero, diu Newton. En el càlcul de Newton té un paper fonamental la seva fórmula del binomi, i en general la seva concepció de les funcions com a sèries de potències, que li permet fer les derivacions i integracions terme a terme (sense preocupar-se gaire de la convergència, però). Amb el seu càlcul, Newton és capaç de calcular les òrbites d'un planeta sota un camp de forces central, resolent equacions diferencials i d'aquesta manera mostra que les lleis que Kepler havia obtingut empíricament són deduïbles de la seva teoria.

En canvi el càlcul infinitesimal de Leibniz es basa en el concepte de diferencial, que ve a ser la linearització de l'increment. Leibniz dóna una part més central a la integració, avaluant, això sí, les integrals per antiderivació. S'estima més utilitzar fórmules i les funcions elementals. La seva notació resulta molt més reeixida que la de Newton i és la que fem generalment, almenys en aquest llibre.

Al voltant d'aquestes dues figures, d'altres matemàtics van obtenint nous resultats i organitzant el cos del càlcul infinitesimal. D'entre ells esmentem *Maclaurin*, *L'Hôpital*, *Taylor*, i els germans *Johann* i *Jakob Bernoulli*.

## 1.3 Utilització i teorització del càlcul infinitesimal

Una vegada establerta la metodologia bàsica del càlcul infinitesimal, consistent en la utilització de les derivades i integrals de funcions i de les sèries infinites, entre d'altres instruments, es produeix un desenvolupament seguint dues variants: per una banda es fa servir el càlcul per a resoldre problemes més o menys pràctics, i per l'altra es van estructurant aquests mètodes dins d'una teoria cada vegada més rigorosa.

*Newton* utilitza els seus mètodes per a calcular les òrbites de planetes i cometes, a més de resoldre amb més o menys encert problemes com el de la forma que ha de tenir un projectil perquè l'aire li ofereixi la mínima resistència. Els germans *Bernoulli* esmentats a la secció anterior es proposen i resolen el problema de la *braquistòcrona*, que consisteix a minimitzar el temps que triga una partícula que llisca sobre una rampa sota l'efecte de la gravetat per anar d'un punt a un altre a diferent nivell, donant a la rampa la forma apropiada. També estudien la forma que tindria una barra elàstica sotmesa a flexions i la forma d'una cadena penjant pels seus extrems (la *catenària*).

Al mateix temps d'altres matemàtics s'ocupen d'anar donant cos a la teoria del càlcul i a desenvolupar nous mètodes i conceptes per a fer-lo més aplicable

i intel·ligible. Així tenim *Guillaume F.A. L'Hôpital* escrivint el primer text de càlcul infinitesimal, i *Colin Maclaurin* i *Brook Taylor*, trobant desenvolupaments per a l'aproximació de funcions i *Alexis-Claude Clairaut* i *Jean Le Rond d'Alembert* contribuint tant a l'aplicació del càlcul com a la seva estructuració.

No es poden menysprear els problemes de càlcul numèric. No n'hi ha prou amb plantejar, per a un problema determinat, les relacions entre les funcions i les seves derivades, sinó que també s'han de trobar les solucions de les equacions diferencials resultants. Aquesta solució de vegades es pot donar en termes de funcions conegudes, és a dir, mitjançant una fórmula, però en molts casos aquesta fórmula no hi és. Sigui com sigui les solucions s'han d'avaluar numèricament i per tal de fer-ho amb eficàcia s'han de tenir mètodes escaients. Els matemàtics, incloent-hi *Gregory*, *Newton*, *Maclaurin* i *Taylor* donen una gran importància al càlcul numèric, i utilitzen aproximacions de sèries infinites i mètodes d'interpolació.

La problemàtica del càlcul infinitesimal, tant teòrica com pràctica, es concentra a mitjan segle XVIII en *Leonhard Euler*. En una gran quantitat d'escrits, la més gran en cap matemàtic, tracta tota mena de problemes entre els quals de mecànica celest, de dinàmica de cossos rígids, de dinàmica de fluids, de flexió i vibració de barres elàstiques, etc. El seu grau de concreció arriba al disseny de turbines hidràuliques de reacció. En una direcció més teòrica publica el primer tractat de càlcul de variacions, en el qual es tracta de determinar funcions que optimitzin algun funcional integral. També és autor de tractats sobre càlcul diferencial i integral (que de vegades anomena anàlisi infinitesimal, tal com fan després molts autors) i, entre moltes d'altres coses, introdueix la notació dels números complexos i del càlcul en diverses variables, incloent-hi les equacions en derivades parcials. D'acord amb la manera de fer matemàtiques de la seva època, no el preocupen gaire les qüestions de convergència de les sèries infinites; les utilitza formalment i amb força èxit.

A *Joseph-Louis Lagrange* li correspon el mèrit, gens menyspreable, de deslliurar el càlcul infinitesimal de molts dels seus elements geomètrics, és a dir, dels dibuixos que utilitzen *Newton*, *Leibniz* i *Euler* per a fer les demostracions, i de fer servir només expressions analítiques. Això es fa molt palès en el seu càlcul de variacions, de manera que aconsegueix una teoria més clara i general que la d'*Euler*.

La transició del segle XVIII al XIX es fa amb les contribucions de *Pierre Simon Laplace*, *Joseph Fourier* i *Augustin Louis Cauchy* entre d'altres, que tracten de camps gravitatoris, de la transmissió de la calor i de l'elasticitat, donant-ne ja bases teòriques prou completes. *Cauchy* és l'autor d'un tractat de càlcul infinitesimal ja molt semblant als d'avui, on defineix els conceptes amb més rigor que fins al moment i precisa millor el camp de validesa dels teoremes. Li falta encara una noció de límit que depengui només dels números i precisar els conceptes de continuïtat i de convergència uniformes. És també l'autor de la teoria de les funcions de variable complexa. Cal esmentar aquí que *Fourier*, en considerar la convergència de sumes infinites de polinomis trigonomètrics, enceta una polèmica sobre els conjunts on aquestes sèries convergeixen, que

desembocarà més tard en la teoria de conjunts.

Al llarg del segle XIX les aplicacions del càlcul es multipliquen, sobretot en el camp de la física, on proveeixen els models per al tractament de fluids i sòlids, dels camps gravitatoris, dels camps electromagnètics, etc., donant a més la metodologia per al seu tractament, fins a l'obtenció de resultats pràctics, i incloent-hi els valors numèrics si cal.

Per altra banda el procés de rigorització s'accentua en aparèixer problemes teòrics com els creats per la convergència o no de les sèries de Fourier o per l'aparició de funcions sense derivada enlloc. La rigorització del càlcul infinitesimal vol dir la seva aritmetització, és a dir el fet de basar tots els seus conceptes en els números. En aquest sentit treballen *Bernhard Bolzano* i *Karl Weierstrass*, i és aquest darrer el qui dona la noció de límit tal com la fem servir avui, amb les tan conegudes  $\varepsilon$  i  $\delta$ .

Per a tenir una base teòrica prou satisfactòria, ja no queda sinó aclarir què volen dir els números reals i, en particular, els irracionals. Això és el que fan a la segona meitat del segle XIX *Georg Cantor*, fent servir successions de racionals, i *Richard Dedekind*, fent servir "talls" als racionals ordenats. Amb això els conceptes del càlcul infinitesimal queden definits a partir dels números naturals i la seva aritmètica. Deixem l'estudi de la problemàtica dels números naturals per a la següent secció.

Entrant al segle XX el càlcul o *anàlisi* infinitesimal evoluciona cap a generalitzar els seus conceptes. *Henri Lebesgue* utilitza el concepte de *mesura* per a definir una integral que inclou les definicions donades abans per *Cauchy* i *Riemann*, incloent-les com a casos particulars. Amb aquesta definició es facilita parlar d'espais de funcions, és a dir, d'espais en què cada punt és una funció, la qual cosa genera el que es coneix com a *anàlisi funcional*, que ha demostrat la seva gran importància tant en la teoria com en els problemes, sobretot d'equacions en derivades parcials i similars, que s'originen en estudiar problemes pràctics dels medis continus.

Avui el càlcul infinitesimal i els seus derivats ocupen un lloc de gran importància, tant a la matemàtica teòrica, on serveixen de suport a branques com la geometria diferencial, a la teoria analítica de números, al càlcul de probabilitats, i d'altres, com a la ciència i la tècnica, on és l'eina que permet el disseny i la predicció, a l'enginyeria, la física, la meteorologia, l'economia, etc., i també per a la constant inquietud de l'home per a entendre millor el món, proporcionant models que expliquen, ni que sigui qualitativament, els esdeveniments del nostre entorn, com poden ser l'evolució i la morfogènesi.

## 1.4 La fonamentació del càlcul

A partir de la segona meitat del segle XIX els esforços per a aclarir els conceptes que han aparegut amb l'anàlisi infinitesimal prenen diverses direccions. Per una banda, en la línia de *Ramon Llull*, *Descartes* i *Leibniz*, es tracta d'obtenir un mètode per a la lògica que s'apliqui a tot raonament, de manera

que permeti produir noves idees a partir de les que ja es tenen. En aquesta direcció *Augustus De Morgan* i *George Boole* construeixen la lògica simbòlica, una mena d'àlgebra de la lògica, allunyada de la filosofia i força normal. Més endavant *Gottlob Frege* dona una fonamentació axiomàtica a la lògica i intenta fonamentar en aquesta darrera la matemàtica, que quedaria com una extensió de la lògica mateixa. *Bertrand Russell*, una vegada resoltos alguns problemes deguts a les paradoxes (totes relacionades amb la següent: sigui  $X$  el conjunt format per tots els conjunts que no es contenen a si mateixos com a elements i només per aquests; la pregunta de si  $X$  es conté a si mateix com a element porta a contradicció tant si la resposta és positiva com si és negativa), publica junt amb *Alfred North Whitehead* els *Principia Mathematica*, que és precisament això, un sistema lògic axiomàtic d'on es poden deduir per regles estrictes, a partir d'uns quants axiomes, que no són estrictament propis de la matemàtica, totes les veritats de la matemàtica, o almenys d'una part prou substancial de la matemàtica que contingui l'aritmètica i a partir de la qual se'n derivarà tota l'anàlisi infinitesimal. En aquesta formalització els números naturals apareixen com a classes d'equivalència de conjunts idempotents.

D'altra banda, la teoria de conjunts iniciada per *Cantor* ha anat prenent embranzida i, de la mà d'*Ernst Zermelo*, es constitueix en base axiomàtica de la matemàtica. En aquest sentit *David Hilbert* expressa la seva confiança en el fet que la matemàtica és formalitzable, és a dir, que es pot desenvolupar dins d'un sistema formal. Això vol dir que es poden donar els símbols, les regles que determinen quines són les fórmules (o proposicions) del sistema, les regles que permeten derivar noves fórmules a partir de les conegudes i unes quantes fórmules primeres, o *axiomes*, i d'aquesta manera obtenir totes les fórmules (o proposicions) certes d'una part substancial de la matemàtica, que hauria d'incloure el càlcul infinitesimal per anar bé.

Hem de comentar que, de fet, des que es van tenir definits els números naturals, ja sigui a partir de la teoria de conjunts o d'altres definicions com les de *Giuseppe Peano*, i a partir d'elles els números reals amb la seva completesa, els matemàtics han escrit els seus resultats amb la confiança que es poden deduir formalment dels axiomes bàsics, encara que a la pràctica fer-ho rigorosament és massa feina, i innecessari. Aquesta confiança implícita en la fonamentació a partir de la teoria de conjunts és evident en la immensa majoria dels articles que presenten nous resultats de matemàtics: s'estructuren en un seguit de proposicions que es dedueixen d'altres ja conegudes. Això sí, dirigint-les en una direcció o una altra mitjançant les definicions, que també s'han de fer sobre conceptes ja formalitzats amb anterioritat. Un bon exemple, a un nivell més popular, de la confiança en la fonamentació en la teoria de conjunts el constitueix la introducció dels seus conceptes a l'ensenyament elemental i a la majoria dels llibres de text, començant per l'obra del multiautor *Bourbaki* (conjunt de matemàtics que després de la Segona Guerra Mundial van escriure una sèrie de llibres amb la intenció de rigoritzar la matemàtica contemporània).

El cas és, però, que l'axiomatització de l'aritmètica no ha quedat tancada d'una manera del tot satisfactòria. Al 1931 *Kurt Gödel* va demostrar que els

sistemes formals que contenen l'aritmètica dels nombres naturals patien un problema que sembla insoluble: si el sistema d'axiomes és consistent, és a dir, no porta a demostrar una proposició i la seva negació, llavors hi ha proposicions (fórmules) sobre els naturals que, essent vertaderes, són indemostrables dins del sistema formal. D'això també se segueix que no es pot provar, dins del sistema mateix, la consistència dels seus axiomes. I això val tant per a la fonamentació basada en els *Principia Mathematica* com per a la basada en la teoria de conjunts de *Zermelo-Fraenkel*, que és la que se suposa que fem anar, encara que no gaire explícitament, com ja hem dit. Tot i aquesta relativa incertesa, el paper del formalisme és d'enorme importància i ha estat essencial en el desenvolupament de la matemàtica moderna, en servir de base sobre la qual la intuïció dels matemàtics ha pres suport.

Parlant d'anàlisi infinitesimal, també hem d'esmentar l'*anàlisi no estàndard*, que basant-se en la mateixa definició axiomàtica dels nombres naturals n'accepta d'infinitament grans. En passar als seus inversos obtenim nombres infinitament petits: els *infinitèsims*. La possibilitat d'afegir o treure elements amb certes propietats d'un conjunt sembla una cosa ben poc seriosa, però és que la definició que la teoria de conjunts proporciona dels nombres naturals no fila tan prim per poder dir si els nombres que obtenim en anar afegint una unitat al número 1, és a dir, els nombres "accessibles"  $1, 2, 3, \dots$ , són tots els nombres naturals. L'anàlisi no estàndard treballa amb la hipòtesi que no és així. Se sap, però, que l'anàlisi no estàndard no permet demostrar res que no puguem provar amb l'anàlisi infinitesimal dins del terreny d'aquest darrer.

No tothom ha estat partidari de la teoria de conjunts i del formalisme que se'n deriva. Entre els detractors importants hi ha *Kronecker*, *Klein*, *Poincaré*, *Weyl* i *Brouwer*, aquest darrer encapçalant el corrent conegut com a *intuïcionisme*.

És curiosa la frase de *Hilbert* referint-se a les crítiques al formalisme, que diu que ningú no ens traurà del paradís que *Cantor* ens ha donat.

Per acabar volem fer notar que, per molt pur que el formalisme pretengui ser, no ho pot ser mai del tot. Ja per definir-lo, és a dir per a donar les regles de formació de proposicions i de deducció, hem de fer servir paraules o conceptes del nostre llenguatge natural, après a través de l'experiència, de la nostra interacció vital amb el món. D'una manera no tan directa, hem de fer notar el paper important que té l'experiència en la definició de nous conceptes de la matemàtica, que determinen molt el rumb que aquesta prendrà. El formalisme apareix així com un teixit de base sobre el qual els matemàtics van brodant la seva obra en direccions i colors inspirats per la seva interacció amb el món.

## 1.5 Terminologia i notació

La matemàtica no comercial en català no té gaire tradició. Això ha fet que s'hagin hagut de manllevar els conceptes, els termes per a designar-los i



els símbols per a denotar-los d'altres cultures més matematitzades. Aquestes cultures s'han manifestat a Europa en llatí fins el segle XVII, i després en italià, francès, neerlandès, alemany i anglès, principalment. A causa del seu volum de producció de llibres i articles, l'anglès, el francès i l'alemany han estat els més influents, i per la proximitat tant geogràfica com lingüística, és el francès, moltes vegades a través del castellà, la llengua a partir de la qual hem anat formant el nostre lèxic matemàtic. Hem de fer notar que la terminologia no està encara estabilitzada i que, en diversos medis, es poden trobar maneres diferents de designar el mateix concepte. Hi ha unes quantes paraules, però, que, ja sigui perquè s'han adaptat de la parla no tècnica, ja sigui perquè el concepte és prou suggerent per haver estat designat per analogia amb conceptes existents en altres camps, tenen designació original. Hi ha hagut diverses paraules que hem dubtat a utilitzar. Potser el més important ha estat la utilització del mot "número", que nosaltres emprem per a designar elements de certs conjunts, en contrast amb "nombre", que utilitzem per a designar la quantitat d'elements d'un conjunt. Hauríem pogut fer servir "nombre" per als dos conceptes, però després d'haver consultat amb alguns filòlegs i matemàtics, ens hem decidit per seguir la manera de dir que tant l'autor com molts dels seus companys fan servir en explicar les classes. Una altra paraula problema és "acotat" per designar un conjunt que està contingut en un interval, en un disc o en una bola de radi finit. En alguns medis es fa servir "afitat" i fins i tot "fitat", que a nosaltres ens suggereix més el concepte de frontera o ruta marcada i, en el darrer cas, fins i tot el fet de ser l'objectiu de les nostres accions o de la nostra mirada, com ho suggereix la paraula "fita" i el verb "fitar". "Cota", en canvi, ens ha donat més la idea d'impediment per a anar més enllà, que ens sembla més escaient. També ens hem estimat més fer servir "radià", amb plural "radians", i no "radiant" com diu el diccionari, per a la mesura angular que subtendeix un arc de longitud igual al radi: en totes les llengües europees s'expressa així, i no com a derivat del verb "radiar".

Pel que fa a la notació, aquesta es troba força estandarditzada internacionalment, encara que diferents autors i sobretot autors en diversos camps de la matemàtica poden fer servir notacions lleugerament diferents per al mateix concepte. Tal és el cas de la derivada, per exemple. El que hem fet és utilitzar la notació habitual per a nosaltres, però indicant quines altres notacions es poden trobar. Els símbols per a designar les funcions elementals i altres funcions especials són prou semblants a tots els medis, però no deixa d'haver-hi algunes diferències. Nosaltres hem adaptat la notació continental europea, tal com es troba a les taules de funcions especials europees més modernes. En aquesta notació posem  $\exp$ ,  $\ln$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$ ,  $\sec$ ,  $\operatorname{cosec}$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{th}$ , etc., que en la notació anglosaxona s'escriuen  $\exp$ ,  $\log$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ ,  $\cot$ ,  $\sec$ ,  $\operatorname{csc}$ ,  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\tanh$ , etc. No estic segur d'haver fet la bona elecció: el *software* de càlcul en ordinadors ha adoptat més aviat la terminologia anglosaxona. Sigui com sigui, els símbols són en general prou recognoscibles. Per altra banda hem adoptat el punt decimal en lloc de la coma o de l'apòstrof, en part per l'ús extens que es fa del punt als ordinadors i en part perquè en escriure una successió de números

els separem amb comes, i si aquests números tenen comes decimals, pot quedar tot prou confús.

Segui com sigui, hem procurat no abusar de la terminologia i de la notació especialitzada. En particular perquè no ha calgut, però també perquè ens ha semblat que ja hi ha prou conceptes nous perquè no calgui complicar-ho amb paraules com “homeomorfisme” o “difeomorfisme”, per exemple, encara que apareguin els conceptes, si és que ho fan, d’una manera del tot esporàdica. Ha estat la nostra estratègia fer servir més les paraules que els símbols, encara que això ha representat allargar l’escriptura d’enunciats i demostracions. Ho hem fet molt conscientment pensant que una part important de la matemàtica és parlar-ne, i estar submergit entre símbols pot dificultar el costum de la verbalització. Això no vol dir que no hàgim fet servir per a res la simbologia, que és una eina indispensable per a organitzar la deducció. De fet donem a conèixer i utilitzem tots els símbols habituals, i esperem que el lector s’hi familiaritzi.

Hem procurat ser poc repetitius i fins i tot concisos. No creiem que portar massa el lector de la mà sigui una bona tàctica. Ens hem estimat més que sigui ell qui ho estudiï, qui desenredi el significat de les expressions utilitzades, que som conscients que no sempre són captables amb facilitat. Tampoc hem sistematitzat d’una manera formal els enunciats i les demostracions; hem deixat el lector que, en cada secció, destrüï què és el que s’afirma i quins són els arguments que sustenten aquestes afirmacions.

## 1.6 Nocions prèvies

### 1.6.1 De la lògica

Sense intentar un formalisme lògic, hi ha uns quants símbols, potser més d’importància taquigràfica que formal, que fem servir sovint. En el nostre cas els únics que fem servir són: els quantificadors  $\exists$ , que es llegeix “*existeix*”, i  $\forall$ , que es llegeix “*per a tot*”. També fem servir la notació  $P \Rightarrow Q$ , que es llegeix “*P implica Q*”, i que significa que si la frase entre cometes és certa i  $P$  també ho és, llavors  $Q$  ho és. Del concepte de “cert” o “ver” ja en parlàvem una mica en considerar la fonamentació. També es fan servir  $P \wedge Q$ , que es llegeix  $P$  i  $Q$ , que és una proposició certa si ho són tant  $P$  com  $Q$ , i  $P \vee Q$ , que es llegeix  $P$  o  $Q$  i és certa si alguna de les dues,  $P$  o  $Q$ , és certa.

### 1.6.2 De la Teoria de Conjunts

Les notacions més emprades, encara que no ho són gaire en aquest text, són la de la pertinença d’un element  $a$  a un conjunt  $A$  que s’indica amb  $a \in A$ .

Que un conjunt  $A$  és part d’un conjunt  $B$  s’indica amb  $A \subset B$ .

El *conjunt buit*, el que no té cap element, es denota per  $\phi$ .

La *unió* dels conjunts  $A$  i  $B$ , és a dir, el conjunt que conté com a elements tant els de  $A$  com els de  $B$ , es denota per  $A \cup B$ .

La *intersecció* dels conjunts  $A$  i  $B$ , és a dir, el conjunt d'elements que pertanyen als dos conjunts  $A$  i  $B$  s'indica amb  $A \cap B$ .

Si tenim un conjunt  $X$  que conté tots els conjunts que considerem en un cert context, llavors si  $A$  és un d'aquests conjunts,  $A^c$ , el *complement* de  $A$ , està constituït pels elements de  $X$  que no estan continguts a  $A$ . Així mateix  $A \setminus B$  és el conjunt d'elements de  $A$  que no pertanyen a  $B$ ; es llegeix “ $A$  menys  $B$ ”.

Amb les notacions  $\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$  indiquem el conjunt d'elements que estan en algun dels conjunts  $C_\alpha$ , on  $A$  és un conjunt els elements dels quals serveixen d'índex per a indicar de quin dels conjunts  $C_\alpha$  es tracta. Així mateix,  $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$  indica el conjunt que té per elements els que pertanyen a tots els conjunts  $C_\alpha$ , per a tota  $\alpha$  de  $A$ .

El *producte cartesià*  $A \times B$  de dos conjunts és el conjunt que té per elements totes les parelles ordenades  $(a, b)$ , amb  $a \in A$  i  $b \in B$ .

### 1.6.3 De les relacions entre elements d'un conjunt

Una *relació d'equivalència* entre els elements d'un conjunt  $X$  és l'associació que es fa entre parelles d'elements de  $X$  basant-se en qualsevol criteri, sempre que es compleixi que sigui reflexiva, simètrica i transitiva, és a dir, que si el símbol  $\sim$  representa aquesta associació, llavors  $a \sim a$ ,  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$  i  $(a \sim b) \wedge (b \sim c) \Rightarrow a \sim c$ . Si  $a \sim b$ , diem que  $a$  és *equivalent* a  $b$ .

Una relació d'equivalència té la propietat de partir el conjunt  $X$  en *classes d'equivalència*, és a dir,  $X$  queda expressat com la unió de subconjunts  $A_\alpha$ , que tenen interseccions mútues buides. A cada  $A_\alpha$  els elements són tots equivalents, és a dir  $a, b \in A_\alpha$  (és a dir, tant  $a$  com  $b$  a  $A_\alpha$ ) vol dir que  $a \sim b$ . Aquí els índexs  $\alpha$  es poden prendre d'entre els elements de  $X$  que no siguin mútuament equivalents.

Si considerem els subconjunts  $A_\alpha$  com a elements d'un nou conjunt, aquest darrer se sol denotar per  $X/\sim$ , en què  $\sim$  pot ser explicitada dient quin criteri fem servir per a considerar equivalents o no els elements de  $X$ . Aquest nou conjunt s'anomena el *quocient de  $X$  per la relació d'equivalència donada*.

Aquest procés del *pas al quocient* és bàsic en la matemàtica, i potser encara més, és un procediment habitual de la ment per a classificar l'experiència i obtenir-ne nous conceptes.

Una *relació d'ordre* en un conjunt  $X$  és una relació que es pot donar o no entre els dos elements de cada parella d'elements de  $X$ . Se sol denotar per  $x \leq y$ , que es llegeix “ $x$  no és més gran que  $y$ ” o bé “ $x$  no es troba després de  $y$ ”. Ha de complir necessàriament la propietat reflexiva ( $x \leq x$ ), la propietat antisimètrica ( $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$ ) i la propietat transitiva ( $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ).

Si donada qualsevol parella  $(x, y)$  d'elements de  $X$ , es té que o bé  $x \leq y$  o bé  $y \leq x$ , diem que  $X$  és *totalment ordenat*.

### 1.6.4 De l'aritmètica

Al capítol 2 estudiem els números i les operacions aritmètiques, però tractant d'acostar-los una mica al formalisme, de manera que els conceptes quedin prou clars per a portar endavant el desenvolupament racional del càlcul infinitesimal. Tot i això suposem que el lector està força familiaritzat amb els números naturals, enters, racionals i fins i tot irracionals, amb la seva notació en sistema decimal i amb les operacions de suma (+), resta (-), multiplicació ( $\times$ ,  $\cdot$  o no res), divisió ( $\div$  o /), potenciació ( $a^n$ ) i radicació ( $\sqrt[n]{a}$  o bé  $a^{1/n}$ ) de grau  $n$ .

Farem servir al llarg del treball uns quants símbols que ens permetran escurçar les fórmules o no haver d'escriure amb moltes paraules els processos. Entre aquests símbols es troba el *sumatori*, que indiquem amb una sigma majúscula grega “ $\Sigma$ ”, i que serveix per a indicar que se sumen les quantitats indexades que es troben a continuació del símbol. Per exemple  $\sum_{i=1}^n a_i$  indica que s'han de sumar els números  $a_i$ , en què l'índex  $i$ , que és un número natural, va des d'1 fins a  $n$ , és a dir, amb aquest símbol s'indica el que de vegades escrivim també  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

D'una manera més general escrivim  $\sum_{i \in I} a_i$  per a indicar la suma dels números  $a_i$ , on els índexs  $i$  prenen tots els valors dins del conjunt  $I$  dels índexs permesos.

De la mateixa manera, amb  $\prod_{i \in I} a_i$  indiquem el producte dels números  $a_i$

amb índexs al conjunt  $I$  o bé  $\prod_{i=0}^n a_i$  amb índexs  $0, 1, 2, \dots, n$ .

El *factorial* d'un número natural  $n$ , el designem per  $n!$  i és el producte dels  $n$  primers números naturals, és a dir  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n$  o sigui  $\prod_{i=1}^n i$ . Es defineix el factorial de 0 com a 1, és a dir,  $0! = 1$ .

### 1.6.5 De les operacions matricials

Recordem que una *matriu de  $m \times n$*  és una disposició de números en  $m$  fileres o rengles formant  $n$  columnes, és a dir, són números disposats en la forma indicada a continuació

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

S'acostuma a indicar cada element amb un doble índex, el primer indica la renglera o fila, mentre que el segon indica la columna. Se sol tancar aquesta disposició entre parèntesi.

Dues matrius de  $m \times n$  es poden sumar, i el resultat és una matriu de  $m \times n$ , en la qual el terme amb índex  $ij$  és la suma dels elements amb aquest índex de les matrius que se sumen.

Una matriu  $A$  de  $m \times n$  es pot multiplicar per una matriu  $B$  de  $n \times p$ , per donar una matriu  $C$  de  $m \times p$ . L'element  $c_{ij}$  d'índex  $ij$  de la matriu  $C$  ve donat per

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

### 1.6.6 De l'àlgebra

És molt probable que el lector ja tingui nocions d'àlgebra lineal, incloent la resolució de sistemes d'equacions lineals per algun mètode. Al text incloem un resum dels resultats que es fan servir, per a la justificació dels quals s'aconsella consultar algun text d'àlgebra lineal.

Pel que fa a altres aspectes de l'àlgebra, hem de dir que en fem poc ús. Només fem notar en un apèndix del capítol 2 les estructures algebraïques dels números. El *teorema fonamental de l'àlgebra* que ens diu que tota funció polinòmica té almenys una arrel, que pot ser complexa, o, equivalentment, que tot polinomi es pot expressar com a producte de factors polinòmics de primer i segon grau, no és utilitzat explícitament, però convé tenir-lo present, ja que les arrels de polinomis tenen un paper important als capítols 7 i 10. El lector ja deu saber que no hi ha fórmules generals que donin, en termes de les operacions aritmètiques i de radicals, les solucions de les equacions polinòmiques de grau més gran que 4 i, encara que hi ha fórmules per a les equacions de grau 3 i 4, no esperem que el lector se'n recordi.

### 1.6.7 De la geometria

Certament esperem que el lector conegui la geometria clàssica: la de regle i compàs, així com l'encara més antiga: els volums i les àrees de les figures amb què ens trobem a l'experiència: piràmides, cons, esferes, etc. I això perquè és bo de tenir una base intuïtiva sobre la qual treballar amb més facilitat: només faltava que cada vegada que volguéssim resoldre un problema on entra el volum del con o de l'esfera, s'hagués de calcular a partir del càlcul infinitesimal.

La geometria que està a la base del càlcul infinitesimal és, però, la geometria analítica, i més precisament, l'expressió de corbes i superfícies mitjançant equacions algebraïques. Així suposem que el lector ja sap (tot i que no és necessari teòricament) que una equació quadràtica representa una *cònica*. Així,  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  representa una el·lipse,  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ , una hipèrbola i  $y^2 = 2px$ , una paràbola, totes amb eixos paral·lels als eixos coordenats.

En general un polinomi de segon grau en  $x$ ,  $y$ ,  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ , s'anul·la en una cònica, el tipus i la posició de la qual es determina fàcilment a partir dels coeficients.

Un munt de corbes diferents al pla apareixen en considerar els polinomis en  $x$ ,  $y$  de graus més grans: astroides, cardioides, cissoïdes i, en general, totes les conegudes com a *corbes algebraïques*. I encara més corbes si, a l'equació, hi fem aparèixer funcions transcendents, com poden ser les trigonomètriques o exponencials.

A l'espai, les superfícies vénen donades pels zeros de funcions en les tres variables  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Si aquesta funció és un polinomi de segon grau obtenim les anomenades *quàdriques*, que en general són donades per l'equació

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned}$$

Segons els valors dels coeficients tenim plans, cilindres, cons, esferes, paraboloides, hiperboloides d'una i de dues fulles o el·lipsoides.

A qualsevol llibre de geometria analítica es troben analitzats tots els casos.

## Capítol 2

# Els números

### 2.1 Introducció

L'aparició dels números es perd en la prehistòria. A les troballes més antigues els símbols emprats per a designar els números apareixen com a marques més o menys agrupades: una per cada unitat. Els primers sistemes numèrics importants registrats són l'egipci i el mesopotami, en ús almenys des del 2000 aC. En l'egipci el sistema era essencialment decimal, però no posicional. El símbol per a cada número s'obtenia afegint símbols elementals que corresponien a les unitats, les desenes, les centenes, etc. Per a representar els números fraccionaris utilitzaven notacions especials. No cal dir que les operacions aritmètiques els eren difícils de realitzar, sobretot les divisions. Els mesopotamis, en canvi, tenien un sistema posicional en base 60. Les seves xifres, des de l'u fins al 59, es formaven amb símbols cuneïformes elementals representant la unitat i la desena. La notació els permetia representar les fraccions fàcilment i fer les operacions aritmètiques essencialment com les fem nosaltres. De fet van desenvolupar una tècnica suficient per a preparar efemèrides astronòmiques precises, tècniques i efemèrides que van ser heretades per *Ptolemeu* per escriure el seu *Almagest* i a partir d'ell per tots els astrònoms fins passada l'edat mitjana.

També els xinesos, els maies i els indis van tenir sistemes de numeració més o menys efectius. El sistema hindú decimal posicional, ja en vigència al segle VI, és adoptat pels àrabs i d'allà passa a ser el nostre sistema decimal. El primer que l'introdueix a Europa a nivell rudimentari (sense el 0 i sense fraccions) és *Gerbert d'Orlhac*, que l'aprèn dels àrabs en la visita que fa al comtat de Barcelona l'any 997.

Aquest sistema es va establir amb els treballs de *Fibonacci* (al segle XIII) i els seus seguidors, i culmina amb *Stevin* al segle XVI. El primer que utilitza la notació amb el punt decimal tal com ho fem ara és *Briggs* a les seves taules de logaritmes al 1617.

En aquest capítol, tot i que suposem que el lector està familiaritzat amb els números reals i la utilització que se'n fa, en repassarem les definicions, la

notació i les propietats elementals, procurant ser precisos, però sense portar el formalisme a un extrem.

## 2.2 Els números naturals

Els *números naturals* són la nostra eina matemàtica per a comptar. Encara que intuïtivament ens és prou clar el que són, per l'ús constant que en fem, els intents de definir-los en termes de conceptes més elementals topa amb força problemes. *Giuseppe Peano* va proposar el segle passat (1889) definir el conjunt dels números naturals com aquell conjunt  $\mathbb{N}$  que compleix els següents axiomes:

- 1)  $\mathbb{N}$  conté un element distingit, que denotem amb 1.
- 2) Cada element  $n$  de  $\mathbb{N}$  té associat un altre element  $n^+$ , anomenat *el següent de  $n$* .
- 3) Dos números diferents tenen següents diferents.
- 4) 1 no és següent de cap element.
- 5) Un subconjunt de  $\mathbb{N}$  que contingui 1 i que contenint  $n$  contingui  $n^+$  és tot  $\mathbb{N}$ .

Aquesta definició dels naturals ha resultat força convenient, i té la virtut que correspon a la intuïció i sobretot que explicita en el seu punt 5 el *principi d'inducció* que resulta una bona eina per a demostrar que certes propietats valen per a tots els números naturals.

Una altra manera, intuïtivament correcta, de mirar-se els números naturals és considerar-los *cardinals* de conjunts finits. És a dir, definir-los essencialment com el nombre d'elements dels conjunts finits (que són els que no es poden posar en correspondència biunívoca amb una part pròpia d'ells mateixos).

Els intents de formalització de l'aritmètica, és a dir, de la matemàtica dels números naturals, ha portat dificultats serioses. Quan aquesta formalització, que vol dir fer-ne una teoria axiomàtica, s'intenta en base a la teoria de conjunts, ens trobem amb el fenomen de *Gödel*: hi ha propietats aritmètiques vertaderes que no es poden deduir formalment dels axiomes mitjançant les regles formals de deducció, és a dir, no tenen demostració.

Una de les coses que la teoria de conjunts no pot respondre és si tots els naturals són els que s'obtenen a partir de l'u afegint-n'hi un cada vegada. És a dir, si val el *principi d'Arquimedes naïf*: que per gran que sigui un natural el podrem atènyer afegint uns successivament a la unitat, en un procés intuïtivament finit. Fem notar que *l'anàlisi no estàndard* no accepta aquesta visió i afegeix axiomes a la teoria de conjunts que fan que hi hagi números naturals *no assequibles*, que no podem, doncs, escriure en sistema decimal per molt paper i temps que hi esmercem!

Aquí no intentarem portar fins a l'extrem la formalització axiomàtica de les matemàtiques, de manera que ens conformarem amb la noció intuïtiva dels



nombres naturals, el seu ordre i les seves operacions, les propietats de les quals suposem conegudes. Això sí, utilitzarem el *principi d'inducció*, que per cert es desprèn com a conseqüència dels axiomes en la teoria de conjunts generalment acceptada.

D'exemples de la utilització del principi d'inducció per a demostrar propietats aritmètiques en trobarem tot al llarg d'aquesta obra. De moment donem-ne uns quants de ben senzills.

Per a demostrar que la suma dels primers  $n$  números naturals val  $n(n+1)/2$ , fem el següent: comprovem que és cert per a  $n = 1$ :  $1 \cdot \frac{2}{2} = 1$ . I ara suposant-ho cert per a  $n$ , és a dir, suposant que  $1 + 2 + \dots + n$ , que podem denotar per  $\sum_{i=1}^n i$  val  $\frac{n(n+1)}{2}$ , comprovem que la fórmula val per a  $n + 1$  en lloc de  $n$ .

Això ho veiem sumant  $n + 1$  al valor de la suma per a  $n$ :  $\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$ , que val  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ , és a dir, la fórmula cercada. Per tant, d'acord amb el principi d'inducció la fórmula és vàlida per a tots els naturals. Es diu que el gran matemàtic *Karl Friedrich Gauss* retrobà aquesta fórmula als 10 anys quan el professor li va demanar que sumés els primers 100 números naturals.

## 2.3 Successions

Una *successió* d'elements d'un conjunt  $C$  és una aplicació dels números naturals,  $\mathbb{N}$ , en aquest conjunt, és a dir, és un subconjunt de  $C$  indexat per  $1, 2, 3, \dots$ . Una successió, la solem denotar per  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  o senzillament per  $\{a_n\}$ , on cada  $a$  indexada pertany al conjunt  $C$ . Si el conjunt  $C$  és precisament el dels naturals,  $\mathbb{N}$ , llavors tenim una successió de naturals. Perquè cada terme de la successió  $a_n$  quedi definit es pot donar una fórmula explícita com a funció de  $n$ . Per exemple  $a_n = 2n$  defineix la successió dels números parells i  $a_n = 2n - 1$  la dels imparells. També es pot definir una successió mitjançant una propietat: per exemple es pot parlar de la successió dels números primers (és a dir, els que no tenen divisor diferent d'1 o d'ell mateix)  $\{p_n\}$ , on  $p_n$  és l'enèsim nombre primer en l'ordre dels naturals. És ben sabut que no coneixem una fórmula per a expressar  $p_n$  en funció de  $n$ .

Successions ben conegudes són les aritmètiques i les geomètriques. Les primeres són de la forma  $a_n = a + nr$ , és a dir, s'obtenen afegint  $r$  successivament a cada terme. A les geomètriques tenim  $a_n = ar^n$ , és a dir, s'obtenen els termes multiplicant successivament per  $r$ . Com a exercici podem intentar trobar l'expressió de la suma dels  $n$  primers termes d'aquestes successions.

De vegades no tenim una fórmula explícita, però podem definir la successió recursivament. Així, per exemple ho fem per la famosa *successió de Fibonacci*, amb la qual aquest matemàtic del segle XIII tractava de modelar el creixement d'una població de conills començant amb una parella. Els conills començaven a reproduir-se al cap de dos mesos d'haver nascut a raó d'una nova parella per

mes i per parella. La successió, indexada pel nombre de mesos, resulta:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Aquí no resulta gaire senzill expressar  $a_n$  en termes de  $n$  (més endavant en parlarem més), però sí que és fàcil donar una fórmula que vagi generant els termes de la successió coneguts els anteriors. Aquesta fórmula, del tipus recursiu, és  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , i comença amb  $n = 3$ , ja que per deduir-ne un terme necessitem conèixer els dos termes anteriors.

És clar que la successió de Fibonacci no resulta un model gaire bo de la realitat, ja que no té en compte la població que va desapareixent o que no es reproduïx. Més endavant ja veurem models molt més fidels de l'evolució de poblacions.

Una altra successió, que ha atret l'atenció dels matemàtics darrerament, és la que s'obté prenent com a primer terme un número natural qualsevol, i els termes successius es van obtenint de la següent manera: si l'anterior és parell el divideixes per 2 i si és senar el multipliques per 3 i afegeixes 1 al resultat. Certament això defineix una successió. El que no se sap és com demostrar una propietat que ha resultat ser certa per a tots els números inicials que s'han provat: que tard o d'hora els termes esdevenen  $\dots, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$ .

No sempre que es té una llei recurrent per a definir la successió es pot posar  $a_n$  en funció de  $n$  mitjançant una fórmula explícita.

## 2.4 Els números enters

Els *números enters* es poden definir com a classes d'equivalència de parelles de números naturals:  $(m, n)$  és equivalent a  $(p, q)$  si  $m + q = n + p$ . Es defineix la suma i el producte d'enters utilitzant representants de les classes d'equivalència. La classe d'equivalència resultant no depèn dels representants escollits. Així

$$(m, n) + (p, q) = (m + p, n + q) \quad \text{i} \quad (m, n) \cdot (p, q) = (mp + nq, mq + np).$$

Resulta que apareix un nou element, el 0, que és la classe d'equivalència de  $(m, m)$  per a qualsevol  $m$  natural, i també els números negatius, que són aquells en què  $n > m$ .

Als enters es defineix un ordre:  $(m, n)$  és més gran que  $(p, q)$  si  $m + q$  és més gran que  $p + n$ . No depèn dels representants de la classe que es considerin.

El número enter  $(m, n)$  es pot pensar com la *diferència* entre els dos naturals  $m$  i  $n$ . Els podem visualitzar essent la unió  $\mathbb{Z}$  dels *positius*  $\mathbb{Z}^+$ , que s'identifiquen amb els naturals,  $\mathbb{N}$ , del 0 i dels *negatius*  $\mathbb{Z}^-$  que són els naturals marcats amb un signe negatiu. Es defineix el *valor absolut*  $|n|$  d'un enter com el natural corresponent si és positiu i menys aquest si és negatiu. L'avantatge dels enters és que amb ells es poden fer restes i es poden resoldre problemes i equacions en què el resultat tingui un valor negatiu. Curiosament, els números negatius van trigar molt a ser acceptats pels matemàtics europeus, que no ho van fer

fins al segle XVII. I dic curiosament perquè sembla ben natural admetre'ls al comerç on hi ha guanys i pèrdues i on es pot haver de restar un número més gran d'un de més petit!

Des del punt de vista algebraic els enters formen un *anell* commutatiu amb unitat (amb la suma i el producte). No explicitem les propietats d'aquestes operacions en les quals certament el lector hi està ben avesat.

## 2.5 Els números racionals

Els *números racionals* apareixen ben d'una altra manera, per a indicar fraccions. La definició formal, però, és força semblant. Els definim també com a classes d'equivalència de parelles de números enters  $\{(m, n)\}$ , amb l'enter  $n$  diferent de 0. En aquest cas prenem  $(m, n)$  equivalent a  $(p, q)$  si  $mq = np$ . Les operacions es defineixen utilitzant representants de les classes d'equivalència. Així tenim

$$(m, n) + (p, q) = (mq + np, nq) \quad \text{i} \quad (m, n) \cdot (p, q) = (mp, nq),$$

i es veu que estan ben definides, en el sentit que les classes d'equivalència resultants no depenen dels representants triats. Els podem pensar i denotar com a fraccions:  $(m, n) = m/n$ . També es defineix un ordre:  $m/n$  és més gran que  $p/q$  si  $mq$  és més gran que  $np$ , si prenem representants en què  $n$  i  $q$  siguin positius, la qual cosa sempre es pot fer.

Notem que així com els naturals quedaven immersos, amb totes les seves propietats, en els enters, els enters queden immersos en els racionals, corresponents als de la forma  $m/n$  on  $n$  és un factor de  $m$ . La unitat, en particular, queda representada per  $m/m$  per a qualsevol  $m$ . En aquest sentit, podem considerar els naturals com a enters i aquests darrers com a racionals, sense tenir cap problema amb les operacions i l'ordre, que queden respectats.

Entre els racionals es pot definir ara una nova operació, la divisió de dos números. En el cas dels enters, donats dos números  $a$  i  $b$  no és sempre possible trobar un tercer enter  $c$  de manera que  $a = b \cdot c$ . En el cas dels racionals això sí que és possible, si  $b$  és diferent de 0, de fet si  $a = m/n$  i  $b = p/q$ , resulta que prenent  $c = mq/np$  s'obté  $a = b \cdot c$ . En particular si  $a = 1$ , resulta  $c = q/p$ , que s'anomena l'*invers* de  $p/q$ .

El conjunt dels racionals, el denotarem per  $\mathbb{Q}$ , i hi tenim racionals *positius* (quan  $m$  i  $n$  tenen el mateix signe), *negatius* (si  $m$  i  $n$  tenen signes diferents), i 0 (si  $m$  és 0).

Algebraicament els racionals formen un *cos* respecte de les operacions de la suma i el producte. A més, és un cos ordenat i arquimedià. Això darrer significa, com als naturals, que donats dos racionals es pot multiplicar qualsevol d'ells per un natural i obtenir un número més gran que l'altre en valor absolut. El valor absolut d'un racional  $a = m/n$  es denota per  $|a|$  o  $|m/n|$  i es defineix com  $a$  si aquest és no negatiu i  $-a$  si ho és.

De fet els racionals positius van ser admesos d'una manera natural a la matemàtica des de la més remota antiguitat històrica. Els egipcis i els mesopotamis els feien servir a bastament per als seus càlculs. La raó d'aquesta acceptació podria ser ben senzilla: en voler afinar els mesuraments amb una unitat de mesura fixada, és natural dividir-la en unitats més petites.

## 2.6 Els números irracionals

L'observació que hem fet sobre els números fraccionaris que apareixen en fer mesuraments va portar a l'antiguitat hel·lènica un conflicte que desembocà en un cert divorci entre l'aritmètica i la geometria, que no va ser palliat fins a l'aparició del càlcul infinitesimal al segle XVII. El problema va aparèixer en tractar de mesurar la diagonal d'un quadrat prenent-ne un costat com a unitat de mesura. Resulta que per molt que se subdivideixi en parts al·lòtiques la unitat de mesura no hi ha manera d'efectuar aquest mesurament amb exactitud. Efectivament, com ja va fer notar *Aristòtil*, si això fos així, vol dir, pel teorema de Pitàgores de la geometria euclidiana, que  $\sqrt{2}$  seria expressable per una fracció, diguem  $m/n$ . Ara, suposant que  $m/n$  és el representant del corresponent racional tal que  $m$  i  $n$  no tenen divisor comú, tenim

$$n\sqrt{2} = m, \quad \text{d'on} \quad 2n^2 = m^2,$$

la qual cosa implica que  $m$  és parell (en cas contrari, el seu quadrat no podria, ser-ho, de parell). Diguem que  $m = 2p$ . Substituint, queda

$$2n^2 = 4p^2, \quad \text{o sigui} \quad n^2 = 2p^2,$$

d'on, per la mateixa raó d'abans,  $n$  és parell. Això contradiu que  $m$  i  $n$  no tenen factor comú. No pot ser, doncs, que un racional tingui 2 per quadrat!

Els grecs van renunciar així a expressar les seves magnituds geomètriques mitjançant números. Van desenvolupar tota una *àlgebra geomètrica* i el concepte de *raó* (*λόγος*) de dues magnituds. Aquestes magnituds eren *incommensurables* quan la seva raó no era la mateixa que la de dos números naturals, és a dir, quan el resultat de la mesura de l'una per parts al·lòtiques de l'altra no es podia expressar amb un número racional.

## 2.7 Els números reals

Amb la trigonometria, els logaritmes i la geometria analítica, que es van anar desenvolupant a partir del Renaixement, es va fer més patent el problema de l'expressió numèrica de les magnituds. Ja els mesopotamis, fa més de 3000 anys, havien utilitzat el seu sistema numèric sexagesimal per expressar  $\sqrt{2}$  amb una gran aproximació (l'equivalent de 7 xifres decimals). Així mateix en fer les taules trigonomètriques al segle XVI i de logaritmes al segle XVII, s'expressaven els números amb una gran quantitat de xifres decimals fraccionàries.

D'alguna manera es va anar formant el concepte intuïtiu del que esdevindria el número real. La seva existència estava garantida pel problema de què es tractava: no hi havia dubte que la diagonal d'un quadrat es podia mesurar tan aproximadament com volguéssim, o que el sinus d'un angle o el logaritme d'un número existien, i que per a expressar-los no n'hi havia prou amb les fraccions o amb expressions decimals finites, però que es podien aproximar tant com volguéssim. La definició que nosaltres podem adoptar de número real és precisament aquesta: un número que podem aproximar tant com vulguem afegint xifres a la part fraccionària de la seva expressió decimal que, per tant, ha de posseir un nombre infinit de xifres. Així doncs un número real serà això: un número amb un nombre infinit de xifres en la seva expressió decimal. Naturalment hem de considerar el mateix número aquell que té una cua infinita de nous i aquell que la té de zeros, però amb la xifra anterior augmentada en un. Per exemple, és el mateix escriure 0.010000..., que 0.009999... .

Així, el número real  $\sqrt{2}$  queda definit donant totes les seves xifres decimals, les quals podem obtenir mitjançant l'algorisme habitual per a extreure arrels quadrades

$$\sqrt{2} = 1.4142\dots$$

L'avantatge d'aquesta definició és que ja estem completament familiaritzats amb aquests números, i amb les operacions que hi fem. La suma i el producte de dos números reals es pot obtenir amb tanta aproximació com es vulgui prenent aproximacions amb prou xifres decimals dels termes de l'operació. També tenim prou clar com estan ordenats, és a dir, quin és més gran que un altre: el que tingui la primera xifra diferent més gran (exceptuant algun cas de cues de zeros i nous!). També sabem dividir i extreure arrels quadrades i cúbiques. Certament hi ha petites dificultats per veure que tot això es pot fer sense problema, però són fàcilment superables (per exemple que en augmentar l'aproximació dels factors d'un producte, pot canviar alguna de les xifres del producte aproximat obtingut abans, però el cert és que les xifres es van estabilitzant en anar prenent més i més xifres decimals).

Resulta, però, una mica desagradable fer dependre la definició de número real d'una base particular de numeració, sobretot quan això no ha calgut per res en definir els enters i els racionals. Certament podem veure que si expressem els números en una altra base, 2 o 16, o 60 com els babilonis, s'obtenen resultats equivalents, però així i tot algú pot trobar insatisfactori l'haver de dependre d'alguna expressió dels números.

Per evitar aquestes objeccions el que es fa és definir els *números reals* mitjançant classes d'equivalència de successions de números racionals. Certament, la notació decimal d'un número real es pot mirar com una successió de números racionals que el defineixen. Així, per exemple,  $\sqrt{2}$  queda definit per la successió 1, 1.4, 1.41, 1.414, ..., on anem obtenint les xifres successives de la seva expressió decimal amb algun dels algorismes d'extracció de l'arrel quadrada. D'alguna manera podem dir que la successió de racionals que ens defineix el número real s'hi aproxima, puix la diferència amb ell es va fent més i més

petita, fins a esdevenir més petita que qualsevol número que pensem d'antuvi. En el cas de  $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$ , aquesta diferència forma la successió  $0.414213562\dots$ ,  $0.014213562\dots$ ,  $0.004213562\dots$ , etc., on veiem que el nombre de zeros abans de la primera xifra significativa va creixent.

Considerarem, doncs, com a equivalents totes les successions de racionals que tinguin la propietat segons la qual la diferència amb el número real es va fent tan petita com vulguem prenent  $n$  prou gran.

Així, el zero ve també definit per la successió  $\{1/n\}$ , ja que, per la propietat arquimèdiana, donat  $\varepsilon > 0$  racional, podem trobar  $N$  tal que si  $n > n_0$ , llavors  $1/n < \varepsilon$ .

Si nosaltres hem definit el número real mitjançant la seva expressió decimal, aquestes successions de racionals que hi *tendeixen*, i que per a nosaltres definiran el mateix número, formen una classe d'equivalència, incloent-hi la mateixa expressió decimal, que també és una successió de racionals. Bé, doncs, prescindim del tot de l'expressió decimal i definim els números reals com a classes d'equivalència de successions de racionals, en què dues successions són equivalents quan la diferència entre elles (vol dir la successió de les diferències dels termes corresponents) tendeix a 0.

Passa, però, que no totes aquestes classes d'equivalència són bones per a definir números reals. Per exemple la successió  $\{a_n\}$  amb  $a_n = n$  creix indefinidament, o bé aquella amb  $a_n$  valent 1 o  $-1$  segons que  $n$  sigui parell o senar, tampoc serveix per a definir un real. Cal que (i aquí tenim de nou el punt delicat) la successió *tendeixi* o *convergeixi* a algun lloc, que és el candidat a número real. Pensem en quina virtut tenien els reals definits com a expressions decimals infinites: doncs que la particular successió que el definia era creixent (o almenys no decreixent, ja que podria aparèixer un zero) i *acotada* (és a dir, no ultrapassava algun valor, que seria per exemple la seva part entera augmentada en 1). Doncs són precisament les successions de racionals equivalents a aquests (en el sentit que la diferència tendeix a 0) les que volem considerar vàlides per a definir reals. Resulta que aquestes successions són les anomenades *fonamentals* o *de Cauchy* (en honor de l'important matemàtic del principi del segle XIX). Es defineixen de la següent manera:  $\{a_n\}$  successió de racionals és de Cauchy si, per cada número racional positiu que donem, es pot trobar un índex de la successió a partir del qual dos termes qualssevol no es diferencien en més d'aquest número.

D'una manera més codificada, això se sol escriure

$\{a_n\}$  és de Cauchy si i sols si, per cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ , existeix  $N_\varepsilon$  tal que, si  $m, n > N_\varepsilon$ , llavors  $|a_m - a_n| < \varepsilon$ .

Amb  $N_\varepsilon$  hem volgut indicar que l'índex a partir del qual els termes no se separaran més de  $\varepsilon$  depèn del valor d'aquest  $\varepsilon$ . Com més petit prenem  $\varepsilon$  és d'esperar que més gran haurà de ser  $N_\varepsilon$ .

Les successions de Cauchy són acotades perquè a partir del terme d'índex  $N_\varepsilon$  no es poden separar més de  $\varepsilon$  d'aquest terme. A més tota successió que formem a partir d'ella escollint-ne infinits termes (subsuccessió) és equivalent a

ella. En particular podem formar-ne una subsuccessió *monòtona* (que sigui no creixent o no decreixent). D'aquí no és difícil de provar que hi ha una expressió decimal (infinita) equivalent. En particular notem que tota successió monòtona creixent i acotada o decreixent i acotada per sota ens defineix un número real.

Una vegada definits els números reals com a classes d'equivalència de successions de Cauchy o, equivalentment, com a expressions decimals infinites, queden per definir les operacions aritmètiques. Les definicions es fan utilitzant representants de les classes d'equivalència definint els nombres reals que entren a les operacions i comprovant que la classe d'equivalència resultant no depèn del representant triat. Així queda que la suma es defineix mitjançant  $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$ , és a dir, que la successió de Cauchy (es comprova que ho és) s'obté sumant terme a terme les successions de Cauchy que defineixen els sumands.

La multiplicació, la definim per  $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$ , és a dir, formant la successió dels productes. L'ordre ja és una mica més delicat de definir: no n'hi ha prou amb demanar que perquè  $a = \{a_n\}$  sigui més gran que  $b = \{b_n\}$  es compleixi que  $a_n > b_n$  a partir de cert índex, ja que podria ser que  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$ , complint aquesta condició, representessin el mateix número real. Hem de demanar, doncs, que existeixi un número racional positiu, diguem-ne  $\varepsilon$ , de manera que a partir d'algun índex,  $N$ , resulti que  $a_n - b_n > \varepsilon$ . En termes de l'expressió decimal això es pot expressar més fàcilment:  $a$  serà més gran que  $b$  si l'expressió decimal del primer no és igual a la del segon (per tant exclouent les cues de nous), i la primera xifra en què es diferencien és més gran per  $a$ .

Observem que els números racionals poden considerar-se encabits amb totes les seves propietats i operacions als reals. Un racional  $r$  s'identifica amb la classe d'equivalència de  $\{a_n\}$  amb  $a_n = r$  per totes les  $n$ . Així podem considerar reals racionals i reals irracionals. També podem definir els reals positius, negatius i zero, com aquells que són respectivament més grans, més petits o iguals a zero. El *valor absolut* del real  $a = \{a_n\}$ , denotat també per  $|a|$  és el mateix número si és no negatiu i el de signe contrari si és negatiu.

La *part entera* d'un número real  $x$ , denotat per  $[x]$  és el número enter  $n$  més gran que compleix  $n \leq x$ . Generalment aquest nom es reserva pel cas en què  $x \geq 0$ . Per altra banda, la part fraccionària, denotada amb  $\{x\}$ , és la diferència  $x - [x]$ .

S'utilitza molt la *desigualtat del triangle*, que ens diu que si  $x, y$  són reals, llavors  $|x + y| \leq |x| + |y|$ , i també que  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .

Des del punt de vista algebraic el conjunt dels reals, que denotem per  $\mathbb{R}$ , és, com  $\mathbb{Q}$ , un cos ordenat i arquimedià.

## 2.8 Completesa dels reals

Com hem esmentat abans, la diferència essencial entre els reals i els racionals es troba en la capacitat dels primers per a expressar el resultat de les mesures quan el que es mesura és incommensurable amb la unitat emprada. Tractem

de caracteritzar matemàticament aquesta diferència. Si tenim una successió de racionals, per exemple dels resultats de mesuraments més i més fins de la diagonal d'un quadrat utilitzant un costat com a unitat de mesura, resulta que no existeix cap racional al qual la successió de mesures  $a_n$  tendeixi, és a dir, no hi ha cap racional  $a$  tal que la successió de les diferències  $\{a - a_n\}$  tendeixi a zero. En canvi sí que hi ha un real,  $a = \sqrt{2}$ , que expressem mitjançant una infinitat de xifres, amb aquesta propietat: que la successió  $1, 1.4, 1.41, \dots$  (que obtenim amb l'algoritme de l'extracció d'arrels, que coincideix amb les mesures que obtindríem dividint la unitat successivament en parts decimals) *hi tendeix* (també diem *hi convergeix*), és a dir, la successió diferència  $\{\sqrt{2} - a_n\}$  tendeix a zero.

D'alguna manera el que hem fet amb els reals és tancar els forats que deixaven els racionals. És a dir, ara les successions de Cauchy de racionals convergeixen a un número, no racional, és clar, però sí real.

També es defineixen les *successions de Cauchy* de reals. És la mateixa definició que hem donat per als racionals, però ara admetent que  $a_n$  i  $\varepsilon$  siguin a  $\mathbb{R}$  i no només a  $\mathbb{Q}$ . No costa gaire de veure, encara que ens entretindria massa, que les successions de Cauchy de reals convergeixen, és a dir, que si  $\{a_n\}$  és de Cauchy, llavors existeix un real  $a$  tal que la diferència  $\{a - a_n\}$  tendeix a 0. Aquest element  $a$  al qual convergeix  $\{a_n\}$  s'anomena *límit* de  $\{a_n\}$  i es diu que  $\{a_n\}$  és *convergent* i tendeix o convergeix a  $a$ . Això es denota per  $\{a_n\} \rightarrow a$  o bé  $a = \lim\{a_n\}$ . (També es trobarà escrit  $a = \lim n \rightarrow \infty a_n$ , però nosaltres ja donem per entès que  $n$  tendeix a infinit).

Aquesta propietat dels reals que no tenen els racionals, és a dir, que les seves successions de Cauchy convergeixen (que són les que esperem que convergeixin puix són equivalents a les creixents i acotades), s'anomena *completesa*. És a dir, els reals formen un conjunt complet, mentre que els racionals no.

En general donada una successió de números reals  $\{a_n\}$  es diu que té *límit*  $a$  si i sols si, per cada  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existeix  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > N$ , llavors  $|a - a_n| < \varepsilon$ . Encara més taquigràficament això es pot escriure

$$\{a_n\} \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$$

tal, que  $n > N_\varepsilon \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$ . (Aquí hem emfasitzat amb un subíndex que  $N$  depèn de  $\varepsilon$ ).

Ja hem vist que tota successió de Cauchy de reals convergeix, és a dir, té límit. El recíproc també és cert: tota successió convergent és de Cauchy. Efectivament si es compleix la definició anterior, llavors tenim que també es complirà que si  $n > N_{\varepsilon/2}$ , llavors  $|a - a_n| < \varepsilon/2$ . Si ara tenim en compte que  $|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \varepsilon$ , ja veiem que la successió és de Cauchy, d'acord amb la definició donada anteriorment.

Una successió pot no convergir perquè els seus valors oscil·lin de manera que no s'acosten a un possible límit a partir de cert valor, com passa per exemple amb la successió:  $1, -1, 1 - 1, 1, \dots$ . També pot ser que no convergeixi perquè no roman *acotada*, és a dir, no hi ha cap número  $M$  que el valor de  $|a_n|$  no sobrepassi a partir d'un cert valor de  $n$ . Tal seria el cas d'una successió com



la dels mateixos naturals:  $1, 2, 3, \dots$ . En aquest exemple diem que el límit és infinit. D'una manera més formal diem que la successió  $\{a_n\}$  té límit  $\infty$ , i ho denotem per  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \infty$  o bé senzillament  $\{a_n\} \rightarrow \infty$  si  $\forall M > 0, \exists N$  tal que  $n > N \Rightarrow a_n > M$ .

D'una manera semblant direm que

$$\{a_n\} \rightarrow -\infty, \quad \text{si } \forall M < 0, \exists N \text{ tal que } n > N \Rightarrow a_n < M.$$

Una successió de reals és *acotada* si tots els termes es troben entre dos valors reals, és a dir, hi ha reals  $M$  i  $N$  tals que  $N < a_n < M$  per a tots els valors de  $n$ .

Diem que una successió és *monòtona* si  $a_{n+1} - a_n$  té el mateix signe per a tots els valors de  $n$ . Si  $a_{n+1} - a_n$  és positiu diem que la successió és *monòtona creixent*, si és no negatiu diem que és *monòtona no decreixent*. Anàlogament, si és negatiu, *monòtona decreixent*, i si és no positiu és *monòtona no creixent*.

Una successió monòtona, si és acotada, té límit i si no ho és té límit  $\infty$  o  $-\infty$  en el sentit que tot just hem definit.

## 2.9 Els reals no es poden comptar

En aquest punt voldríem fer notar algunes peculiaritats pel que fa a la definició dels números reals, que els distingeixen força com a conjunt dels naturals, enters i racionals. La primera diferència és que, així com tenim una notació finita pels elements de  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  i  $\mathbb{Q}$ , mitjançant la notació decimal a  $\mathbb{N}$  i  $\mathbb{Z}$  i com  $m/n$  a  $\mathbb{Q}$ , resulta que per a especificar un número real podem necessitar una infinitat de xifres. És cert que donar explícitament un seguit d'una infinitat de xifres està fora de les possibilitats humanes, fins i tot amb l'ajut dels ordinadors. Per tant això se substitueix per donar un procediment, un algorisme (que inclou donar directament el número explícitament quan sigui racional) que ens vagi donant el seguit de xifres d'una manera ben definida. Així, per exemple, com fem amb  $\sqrt{2}$  mitjançant l'algorisme de l'extracció d'arrels quadrades. Igualment podríem definir  $\pi$  mitjançant l'aproximació de l'àrea del cercle per l'àrea de polígons regulars inscrits de nombre de costats creixent. Tot i això, el nombre d'algorismes que podem donar en un temps finit és finit. Els algorismes, els podem ordenar com una successió, indexada pels naturals. Per tant, no podem pretendre tenir definits, en el sentit d'especificats de manera única, més números reals que naturals.

Resulta, però, que no es poden posar tots els reals en una successió! Seguint un argument de fa més de 100 anys, de *Georg Cantor*, suposem que tinguéssim tots els reals més grans que 0 i més petits que 1 en una successió:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.a_{11} a_{12} a_{13} \dots \\ r_2 &= 0.a_{21} a_{22} a_{23} \dots \\ r_3 &= 0.a_{31} a_{32} a_{33} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

on les  $a_{ij}$  són xifres de 0 a 9 i suposem que no hi ha cues infinites de nous (els hem substituït per cues infinites de zeros, tal com dèiem que es podia fer a la secció 2.7).

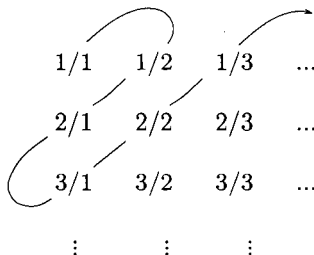
Ara considerem el número real

$$r = 0.b_1b_2b_3\dots,$$

en què  $b_i \neq a_{ii}$  i també diferent de 9. Aquest número no és a la llista, perquè la seva xifra al lloc  $i$  difereix de la de  $r_i$ , i això per a cada  $i$ . Per tant cap llista com aquesta conté tots els reals.

Això vol dir, doncs, que de la llista d'algorismes que poguéssim fer per a definir reals, alguns se n'escapen. De fet, dels treballs de *Cantor* es desprèn que hi ha molts més reals que no es poden especificar, és a dir, *etiquetar*, que reals que sí que es poden especificar.

Per altra banda dels racionals sí que se'n pot fer una successió: n'hi ha prou amb posar-los en quadre, ni que siguin repetits, i indexar-los d'acord amb la trajectòria indicada, saltant-nos aquells que ens anem trobant que ja hem comptat.



D'una manera semblant es pot veure que tots els algorismes finits es poden indexar.

Notem també que entre dos irracionals qualssevol hi ha un racional, i que també entre qualssevol dos racionals hi ha un irracional, encara que hi hagi molts més irracionals que racionals.

## 2.10 Els reals com a punts d'una recta

Els reals resolen el problema de la mesura de la longitud d'un segment de recta en termes d'un altre. Això fa que, si escollim una longitud unitària, podem imaginar-nos els reals com la distància dels punts d'una recta a un de fixat, que seria l'origen dels mesuraments. Portant una mica més enllà el símil, simplement identifiquem cada nombre real amb el punt que dista de l'origen aquest número. Amb això s'aconsegueix trencar la gran dificultat dels grecs. Ja no hi ha divorci entre la geometria i l'aritmètica, i podem identificar números i punts d'una recta. Així, doncs, per a nosaltres serà el mateix parlar del

conjunt  $\mathbb{R}$  i del conjunt de punts d'una recta. Els punts que estan a una banda de l'origen corresponen als reals positius, que denotem per  $\mathbb{R}^+$  i els de l'altra banda als negatius,  $\mathbb{R}^-$ .

En introduir el llenguatge de la geometria parlem d'interval·ls de números reals, que són tots aquells punts (números) que es troben entre altres dos, que són els extrems de l'interval.

Així, per exemple, denotem per  $(a, b)$ , amb  $a < b$ , el conjunt dels números  $x$  tals que  $a < x < b$ , i l'anomenem *interval obert* d'extrems  $a$  i  $b$ .

Similarment per  $[a, b]$  amb  $a < b$  denotem els punts  $x$  tals que  $a \leq x \leq b$  i l'anomenem *interval tancat* d'extrems  $a$  i  $b$ . L'única diferència amb l'anterior és que conté els extrems.

Un *interval infinit obert* seria el conjunt de punts  $x$  tals que  $x > a$  o  $x < a$ , i es denotaria per  $(a, \infty)$  o  $(-\infty, a)$ . Tancat si  $x \geq a$  o  $x \leq a$  i es denota  $[a, \infty)$  o  $(-\infty, a]$ .

També dins del llenguatge geomètric es parla de la *distància entre dos punts* (números)  $x$  i  $y$ , que és igual al valor absolut de la diferència  $x - y$ ,  $|x - y|$ . Si  $a$  i  $b$ ,  $a < b$  són els extrems d'un interval  $I$ , llavors la longitud de l'interval és  $b - a$  i la denotem per  $l(I)$ .

Definim com a *punt mig* d'un interval el punt que dista igualment dels seus dos extrems.

Resulta força convenient la noció d'*entorn* d'un punt, que és qualsevol conjunt de  $\mathbb{R}$  que contingui un interval obert centrat al punt, és a dir, si el punt és  $x$ , llavors un entorn de  $x$  és un conjunt que conté un interval de la forma  $(x - a, x + a)$ , amb  $a > 0$ .

Es diu que un conjunt és *dens* a la recta quan en tot interval obert es poden trobar punts del conjunt o, en altres paraules, quan tot número real és límit d'una successió de números pertanyents al conjunt. Una altra manera de dir-ho és que qualsevol entorn d'un número real conté punts del conjunt.

Una propietat interessant és que tant els racionals com els irracionals són densos a la recta.

Que els racionals són densos a  $\mathbb{R}$  es dedueix immediatament de la definició de reals, que són precisament els aproximables per racionals. Com que entre cada dos racionals hi ha un irracional (vegeu els exercicis), és fàcil veure que també els irracionals són densos a  $\mathbb{R}$ .

Si es té un conjunt de reals, és a dir, un conjunt de punts a la recta, es diu que té una *cota superior* si existeix un real més gran o igual que qualsevol del conjunt. *Mutatis mutandis* es parla d'una *cota inferior*.

En aquesta visió geomètrica dels números com a punts en una recta, els racionals i els enters també hi queden inclosos.

Si es té un conjunt de reals que tingui cota superior, resulta de la completesa de  $\mathbb{R}$  que aquest conjunt també té una *mínima cota superior*, també anomenada *frontera superior*, *extrem superior* o *suprem*. Això vol dir, com el primer nom indica, que hi ha un número real que és més gran o igual que tots els del conjunt i tal que no n'hi ha d'altre amb aquesta propietat que sigui més petit que ell. Així per exemple el conjunt format pels elements de la successió que

hem utilitzat per a definir  $\sqrt{2}$ ; 1, 1.4, 1.42, ... està acotat superiorment, per 1.5 per exemple, i té una mínima cota superior:  $\sqrt{2}$ . Fixem-nos que aquesta propietat no seria certa a  $\mathbb{Q}$ : cada cota superior racional que donéssim no seria mínima, en podríem trobar una altra de més petita. Anàlogament parlariem de la *màxima cota inferior*, anomenada *frontera inferior*, *extrem inferior* o *ínfim*.

Aquesta propietat ens resultarà molt útil més endavant en estudiar les funcions.

## 2.11 Compacitat d'un interval tancat

Una altra propietat que també ens resultarà molt útil és la *compacitat* d'un interval tancat i acotat de  $\mathbb{R}$ . Hi ha força maneres de definir aquesta propietat. En el nostre cas la definirem de dues maneres, que resulten equivalents, i n'utilitzarem l'una o l'altra segons ens sigui convenient.

La primera, la podríem anomenar *propietat de Weierstrass* (important matemàtic de mitjan segle XIX). Ens diu que si tenim un conjunt infinit de punts  $C$  en un interval tancat i acotat  $I$ , llavors hi ha un *punt d'acumulació* de  $C$  contingut a  $I$ , és a dir, un punt  $x$  de  $I$  que és límit d'una successió de punts de  $C$  diferents de  $x$ . (En altres paraules es pot dir que un punt  $x$  és d'acumulació de  $C$  si tot interval obert que contingui  $x$  o, equivalentment, qualsevol entorn de  $x$ , té punts de  $C$  diferents de  $x$ ).

La segona és la *propietat de Heine-Borel* (coneguts matemàtics de final del segle XIX), que diu que si recobrim un interval tancat i acotat  $I$  amb intervals oberts (vol dir que  $I$  està inclòs a la unió dels intervals oberts), sempre podem escollir un nombre finit d'aquests intervals (un subrecobriment finit) que continua recobrint  $I$ .

Notem que aquestes propietats no són certes si  $I$  és un interval obert. Per exemple a  $(0, 1)$  el conjunt de punts  $1/2, 1/4, \dots, 1/2^n, \dots$  és infinit i encara que té un únic punt d'acumulació, el 0, aquest no pertany a  $I$ . També si el recobrim pels intervals  $I_n = (1/n, 1)$ , que són infinits, no podem escollir-ne cap nombre finit d'entre ells que encara el recobreixi.

La demostració d'aquestes propietats, la deixem pels apèndixs.

Quan un conjunt dels reals posseeix qualsevol d'aquestes dues propietats es diu que és *compacte*. Més endavant, quan estudiem algunes nocions de topologia ja donarem una caracterització dels conjunts compactes de la recta.

## 2.12 Exemples

A continuació considerarem tres exemples que il·lustraran la nostra definició de números reals com a límits de successions de números racionals, i utilitzarem diferents tècniques per a determinar-ne la convergència i el grau d'aproximació que obtenim si prenem un terme de la successió com a valor aproximat del número definit com el límit.

1. Les successions definides per

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \text{i} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

convergeixen al mateix número real, que es denota per  $e$ . Per veure-ho, fem el següent:

Aplicant la fórmula del binomi es té que

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{r!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

I, per tant, per a cada  $n$  tenim  $b_n < a_n$ .

Per altra banda, per a qualsevol  $m$  natural tenim que si prenem  $n$  prou gran

$$\begin{aligned} a_m &= 1 + 1 + \dots + \frac{1}{m!} < 1 + 1 + \dots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \\ &\quad \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = b_n \end{aligned}$$

ja que cada un dels primers  $m+1$  termes tendeix a cada un dels sumands de la banda esquerra quan  $n$  tendeix a infinit i el que resta tendeix a quelcom positiu, de fet més gran que  $1/(m+1)!$ .

Queda doncs que per a cada  $m$  podem trobar  $n_0$  tal que si  $n > n_0$  tenim

$$a_m < b_n < a_n.$$

Les dues successions són creixents i acotades, perquè  $r! > 2^{r-1}$  si  $r > 2$  i, per tant,  $a_n < 1 + 1 + 1/2 + \dots + 1/2^{n-1} < 3$ . Això vol dir que convergeixen, i convergeixen al mateix, perquè com que si  $n > m$ ,  $a_n - a_m$  tendeix a 0 quan  $m$  tendeix a infinit, tenim que  $a_n - b_n$  també tendeix a 0 quan  $n$  tendeix a infinit, i, per tant, les dues successions defineixen el mateix número real,  $e$ .

Observem que

$$\begin{aligned} e - a_n &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+k)} \right) \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)^k} \right). \end{aligned}$$

Per tal d'estalviar-nos escriure diversos termes de la suma, resulta convenient la notació que hem utilitzat en parlar de la suma dels primers  $n$  números naturals. D'aquesta manera, el darrer límit l'escrivim

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \frac{1}{(n+1)^j}.$$

Es tracta del límit de la suma dels primers  $k+1$  termes de la *progressió geomètrica* amb terme inicial 1 i raó  $\frac{1}{n+1}$ . Aquesta suma val  $\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n(n+1)^k}$  (vegeu l'exercici sobre la suma d'una progressió geomètrica al final del capítol), i tendeix a  $\frac{n+1}{n}$  quan  $k$  tendeix a  $\infty$ .

Per tant l'error que cometem prenent  $a_n$  com a valor aproximat de  $e$  és més petit que  $\frac{1}{n!n}$ .

D'aquí es pot deduir la *irracionalitat de  $e$* . Si suposem  $e = m/n$ ,  $m$  i  $n$  naturals, tenim que

$$0 < \frac{m}{n} - \left(1 + \dots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!n},$$

i multiplicant per  $n!$ , queda:

$$0 < m(n-1)! - (n! + \dots + 1) < \frac{1}{n},$$

la qual cosa no pot ser: no hi ha cap enter positiu més petit que  $1/n$ .

2. Considerem la successió de racionals definida recursivament per

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right), \quad a_1 = 1.$$

Per veure que  $\{a_n\}$  convergeix utilitzarem directament la definició de successió de Cauchy. Calculem  $|a_m - a_n|$  i veiem que ho podem fer més petit que  $\varepsilon$  si  $m$  i  $n$  són més grans que un cert natural  $N$  que dependrà de  $\varepsilon$ :

Tenim

$$\begin{aligned} a_m - a_n &= \frac{1}{2}(a_{m-1} - a_{n-1}) + \frac{1}{a_{m-1}} - \frac{1}{a_{n-1}} \\ &= \frac{1}{2}(a_{m-1} - a_{n-1}) + \left( \frac{a_{n-1} - a_{m-1}}{a_{n-1} \cdot a_{m-1}} \right) \\ &= (a_{m-1} - a_{n-1}) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_{m-1}} \right). \end{aligned}$$

Per altra banda es veu que  $1 \leq a_n \leq 2$  per inducció: és cert per a  $n = 1$ , i si ho suposem cert per  $a_{n-1}$  tenim

$$1 = \frac{1}{2}(1 + 1) \leq a_n = \frac{1}{2} \left( a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \right) \leq \frac{1}{2}(2 + 2) = 2.$$

D'aquí que  $1/4 \leq 1/a_{n-1}a_{n-1} \leq 1$ , i que, per tant

$$-\frac{1}{2}(a_{m-1} - a_{n-1}) \leq a_m - a_n \leq \frac{1}{4}(a_{m-1} - a_{n-1}),$$

és a dir  $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_{m-1} - a_{n-1}|$ . Iterant,

$$|a_m - a_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_{m-n} - a_1|, \quad (\text{suposant } m > n).$$

Però com que  $a_1 = 1$ , i  $a_{m-n}$  està comprès entre 1 i 2,  $|a_{m-n} - a_1| < 1$ , i resulta que

$$|a_m - a_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

que podem fer més petit que  $\varepsilon$  si  $n$  és prou gran. De fet, si  $N$  és tal que  $\frac{1}{\varepsilon} < 2^{N-1}$ , llavors per a  $n > N$  tenim que  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \varepsilon$ .

Per tant, la successió proposada és de Cauchy i té un límit  $a$  en els reals. Podem calcular aquest límit iterativament, començant a calcular a partir de 1 i el podem aproximar tant com vulguem. A més, tenim un control de l'aproximació, puix sabem que al cap de  $n$  iteracions l'error és ja més petit que  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

Fixem-nos ara en el següent: tenim que la diferència entre  $a$  i  $a_n$  tendeix a zero, és a dir, si  $a_n = a + \delta_n$  tenim que  $\{\delta_n\}$  tendeix a 0. Per tant, de l'expressió recurrent que defineix la successió obtenim

$$a + \delta_n = \frac{1}{2} \left( a + \delta_{n-1} + \frac{2}{a + \delta_{n-1}} \right),$$

i prenent el límit per a  $n \rightarrow \infty$ , tenim

$$a = \frac{1}{2} \left( a + \frac{2}{a} \right),$$

és a dir, que el nostre límit és solució d'aquesta equació, és a dir,  $a = \sqrt{2}$ .

- Un altre exemple interessant ens és proporcionat per la *successió de Fibonacci*, que té la raó dels seus termes successius tendent a un número ben conegut des de l'antiguitat, el *número d'or*.

Com ja hem esmentat abans, aquesta successió ve definida recursivament per l'expressió recurrent

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \text{amb } a_1 = a_2 = 1.$$

Volem veure si existeix el límit de la successió  $\{r_n\}$  amb  $r_n = a_{n-1}/a_n$ , i en cas afirmatiu, volem ser capaços de calcular-lo amb tanta aproximació com vulguem.

Per tal de demostrar la convergència utilitzarem la següent propietat: que existeix un número real  $k$ , més gran que 0 i més petit que 1, tal que per a qualsevol  $n$  tenim  $|r_{n+2} - r_{n+1}| \leq k|r_{n+1} - r_n|$ .

Que tal  $k$  existeix se segueix del fet que, a partir de la definició recursiva de  $a_n$ , tenim que

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}.$$

La condició anterior queda, doncs,

$$\left| 1 + \frac{1}{r_{n+1}} - 1 - \frac{1}{r_n} \right| \leq k|r_{n+1} - r_n|,$$

o bé, fent simplificacions i operacions:

$$|r_{n+1} - r_n| \leq k r_n r_{n+1} |r_{n+1} - r_n|.$$

És a dir, si  $r_n r_{n+1}$  és més gran que un número fixat més gran que 1 per a tota  $n$ , prenent  $k$  com l'invers d'aquest número fixat ja tindrem que es compleix la propietat buscada.

Ara bé, per ser  $\{a_n\}$  creixent, tenim que  $r_n \geq 1$ , i utilitzant això a la fórmula recursiva per  $r_{n+1}$ , tenim  $r_{n+1} \leq 1 + \frac{1}{1} = 2$ , que també es compleix per  $r$ . Tenim doncs que

$$r_{n+1} \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \text{per a tota } n.$$

D'aquí que  $r_n r_{n+1} \geq \frac{3}{2}$ , i per tant, prenent  $k = \frac{2}{3}$ , ja hem trobat que es compleix la propietat cercada.

A partir de l'existència d'aquesta  $k$ , mostrarem que la successió és de Cauchy. Per això prenem dos termes  $r_n$  i  $r_{n+p}$  de la successió, i mostrem que si prenem  $n$  prou gran ( $n > n_0$ ), per a qualsevol  $p$  podem fer  $|r_{n+p} - r_n|$  tan petit com vulguem ( $< \varepsilon$ ). Efectivament, tenim

$$\begin{aligned} |r_{n+p} - r_n| &\leq |r_{n+p} - r_{n+p-1}| + \dots + |r_{n+1} - r_n| \\ &\leq k (|r_{n+p-1} - r_{n+p-2}| + \dots + |r_n - r_{n-1}|) \leq (\text{repetint}) \\ &\leq k^{n-1} (|r_{p+1} - r_p| + \dots + |r_2 - r_1|). \end{aligned}$$



I ara, com que  $|r_{m+1} - r_m| \leq k^{m-1}|r_2 - r_1|$ , queda

$$|r_{n+p} - r_n| \leq k^{n-1}(k^{p-1} + \dots + 1)|r_2 - r_1| \leq \frac{k^{n-1}}{1-k}|r_2 - r_1|,$$

on hem utilitzat que la suma de la progressió geomètrica  $1 + \dots + k^{p-1}$  és sempre més petita que  $\frac{1}{1-k}$  (inclòs als exercicis al final del capítol).

Per tant,  $\{r_n\}$  tendeix a un número real,  $r$ . D'una manera semblant a com hem fet a l'exemple anterior, tenim que  $r$  ha de complir

$$r = 1 + \frac{1}{r},$$

és a dir

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

que té per arrels  $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . D'aquestes només és acceptable la positiva:

$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Aquest número és conegut des de l'antiguitat clàssica com el

número d'or. Si tenim l'interval  $[a, c]$  i  $b \in (a, c)$ , llavors si  $\frac{c-a}{b-a} = \frac{b-a}{c-b}$ ,

resulta que  $\frac{c-a}{b-a} = r$ . Es diu que  $b$  divideix l'interval  $[a, c]$  segons la *secció àuria*.

## Exercicis i problemes

1. Demostreu per inducció les fórmules:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = n^2(n+1)^2/4 \quad (\text{Al-Karhi, s. XII})$$

(El principi d'inducció, però, no ens permet de trobar quina és la fórmula que volem demostrar! És interessant intentar deduir les fórmules directament).

2. Els egipcis escrivien els números fraccionaris com a suma de fraccions unitàries. Més precisament, suposant  $p < q$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  posaven

$$p/q = 1/q_1 + 1/q_2 + \dots + 1/q_n, \quad \text{amb } q_{i+1} > q_i.$$

Per exemple tenim

$$7/29 = 1/6 + 1/24 + 1/58 + 1/87 + 1/232,$$

i també igual a  $1/5 + 1/29 + 1/145$ .

Dissenyeu un algorisme per a escriure una fracció d'aquesta manera.

3. Prepareu un programa d'ordinador per canviar l'expressió d'un número natural de base  $a$  a base  $b$ .

Recordem que en base  $a$ , un número natural  $n \in \mathbb{N}$  s'escriu  $n = n_k n_{k-1} \dots n_1 n_0$ , significant  $n = n_k a^k + n_{k-1} a^{k-1} + \dots + n_1 a + n_0$ , on  $n_i$  són números entre 0 i  $a - 1$ , anomenats *xifres*.

Com ho modifiquem per als reals?

4. Demostreu per inducció la fórmula del binomi de Newton. Per  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  es té

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + b^n \\ &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r. \end{aligned}$$

Aquí els números  $\binom{n}{r}$  que valen  $\frac{n!}{(n-r)!r!}$  per a  $r = 1, \dots, n$  (recordem que  $r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r$  i  $0! = 1$ ) s'anomenen els *coeficients binomials* i corresponen al nombre de combinacions que es poden fer amb  $n$  elements prenent-los de  $r$  en  $r$ .

5. Si  $a$ ,  $b$  són dos números reals, volem saber quantes xifres decimals fraccionàries (és a dir, després de la coma o el punt que indica la part entera) hem de prendre de cada un, per assegurar que el resultat de la suma tingui  $n$  xifres decimals correctes, és a dir, les mateixes que les del número real suma de  $a$  i  $b$ . El mateix per a la multiplicació.
6. Prepareu un programa d'ordinador que extregui arrels quadrades utilitzant  $\sqrt{c} = \lim\{a_n\}$ ,  $a_n = \frac{1}{2} \left( a_{n-1} + \frac{c}{a_{n-1}} \right)$ , amb  $n$  xifres decimals correctes.
7. El número  $\pi$ , que representa la relació entre l'àrea d'un cercle i el quadrat del seu radi, es pot calcular inscrivint polígons regulars en el cercle amb un nombre de costats cada cop més gran. Doneu la successió definidora que s'obté inscrivint i circumscrivint polígons regulars de  $2^n$  costats i utilitzeu-la per a calcular  $\pi$  amb 5 xifres decimals.
8. Encara que ja hem fet veure, utilitzant un argument de Cantor, que hi ha més números reals irracionals que racionals, resulta que entre cada dos irracionals hi ha un racional i entre cada dos racionals un irracional. Demostreu-ho.
9. Demostreu que  $\sqrt{p}$ ,  $p$  primer, és irracional (Teètet, s. IV aC, ho va fer per  $p$  fins a 17).
10. Demostreu que si  $a \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a < 1$ , llavors la successió  $\{a^n\}$  tendeix a 0.
11. Demostreu que la suma de la *progressió geomètrica* amb *terme inicial*  $a$  i *raó*  $r$ , que designem per  $s_n = \sum_{k=0}^n ar^k$ , val  $a(1 - r^{n+1})/(1 - r)$ . Feu veure que si  $|r| < 1$ , llavors  $\lim\{s_n\}$  existeix i val  $a/(1 - r)$ . Aquest límit s'anomena la *sèrie geomètrica* amb terme inicial  $a$  i raó  $r$ , i es designa per  $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$ .
12. Comproveu que el terme general de la successió de Fibonacci és donat per

$$x_n = ((1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n) / 2^n \sqrt{5}.$$

13. Donats  $n$  números reals  $a_1, \dots, a_n$ , en definim les mitjanes harmònica, geomètrica i aritmètica per

$$1/H = \left( \sum 1/a_i \right) / n, \quad G = \sqrt[n]{\prod a_i}, \quad A = \left( \sum a_i \right) / n.$$

Demostreu que  $H \leq G \leq A$ .

## Apèndixs

### 1. La propietat de Weierstrass

Si  $C$  és un conjunt infinit de punts d'un interval tancat  $I$  dels reals, llavors hi ha un punt  $x$  d'acumulació de  $C$  a  $I$ , és a dir, tot entorn de  $x$  conté una infinitat de punts de  $C$ .

Demostració:

Dividim  $I = [a, b]$  en dos intervals tancats pel seu punt mitjà. Un dels dos, diguem-ne  $I_1$ , contindrà un nombre infinit de punts de  $C$ . Dividim-lo en dos pel seu punt mitjà. Un dels dos intervals resultants, diguem-ne  $I_2$ , contindrà un nombre infinit de punts de  $C$ . Repetim el procés i anem obtenint una successió d'intervals  $I_n = [a_n, b_n]$  de longituds tendents a 0 i tots ells contenint una infinitat de punts. Com que  $\{a_n\}$  és una successió no decreixent i acotada convergeix a un punt  $x$  de  $I$ , que és el mateix al qual convergeix  $\{b_n\}$ , no creixent i acotada. Aquest punt és d'acumulació, ja que tot interval obert que el contingui conté una infinitat de punts de  $C$ , en contenir l'interval  $I_n$  a partir de certa  $n$ . Notem que  $x$  no necessita pertànyer a  $C$ .

### 2. La propietat de Heine-Borel

Si un conjunt d'intervals oberts a  $\mathbb{R}$  recobreixen l'interval tancat i acotat  $I = [a, b]$ , llavors un nombre finit d'aquests intervals també el recobreixen.

Demostració:

Suposem el contrari: que no hi ha un subrecobriment finit. Dividim  $I$  en dos intervals tancats pel seu punt mitjà. Almenys un d'ells,  $I_1$ , no admet un subrecobriment finit. Anem repetint el procediment i obtenim una successió d'intervals tancats  $I_n = [a_n, b_n]$  de longituds tendent a 0, i cap d'ells admetent un subrecobriment finit. Sigui  $x$  el punt límit dels extrems dels intervals  $I_n$  ( $\{a_n\}$  és no decreixent i  $\{b_n\}$  no creixent, i acotades). Com que  $x$  pertany a algun interval del recobriment, que és obert, hi haurà un interval  $I_x$  centrat a  $x$  i contingut a algun interval del recobriment. A partir de certa  $n$ ,  $I_n$  estarà contingut a  $I_x$ , o sigui que sí que  $I_n$  admet un subrecobriment finit. Per tant és absurda la nostra presumpció que no hi havia cap subrecobriment finit de  $I$ .

### 3. Cardinalitat dels conjunts

El *número cardinal* d'un conjunt és la classe d'equivalència dels conjunts que es poden posar en correspondència biunívoca amb ell. També s'anomena el *nombre d'elements* del conjunt.

Un conjunt es diu finit si no es pot posar en correspondència biunívoca amb cap part pròpia del conjunt (és a dir, diferent del mateix conjunt). Els números cardinals dels conjunts finits són precisament els números naturals (es pot prendre això com una definició i veure després que se satisfan els axiomes de Peano).

El conjunt dels números naturals,  $\mathbb{N}$ , és infinit. La seva cardinalitat es denota per  $\aleph_0$  (alef sub zero). Els conjunts que tenen el mateix cardinal que  $\mathbb{N}$  s'anomenen *numerables* o *denombrables*. Ja hem vist al text que els números racionals ho són, de denombrables, mentre que els reals no.

Es diu que un cardinal és més gran que un altre si un conjunt representant els segons no es pot posar en correspondència biunívoca amb un conjunt representant el primer, però sí amb un dels seus subconjunts. Es poden obtenir cardinals més i més grans mitjançant el següent procediment: suposem que un cert conjunt  $A$  té cardinal  $C(A)$ . Considerem ara el conjunt  $B$ , els elements del qual són els subconjunts de  $A$ . Una manera d'identificar un subconjunt de  $A$  és assignar el número 1 als elements de  $A$  que hi pertanyen, i 0 als que no hi pertanyen. Així, doncs, podem concebre un subconjunt de  $A$  com una aplicació de  $\{0, 1\}$  a  $A$ , és a dir, una mena de successió de zeros i uns indexada pels elements de  $A$ . Seguint l'argument de *Cantor* utilitzat més amunt per mostrar que no es poden numerar els reals, podem veure que la cardinalitat d'aquest conjunt d'aplicacions és més gran que la de  $A$ .

Efectivament suposem que hi ha tal correspondència biunívoca i hem fet correspondre una de tals aplicacions a cada element de  $A$ . Prenem ara una aplicació que difereixi de la corresponent a cada element  $a$  de  $A$  en el lloc d'aquest mateix element (canviant el 0 en 1 o viceversa). Aquesta aplicació no correspon a cap element de  $A$ , contradicció. El conjunt de subconjunts de  $A$  se sol denotar per  $2^A$ , i el seu cardinal per  $2^{C(A)}$ .

Quan el conjunt  $A$  és finit això correspon a la nostra idea habitual i el cardinal de les parts de  $A$  és efectivament  $2^{C(A)}$ .

#### 4. Conjunts oberts i tancats de $\mathbb{R}$

Un *conjunt obert* de  $\mathbb{R}$  és aquell que, si conté un punt  $x$ , llavors conté un entorn de  $x$  o, equivalentment, conté tot un interval centrat a  $x$ , és a dir, existeix un real positiu  $\varepsilon$ , de manera que l'interval  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  està contingut en el conjunt.

En particular es veu que un interval obert és obert en aquest sentit, mentre que un de tancat, diguem  $[a, b]$ , no ho és, perquè estant  $a$  a l'interval, no existeix cap  $\varepsilon$  positiva que faci que l'interval  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  hi sigui.

Com que qualsevol interval obert conté números racionals, i aquests són numerables, resulta que un conjunt obert  $A$  és unió numerable d'intervals oberts, és a dir,  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ , on els  $I_i$  són intervals oberts que no s'intersequen mútuament, entre els quals se'n poden comptar al màxim dos de no acotats, és a dir, del tipus  $(-\infty, a)$  o  $(a, \infty)$ .

Un *conjunt tancat* és aquell que té per complement un conjunt obert. L'estructura dels conjunts tancats de  $\mathbb{R}$  és molt més complicada que la dels oberts. No és cert que, per exemple, sigui unió denombrable d'intervals tancats. Observem que un interval tancat és tancat en aquest sentit, ja que el seu complement és unió d'intervals oberts.

El conjunt buit és tancat, puix que el seu complement és tot  $\mathbb{R}$ , que és obert. Per conveniència també se'l considera obert, de manera que  $\mathbb{R}$  és també tancat.

## 5. Mesura d'un conjunt de $\mathbb{R}$

Per als intervals acotats de  $\mathbb{R}$ , siguin aquests oberts,  $I = (a, b)$ , o tancats,  $I = [a, b]$ , definim la seva longitud o *mesura* com  $l(I) = b - a$ . Aquesta mesura és un real positiu o nul. A un interval no acotat, del tipus  $(a, \infty)$ , diguem, li associem la mesura “infinita”, que no és cap número real, sinó tan sols una manera de parlar que vol dir que conté intervals de longitud tan gran com vulguem.

Per altres conjunts volem definir una mesura que, igual que la longitud, sigui invariant respecte de translacions (és a dir, que sigui la mateixa pel conjunt obtingut sumant un número fixat a tots els elements del conjunt original), i que també sigui additiva, és a dir, que si tenim un conjunt descompost en subconjunts sense intersecció mútua, llavors la seva mesura sigui la suma de les mesures de les seves parts, almenys quan el nombre d'aquest sigui finit (en el cas d'un nombre infinit de parts, haurem de demanar que siguin numerables i definir la suma com el límit de la successió de les sumes parcials, que existeix, si permetem l'infinit, com veurem en un capítol posterior en parlar de la suma de sèries).

Resulta que una tal mesura no és possible (almenys segons la teoria de conjunts generalment acceptada): sempre hi haurà conjunts de  $\mathbb{R}$  que no seran mesurables. Es pot, però, definir la mesura per una part important de conjunts de  $\mathbb{R}$ , de manera que permet desenvolupar l'anàlisi matemàtica d'una manera que ha provat ser fèrtil i útil.

La manera de definir la mesura d'un conjunt és la següent: si el conjunt és obert llavors és unió d'una col·lecció numerable d'intervals oberts mútuament disjunts (quan diem numerable incloem la possibilitat que siguin en nombre finit). Definim doncs la seva mesura com la suma (possiblement infinita) de les seves longituds, és a dir,

$$\text{mes}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i),$$

on s'entén que això vol dir el límit de la suma des de  $i = 1$  fins a  $i = n$  quan  $n$  tendeix a  $\infty$ . Aquesta suma és independent de l'ordre en què hem numerat els intervals, sempre que hi entrin tots. En particular si el conjunt obert és acotat aquesta mesura serà necessàriament un real (finit). Podria no ser-ho. Per exemple el conjunt format pels intervals  $\{(2^n - 1, 2^n)$ , per tot  $n \in \mathbb{N}\}$  és obert, no és acotat, i té mesura “infinita”. En canvi el conjunt  $\{(2^n - 2^{-n}, 2^n)$  per tot  $n \in \mathbb{N}\}$  no és acotat però té mesura finita igual a 1.

Si el conjunt és tancat la definició de mesura és una mica més complicada. Si és acotat es considera un interval acotat obert que el contingui i es defineix la seva mesura com la longitud d'aquest interval menys la mesura del complement del nostre tancat a l'interval, que és obert. Si no és acotat, llavors fem el

mateix amb la intersecció  $C_n$  del nostre conjunt tancat  $C$  amb els intervals tancats  $[-n, n]$ . Definim llavors la mesura de  $C$  com el límit de  $\text{mes}(C_n)$  quan  $n$  tendeix a  $\infty$ .

Finalment, si un conjunt  $C$  no és ni obert ni tancat, definim una *mesura exterior* com la frontera inferior de les mesures dels conjunts oberts que el contenen, i la *mesura interior* com la frontera superior de la mesura dels tancats que hi són continguts. Si coincideixen diem que  $C$  és mesurable, i el valor comú és la seva *mesura*.

## 6. El conjunt ternari de Cantor

Un interessant subconjunt dels números reals s'obté de la següent manera:

Prenem l'interval tancat  $I = [0, 1]$  i li traiem l'interval obert  $(1/3, 2/3)$ . Ens queden dos intervals tancats:  $[0, 1/3]$  i  $[2/3, 1]$ . A cada un d'aquests fem una cosa anàloga a la que hem fet abans, és a dir, li traiem el terç del mig (deixant els extrems). D'aquesta manera obtenim una successió de conjunts formats per intervals tancats. Així tenim que al pas número  $m$  hem tret de l'interval  $I$  tots els intervals oberts de la forma  $(3k - 2/3^m, 3k - 1/3^m)$ , per  $k$  natural amb  $3k < 3^m + 1$ , quedant un conjunt  $C_m$ . El *conjunt de Cantor*  $C$  és la intersecció d'aquests conjunts:  $C = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m$ .

Aquest conjunt és interessant en diversos aspectes. Per començar és tancat, puix que el seu complement és obert: la unió (numerable) dels intervals oberts que hem anat traient del mig dels intervals que van quedant. Resulta que no conté cap interval: l'hem anat trossejant de tal manera que sempre entre dos punts donats diferents,  $a$  i  $b$ , hi haurà un interval dels que hem tret.

Per altra banda la seva mesura és 0. Efectivament, al pas número  $n$  hem tret intervals oberts amb una suma de longituds donada per  $\sum_{m=1}^n \frac{2^{m-1}}{3^m}$ , que té per límit 1 quan  $n$  tendeix a  $\infty$  (és una progressió geomètrica amb primer element  $1/3$  i raó  $2/3$ ).

Finalment notem que és un conjunt amb una quantitat no numerable de números reals. Efectivament, si escrivim els números de l'interval  $[0, 1]$  en base 3, veiem que el conjunt de Cantor està format per aquells números que en la seva expressió en aquesta base (ternària) no necessiten la xifra 1 per a ser escrits. En altres paraules, els elements de  $C$  són totes les expressions infinites que es poden escriure amb zeros i dosos, per exemple  $1/3 = 0.1000\dots = 0.0222\dots = 0.0\hat{2}$ . Pel mateix argument que hem fet servir per veure que els reals no són numerables, veiem que els elements de  $C$  tampoc no ho són.

## 7. Números algebraics i transcendentals

Un número real és algebraic si és el zero d'algun polinomi de coeficients enters, és a dir,  $x$  és algebraic si  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$  per alguna  $n \in \mathbb{N}$  i per  $a_i \in \mathbb{Z}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Per exemple  $\sqrt{2}$  és un número algebraic de grau dos, corresponent al polinomi  $-2 + x^2$ .

No tots els números reals són algebraics. Això es pot veure perquè els números reals no són numerables, mentre que els algebraics sí. Que són numerables es pot demostrar ordenant els polinomis i les seves arrels de manera que no ens en deixem cap.

A pesar que d'acord amb aquest criteri conjuntista hi ha molts més transcendents que algebraics, resulta prou difícil mostrar-ne algun. La demostració de la transcendència de  $e$  és complicada, però abastable pel nivell de la matemàtica d'aquest llibre (la primera demostració va ser feta per *Hermite* el 1873). La transcendència de  $\pi$  és una mica més difícil de demostrar, i no ho va ser fins el 1882 per *Lindemann*, que d'aquesta manera demostrava la impossibilitat de quadrar el cercle amb regle i compàs!

Els primers números transcendents coneguts foren els anomenats de *Liouville*. Aquests s'obtenen observant que els transcendents són precisament aquells números que es poden aproximar més ràpidament per successions de racionals, en cert sentit, és clar. O, dit d'altra manera, que els algebraics no es poden aproximar massa bé per racionals. De fet es té la desigualtat de *Liouville* (1809-1892): si  $\alpha$  és un número algebraic d'ordre  $n$ , llavors existeix  $c$  tal que per qualsevol racional  $p/q$  es té que  $|\alpha - p/q| > c/q^n$ .

Amb l'ajut d'això és fàcil veure que el número  $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} 1/10^{i!}$ , per exemple, és transcendent.

Efectivament, si prenem els racionals  $\sum_{i=1}^m 1/10^{i!}$ , veiem que la diferència amb  $\alpha$  és  $\sum_{i=m+1}^{\infty} 1/10^{i!}$  que és més petit que  $2/10^{m!}(10^{m!})^m$ . La  $q$  corresponent és  $10^{m!}$ . D'acord amb la desigualtat, perquè  $\alpha$  fos algebraic caldria que per a tot valor de  $m$ ,  $2/10^{m!}(10^{m!})^m$  fos més gran que  $c/(10^{m!})^n$  per alguna  $c > 0$  i alguna  $n$  fixada. Certament això no és possible.

D'aquesta manera es pot veure que els números definits per successions que convergeixen molt ràpidament són transcendents.

La demostració de la desigualtat, la deixem per a un apèndix del capítol següent.

## 8. El teorema fonamental de l'aritmètica

Ja als *Elements d'Euclides* del segle IV aC es demostren unes quantes proposicions sobre els números naturals i els seus factors primers (recordem que un número primer és aquell que no és divisible més que per 1 i per ell mateix). En particular, al llibre VII demostra:

- 30.** Si un número primer divideix el producte de dos números, llavors en divideix almenys un d'ells.
- 31.** Tot número compost (és a dir, producte d'altres dos números diferents de 1) conté un divisor primer.

La demostració de la primera proposició la fa *Euclides*, fent veure, a la proposició prèvia **24**, que si dos números no contenen factors primers en comú amb un tercer, llavors el seu producte tampoc en té.



Efectivament, suposem que ni  $A$  ni  $B$  tenen algun factor comú amb  $G$ . Si  $AB = D$  i  $G$  tenen algun factor en comú, diguem  $E$ , aquest darrer no conté factor comú amb  $A$  (si no  $A$  i  $G$  tindrien aquest factor comú). Resulta doncs que  $D = EZ = AB$ , la qual cosa implica que  $E/A = B/Z$ . Com que  $E$  i  $A$  no tenen factors en comú, resulta que  $E$  divideix a  $B$  i  $A$  divideix a  $Z$ . D'aquí se segueix que  $B$  i  $G$  tenen en comú el factor  $E$ , en contra de la hipòtesi. Per tant  $D$  i  $G$  no poden tenir factor comú.

La demostració de la proposició **31** és més senzilla: si un número és compost, podem anar-lo dividint successivament pels seus factors, i com que només hi ha un nombre finit de números més petits que ell, en algun moment ens trobem que el que queda és primer.

D'aquestes dues proposicions és fàcil deduir el *teorema fonamental de l'aritmètica*:

*Tot número natural es pot expressar de manera única com a producte de números primers.*

Efectivament, utilitzant **31** podem anar dividint per factors primers fins que el número queda expressat com a producte d'aquests. Que la factorització és única se segueix immediatament de **30**.

Aquesta descomposició es pot denotar per

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k},$$

on  $p_i$  són primers i  $\alpha_i$  són naturals.

## 9. L'estructura algebraica de $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$

Algebraicament els naturals  $\mathbb{N}$  formen un *semigrup additiu*. És a dir, és un conjunt munit d'una operació, l'addició, que satisfà la condició d'*associativitat*:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad a, b, c \in \mathbb{N}.$$

A més el semigrup és *commutatiu*:  $ab = ba$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ .

També tenen l'operació de multiplicació, respecte de la qual també és un semigrup, també és commutatiu i a més hi ha una identitat, l'1.

$$\begin{aligned} (ab)c &= a(bc) \\ ab &= ba \\ 1.a &= a \end{aligned}$$

Les dues operacions estan relacionades per la distributivitat:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

A més hi ha una relació d'ordre compatible amb les operacions.

Els enters  $\mathbb{Z}$  ja tenen una estructura que té tota ella un nom: formen un *anell commutatiu*, i més encara, un *domini d'integritat*.

A l'estructura additiva, a més de l'associativitat i la commutativitat dels naturals, s'ha afegit el 0, tal que  $0+a = a$ , i els elements inversos:  $(-a)+a = 0$ . Amb aquestes quatre propietats formen el que s'anomena un *grup abelià*.

L'estructura multiplicativa és la mateixa que per  $\mathbb{N}$ : associativitat, commutativitat, element idèntic i distributivitat amb l'addició.

Es té també una relació d'ordre.

A  $\mathbb{Q}$  s'afegeix l'existència d'invers respecte de la multiplicació, exceptuant el 0, és clar.

D'aquesta manera tenim el que s'anomena un *cos*.

És un grup abelià respecte de la suma i, traient el 0, un grup abelià respecte de la multiplicació, que és distributiva respecte de l'addició. També es preserva la relació d'ordre.

A  $\mathbb{R}$  s'introdueix un element nou que no és algebraic, la completa. D'aquesta manera  $\mathbb{R}$  resulta ser un cos ordenat, arquimedià i complet. Arquimedià vol dir que donats qualssevol dos reals positius, es pot trobar un natural que multiplicat per un d'ells doni un número més gran que l'altre. Aquesta caracterització té la propietat d'unicitat respecte d'isomorfismes: no hi ha més que un cos amb aquestes propietats: els reals o quelcom d'isomorf.

## 10. Els números complexos

En intentar trobar les arrels d'equacions algebraiques, els matemàtics de l'antiguitat es van trobar amb casos sense solució. Per exemple  $x^2 + ax + b = 0$  resulta no tenir cap solució si  $a^2 - 4b < 0$ , com passa, per exemple, amb  $x^2 + 1 = 0$ . Això va ser admès sense problemes. Per què havia de tenir solució tota equació? La qüestió, però, va preocupar durant el Renaixement, quan *Dal Ferro*, *Tartaglia*, *Cardano* i *Ferrari* donen les fórmules per resoldre, mitjançant radicals, les equacions algebraiques de 3<sup>er</sup> i 4<sup>art</sup> grau. Una equació cúbica, diguem  $x^3 + ax + b = 0$ , té les solucions donades en termes de les arrels cúbiques de  $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} \pm \frac{b}{2}$ . Si  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$ , vol dir que  $a < 0$ , i llavors l'equació té per solucions tres números reals diferents. Com podia ser que aquests números reals s'expressessin en termes d'arrels quadrades de números negatius?

Admetre aquest fet va forçar l'acceptació d'aquestes arrels quadrades. *Bombelli*, al segle XVI, va ser dels primers a donar-los nom i utilitzar-les. Una mica abans d'ell, *Cardano* ja considerava, en resoldre el sistema d'equacions  $x + y = 10$ ,  $xy = 40$ , els valors  $x = 5 + \sqrt{-15}$ ,  $y = 5 - \sqrt{-15}$  com a solucions, perquè satisfien les equacions si s'operava amb ells formalment.

Per resoldre aquesta situació el que fem és considerar un nou tipus de números, anomenats *números complexos*, que escrivim com  $a + b\sqrt{-1}$ , amb  $a$  i  $b$  reals, i operem amb ells segons les regles formals de l'àlgebra, de manera que  $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ . Per tal de simplificar la notació posem  $\sqrt{-1} = i$ .

Per la suma i la multiplicació d'aquests números obtenim

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i\end{aligned}$$

Per dividir per  $a + bi$ , multipliquem pel seu invers multiplicatiu, que val  $1/(a + bi) = a_1 + b_1i$ , on, de  $a_1a - b_1b = 1$  i  $a_1b + b_1a = 0$ , obtenim  $a_1 = a/(a^2 + b^2)$ ,  $b_1 = -b/(a^2 + b^2)$ .

Donat el número complex  $c = a + bi$ , n'anomenem *part real* el número real  $a$ , i *part imaginària* el número real  $b$ . Un número complex de la forma  $(a, 0)$ , s'identifica amb el número real  $a$ .

Un número complex amb part real zero i part imaginària diferent de 0, s'anomena *número imaginari*.

El *teorema fonamental de l'àlgebra*, demostrat per *Gauss* al segle passat, ens diu que tot polinomi, és a dir, tota expressió de la fórmula  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ , s'anulla per algun valor complex de  $x$ . Això fa que  $P(x)$  es pugui expressar com a producte d'expressions de la forma  $x - \alpha_k$  amb  $\alpha_k$  complex. En particular, tenim que  $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ .

Així com representem els números reals com els punts de la recta, els números complexos els representem com els punts del pla. Al número complex  $a + bi$  li associem el punt de coordenades  $(a, b)$ . (De fet concebem el pla com el conjunt de parelles ordenades de números reals  $(a, b)$ , amb un concepte de distància donat pel teorema de Pitàgores: distància entre els punts  $(a, b)$  i  $(c, d)$ , donada per  $d((a, b), (c, d)) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$ ). El conjunt dels números complexos el denotem per  $\mathbb{C}$ .

La distància del punt del pla corresponent al número complex  $c = a + bi$ , a l'origen del pla, és a dir, el punt  $(0, 0)$ , se l'anomena *mòdul* de  $c$ , i es denota per  $|c|$ . Tenim així que  $|c| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . En el cas que  $c$  sigui real, és a dir, que  $b$  sigui 0, el mòdul és el valor absolut de  $c$ .

La distància entre dos punts del pla corresponents a dos números complexos  $c_1 = a_1 + b_1i$  i  $c_2 = a_2 + b_2i$ , és el mòdul de la diferència d'aquests dos números:  $|c_2 - c_1| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$ .

Observem que es verifica l'anomenada *desigualtat del triangle*: si  $a, b$  i  $c$  són números complexos, llavors  $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$ , o, en una altra versió equivalent,  $|c_1 + c_2| \leq |c_1| + |c_2|$ , fent  $c_1 = a - b$  i  $c_2 = b - c$ .

La veritat d'aquesta darrera desigualtat, amb  $c_1 = a_1 + b_1i$ ,  $c_2 = a_2 + b_2i$ , queda establerta per la següent cadena de desigualtats equivalents

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Elevant al quadrat i simplificant

$$a_1a_2 + b_1b_2 \leq \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Tornant a elevar al quadrat, simplificant i passant tots els termes a la banda dreta:

$$0 \leq (a_1b_2 + b_1a_2)^2,$$

que certament es compleix.

A  $\mathbb{C}$ , que identifiquem amb el pla, definim el *disc obert de radi  $r$  centrat a  $c_0$*  com el conjunt dels complexos que disten de  $c$  (els punts del pla corresponent) menys que  $r$ . Utilitzem la notació  $D(c_0, r) = \{c \in \mathbb{C} : |c - c_0| < r\}$ .

Aquest concepte generalitza el concepte d'interval centrat en un punt en els números reals. Un *disc tancat* es defineix anàlogament posant  $\leq$  en lloc de  $<$ .

Algebraicament el conjunt  $\mathbb{C}$  dels números complexos amb les seves operacions de suma, multiplicació i divisió constitueix un cos algebraic, que, a diferència dels reals  $\mathbb{R}$ , no està ordenat.

Utilitzant el mòdul, es defineix la convergència de successions de complexos. Així, diem que la successió infinita  $\{c_n\}$  tendeix a  $c$  o té per límit  $c$ , si per cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , existeix  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > n_0$ , llavors  $|c - c_n| < \varepsilon$ . Ho denotem també per  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{c_n\} = c$  o bé  $c_n \rightarrow c$  quan  $n \rightarrow \infty$ .

Una *successió de Cauchy*  $\{c_n\}$  és aquella que, per cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , existeix  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n, m > n_0$ , llavors  $|c_n - c_m| < \varepsilon$ .

Com en el cas dels reals (de fet perquè podem considerar per separat les successions de les parts reals i de les parts imaginàries), una successió és convergent si i sols si és de Cauchy. És a dir, els complexos són mètricament complets.

Amb els complexos s'ha guanyat, a més, la completesa algebraica: tots els polinomis tenen zeros complexos.

## Capítol 3

# Funcions, derivades i integrals

### 3.1 Introducció històrica

La descripció de les formes dels ens geomètrics a l'antiguitat clàssica es feia mitjançant polígons, políedres, cercles, cilindres, cons i còniques (el·lipses, paràboles i hipèrboles). Aquestes formes es definien fent servir la intuïció geomètrica del moment: segments de recta limitaven polígons i polígons limitaven cossos. Les còniques eren obtingudes mitjançant seccions d'un con per un pla. En un dels estudis més ambiciosos d'aquells temps, el de l'estabilitat de l'equilibri dels cossos flotants, *Arquimedes* recorre als paraboloides de revolució per a definir la forma de les seves naus.

També van descriure altres formes utilitzant la cinemàtica: *Arquimedes* defineix l'espiral que porta el seu nom fent que un punt s'allunyi del centre amb velocitat uniforme sobre un radi que gira també uniformement. El moviment dels planetes fou descrit fa 2000 anys per *Apol·loni*, *Hiparc* i *Ptolemeu* utilitzant moviments circulars i uniformes sobreposats: el planeta es movia sobre un cercle centrat en un punt que al seu torn seguia un cercle centrat a la Terra (epicicle i deferent).

Aquesta visió de regle i compàs és la que va imperar a les cultures matemàtiques fins ja ben entrada l'edat mitjana. Potser va ser l'escola dels calculadors d'Oxford la que inicià una nova etapa en la descripció geomètrica dels fenòmens naturals: van introduir la regla del *Merton College*, que descrivia el moviment uniformement accelerat mitjançant una gràfica rectilínia, en què en la direcció horitzontal es mesurava el temps i en la vertical, la velocitat. L'àrea dins del triangle o trapezi format corresponia a l'espai recorregut i era igual a l'àrea del rectangle de la mateixa base i d'altura la mitjana, és a dir, l'espai recorregut era el mateix si el moviment era uniforme amb velocitat igual a la mitjana. És el primer exemple d'una gràfica relacionant dues magnituds de gènere diferent. Aquesta manera de descriure el moviment és també utilitzada per *Nicolas Oresme* a París (s. XIV) i molt més tard per *Galileu* als seus *Discorsi*.

Un dels exemples més interessants de la utilització de la cinemàtica per a

descriure un ens matemàtic és la que fa *Napier* per a definir el seu logaritme (que havia de facilitar els càlculs astronòmics), al començament del segle XVII: Un punt es mou sobre un segment de recta començant en un extrem i dirigint-se cap a l'altre amb una velocitat proporcional a la distància que li falta per arribar-hi. Un altre punt es mou sobre una semirecta infinita, començant pel seu extrem, sempre amb velocitat uniforme igual a la inicial del primer punt. El *logaritme de Napier* de la distància recorreguda per la primera partícula és igual a la distància recorreguda per la segona. Aquest logaritme no és el mateix logaritme *neperià* o natural que utilitzem avui, però hi està força relacionat.

L'adveniment de l'àlgebra de l'Índia i dels àrabs a l'Europa del Renaixement va produir canvis molt importants en la descripció d'entitats geomètriques. Ja l'alexandri *Pappos* havia parlat de *llocs geomètrics* del pla definits mitjançant les relacions dels productes de les distàncies dels punts d'aquest *lloc* a tres, quatre o més rectes. (Encara que sembla probable que *Apolloni* ho hagués tractat sis segles abans que ell). En els casos descrits a l'antiguitat es tracta de llocs molt senzills: rectes, cercles i còniques, però l'important és que ja es feia una descripció d'un ens geomètric utilitzant condicions de relacions entre magnituds (no ben bé números!). Aquest problema va passar a Europa i va ser *Descartes* al començament del segle XVII qui el va posar en solfa: va crear la geometria analítica, que descriu corbes basant-se en relacions entre els números que representen distàncies a rectes de referència. D'aquesta manera es poden resoldre problemes geomètrics mitjançant l'àlgebra i també s'obté una visió dels problemes algebraics mitjançant la geometria (les solucions d'equacions simultànies són la intersecció de dues corbes descrites per aquestes equacions, per exemple). A la visió de *Descartes* totes les corbes són algebraiques, és a dir, estan definides per relacions on s'utilitzen només les operacions algebraiques (resolució de polinomis). Naturalment les de segon grau ens són prou ben conegudes: són les còniques. Però ara tenim corbes de tots els graus si volem i, el que és més, en associar relacions algebraiques entre mesures amb la geometria, s'obre la porta al fet que aquestes mesures prenguin cada vegada més entitat com a números.

*Descartes* no estava sol en la seva inquietud. Tot un grup de matemàtics es van posar en contacte al voltant de l'*Abat Mersenne*, a París. D'aquest grup forma part *Pierre Fermat*, que considera gràfiques de funcions com la paràbola per trobar-ne la tangent, ja no geomètricament, sinó analíticament; també considera problemes de màxims i mínims: quin és el rectangle de perímetre donat d'àrea més gran, i també com trobar l'àrea sota la gràfica d'una funció de la forma  $y = x^{m/p}$ .

Dins del grup trobem *Roberval*, que estudia un nova corba definida cinemàticament: la *cicloide*. És la corba descrita per un punt que està sobre un cercle que rodola sense relliscar sobre una recta.

El punt important de tot això és que aquests mètodes permeten fer una descripció més acurada de les experiències observades. Els problemes geomètrics s'expressaven en termes de números i es tractaven amb els mètodes algebraics (*analítics* es deia a l'època, per distingir-los dels *geomètrics*). D'aquesta manera

el nombre de fenòmens descrits matemàticament i els mètodes matemàtics per a tractar aquests problemes es multipliquen durant el segle XVII. Per exemple *Huygens* inventa el rellotge de pèndol i més tard el perfecciona (o més ben dit intenta perfeccionar-lo, perquè es troba amb problemes mecànics), veient que les oscil·lacions pendulars seguint una cicloide són de període independent de la seva amplitud, i això ho fa matemàticament. És així com el concepte de funció, ja sigui per a descriure una forma, una relació entre dimensions, la forma d'una trajectòria, la velocitat o l'espai recorregut en termes del temps, etc., va prenent carta de naturalesa entre els matemàtics. Els problemes importants són trobar-ne la tangent, els màxims i els mínims, l'àrea limitada, etc. Les seves solucions permetran respondre preguntes no solament de fora de la matemàtica, sinó que també il·luminaran els mateixos ens matemàtics que van naixent.

En estudiar certes propietats geomètriques o cinemàtiques no n'hi ha prou amb una utilització de l'àlgebra amb un número finit d'operacions. Apareixen així una sèrie de processos infinits per a expressar certs conceptes: tangent, àrea, volum, velocitat i també per aproximar números i relacions. Per exemple, l'aplicació de la fórmula del binomi amb exponent no natural dóna una expressió infinita.

És el joc d'aquests dos factors: l'algebrització i els processos infinits, el que donarà origen al càlcul infinitesimal, que és l'eina per excel·lència per a descriure i tractar el continu. La síntesi d'aquest càlcul va ser feta per *Newton* i *Leibniz* al final del segle XVII.

## 3.2 Funcions

Encara que el concepte de funció ha passat per moltes etapes des de l'antiguitat, avui una funció dels números reals als números reals es defineix com una relació que fa correspondre a cada número real (o almenys a cada número real on la volem tenir definida, el conjunt dels quals constitueix el *domini* de la funció), un número real, d'una manera única.

Una manera més formal, però certament no més efectiva, és definir-la com un subconjunt  $F$  del pla, que suposem constituït per parelles de números reals  $(x, y)$ , que té la propietat que si  $(x, y_1)$  i  $(x, y_2)$  pertanyen a  $F$ , llavors  $y_1 = y_2$ . És a dir, que  $F$  no conté dos punts amb la mateixa  $x$ .

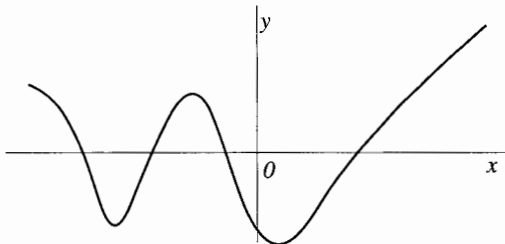
És habitual emprar la notació  $y = f(x)$  per indicar que  $y$  és el número que s'associa a  $x$ , o, segons la definició formal, que fa que  $(x, y)$  estigui a  $F$ . De fet, és a  $f$  a qui anomenem la *funció* de  $x$ , anomenada la *variable independent*. El conjunt de punts pels quals es té definida la funció, és a dir, el conjunt  $D$  de  $\mathbb{R}$  per al qual hi ha punts de la forma  $(x, y)$  a  $F$  amb  $x$  a  $D$ , s'anomena el *domini* de la funció  $f$ . Més formalment aquest domini es defineix amb la següent notació, més taquigràfica:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : (x, y) \in F\}$$

que es llegeix:  $D$  és el conjunt de punts de  $\mathbb{R}$  amb la propietat que existeix un

número real  $y$  tal que  $(x, y) \in F$ . També hauríem pogut escriure la propietat com “ $\exists y \in \mathbb{R}$  tal que  $y = f(x)$ ”, és a dir, que hi ha un número  $y$  que és igual a  $f(x)$ , que s’anomena el *valor de la funció  $f$  a  $x$* .

La *gràfica* d’una funció és precisament  $F$ , és a dir, el conjunt de punts  $(x, f(x))$  al pla. S’acostumen a dibuixar els eixos de coordenades, denotant amb  $x$  el de les abscisses i amb  $y$  el de les ordenades.



Notem que aquesta definició *conjuntista* de funció ja s’ha deslliurat de qual-sevol regla precisa que associï  $x$  i  $y$ , i s’identifica la funció amb la seva gràfica. Els problemes vénen quan volem especificar una funció determinada. Aquí ens passa una mica com amb els números reals, però pitjor: les possibilitats de les funcions tal com les hem definides són tantes que no ens arribarien els símbols i les paraules per especificar-les totes: de fet n’hi ha més que números reals, per als quals tampoc donàvem l’abast. De quines eines disposem per a descriure-les? Ja hem vist que les eines clàssiques eren les operacions algebraïques, la geometria i la cinemàtica.

Un catàleg de funcions que només recorregué a l’àlgebra inclou les *funcions polinòmiques*  $f(x) = P(x)$ , on  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  és un polinomi de grau  $n$ , amb  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Casos particulars són les funcions constants ( $n = 0$ ), lineals ( $n = 1$ ), quadràtiques ( $n = 2$ ), cúbiques ( $n = 3$ ), etc. A més també tenim les *funcions racionals*  $f(x) = P(x)/Q(x)$  amb  $P$  i  $Q$  polinomis. Aquestes funcions no estan definides pels valors de  $x$  que fan  $Q(x) = 0$ . Així, per exemple,  $f(x) = 1/x^n = x^{-n}$  és una funció racional definida per  $x \neq 0$ . També podem definir funcions implícitament. Per exemple definir  $y$  en funció de  $x$  mitjançant  $x = P(y)$ . És clar que això no estarà definit per tots els valors de  $x$ , perquè podria ser que per una  $x$  particular l’equació resultant o bé no tingui solució o bé en tingui més d’una.

Així per exemple, si prenem  $x = y^2$ , resulta que si  $x < 0$  no té solució i si  $x > 0$  en té dues. Tot i això es pot definir una funció si especifiquem de les dues solucions quina és la que triem. Així, doncs, podem definir les funcions *arrel quadrada positiva* i *arrel quadrada negativa*, per tots els valors de  $x \geq 0$ :

$$\begin{cases} y = +\sqrt{x}, \\ y = -\sqrt{x}. \end{cases}$$

(vegeu l’exercici 5 del capítol 2).



Quan definim una funció d'aquesta manera, diem que tenim la *funció inversa* de l'original. Ja veiem que pot ser que no sigui única o que hàgim de restringir-ne el domini.

També podem definir la funció que associa una *potència fraccionària* a un número:  $f(x) = x^{m/n}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ .  $x^{m/n}$  vol dir elevar  $x$  a la  $m$  i extreure'n l'arrel d'ordre  $n$ . Si  $n$  és imparell aquesta arrel té un valor real únic, però si és parell té dos possibles valors, un de positiu i un de negatiu, i a més només pels valors positius de  $x$ .

Una manera més complicada de definir una funció de  $x$  és considerar expressions polinomials amb dues variables, és a dir,

$$P(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + \dots,$$

que és una suma finita de termes de la forma  $ax^m y^n$ .

Si considerem els valors de  $(x, y)$  tals que  $P(x, y) = 0$ , ens determina un conjunt del pla, del qual una certa part  $F$  ens pot definir una funció  $y = f(x)$  com hem fet abans, que compleix  $P(x, f(x)) = 0$ . D'això en diem una *funció implícita*. En particular, com que  $f$  l'obtenim fent servir eines algebraïques, en diem una *funció algebraica*.

Una altra manera de definir funcions consisteix a dir d'una manera explícita el que val a cada punt, utilitzant potser altres funcions. Així, per exemple, el valor absolut d'una funció en dóna una de nova  $|f(x)|$  o bé podem definir

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

coneguda com la *funció de Dirichlet*, o bé

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ +\sqrt{x}, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

Ens trobem que sense més eines que les operacions algebraïques entre números reals ja no ens veiem capaços de definir més tipus de funcions.

Nosaltres, però, coneixem les funcions trigonomètriques i les exponencial i logarítmica, definides geomètricament, i també les que defineixen corbes cinemàtiques com la cicloide i la tractriu. Més endavant definirem aquestes funcions i moltes d'altres d'una manera analítica, quan tinguem les eines que calen: la integració, les successions de funcions i les equacions diferencials.

### 3.3 Introducció a la derivada

De les funcions ens interessa calcular-ne les derivades i les integrals. La raó és que moltes lleis de la natura s'expressen com a relacions entre funcions i les seves derivades, i que per a extreure resultats d'aquestes relacions necessitem les integrals. Així, per exemple, si tenim un punt que es mou sobre una recta, la seva velocitat en un moment donat és la derivada de la funció que expressa

la posició en termes del temps. I si coneixem la velocitat o l'acceleració en tot moment, llavors podem obtenir per integració la seva posició en tot moment.

La idea de la derivada d'una funció en un punt és essencialment la mateixa que el pendent de la tangent a la gràfica de la funció a aquest punt i que també coincideix amb la velocitat si la funció es mira com la posició en funció del temps. La definició, vigent des del principi del segle XVIII, diu que la derivada d'una funció en un punt  $x$  és el límit del quocient entre l'increment de la funció i l'increment de la variable independent quan aquest darrer tendeix a zero. Si s'incrementa la variable  $x$  en un número  $h$ , l'increment del valor de la funció és  $f(x+h) - f(x)$ , i el quocient d'increments és  $(f(x+h) - f(x))/h$ . Com que considerem  $x$  com un punt fixat, l'expressió anterior és una funció de  $h$ . Notem que per  $h = 0$  aquesta funció no està definida generalment, ja que no podem dividir per 0. El valor de la derivada de  $f$  a  $x$  és el límit d'aquesta funció quan  $h$  tendeix a 0. A la següent secció estudiem el sentit d'aquesta expressió.

### 3.4 Límit d'una funció

Diem que una funció  $g(h)$  té *per límit* 0, o bé que *tendeix a 0* quan  $h$  tendeix a 0, quan podem fer  $g(h)$  més petit que qualsevol número que donem, prenent  $h$  prou petit.

D'una manera més formal, diem que  $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$  si per cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , existeix un número  $\delta_\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , tal que si  $0 < |h| < \delta_\varepsilon$ , llavors  $|g(h)| < \varepsilon$ , hem indicat amb un subíndex  $\varepsilon$ , que  $\delta$  depèn, en general, de  $\varepsilon$ . També podem escriure que  $g$  té límit 0 quan  $h$  tendeix a 0 posant  $g(h) \rightarrow 0$  quan  $h \rightarrow 0$ .

I ara generalitzem de manera que no sigui a 0 necessàriament que s'hagi de tendir:

Diem que  $g(h)$  tendeix a un número  $l$  quan  $h$  tendeix a un número  $a$ , o bé que  $l$  és el límit de  $f(h)$  quan  $h$  tendeix a  $a$ , i escrivim  $\lim_{h \rightarrow a} f(h) = l$  o bé  $f(h) \rightarrow l$  quan  $h \rightarrow a$  si i sols si  $l - f(h)$  tendeix a 0 quan  $h \rightarrow a$ , és a dir, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 < |a - h| < \delta \Rightarrow |l - f(h)| < \varepsilon.$$

Resulta que això és equivalent a dir que per tota successió  $\{h_n\}$  tendent a  $a$ , amb  $h_n \neq a$ , es compleix que  $\lim\{f(h_n)\} \rightarrow l$  (vegeu l'apèndix 5 d'aquest capítol).

Podria ser que la condició d'existència del límit només es compleixi per valors de  $h$  més grans que  $a$ , és a dir, que tinguem que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 < h - a < \delta \Rightarrow |l - f(h)| < \varepsilon.$$

En aquest cas diem que existeix *el límit per la dreta*, i ho expressem mitjançant  $l = \lim_{h \rightarrow a^+} f(h)$ , o bé  $f(h) \rightarrow l$  quan  $h \rightarrow a^+$ , o també  $f(a^+) = l$ .

De manera similar, prenent  $h$  més petit que  $a$ , és a dir, prenent  $0 < a - h < \delta$  a la definició, tenim la noció de *límit per l'esquerra*, i posem  $l = \lim_{h \rightarrow a^-} f(h)$  o  $f(h) \rightarrow l$  quan  $h \rightarrow a^-$ , o també  $f(a^-) = l$ .

Podem donar diversos exemples de funcions amb límit i sense en un punt.

i)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Quan  $x$  tendeix a 0, això no té límit, perquè per petit en valor absolut que prenem  $x$ ,  $f(x)$  pot valer 0 o 1, i no ens podem acostar a l'un sense apartar-nos de l'altre, és a dir, si prenem  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ , per petit que prenguem  $\delta$ ,  $|x| < \delta$  dóna valors 0 i 1, i no hi ha cap  $l$  que estigui a menys d' $1/4$  dels dos valors.

Tenim, però, que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$  i que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ .

ii)  $f(x) = 1/x$ , si  $x \neq 0$ . No té límit quan  $x \rightarrow 0$ : per valors de  $|x|$  tan petits com vulguem pren valors grans positius i negatius.

iii) Si volem fer servir funcions encara no definides analíticament en aquest text,

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0,$$

on  $\sin$  és la funció que associa el seu sinus a un angle en radians, resulta que no té límit per  $x \rightarrow 0$ , mentre que

iv)  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ , si  $x \neq 0$ , té per límit 0 quan  $x \rightarrow 0$ , perquè per a cada  $\varepsilon > 0$  que donem, si prenem  $\delta = \varepsilon$ , tenim

$$|f(x)| \leq |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \delta = \varepsilon,$$

on hem fet servir que el sinus d'un angle no és mai més gran que 1 en valor absolut.

v)  $f(x) = 1/x^2$  tampoc té límit quan  $x \rightarrow 0$ , perquè per  $|x|$  prop de 0 els valors creixen per damunt de qualsevol valor que fixem. De fet per gran que sigui el número  $M$ , prenent  $\delta$  prou petit i fent  $|x| < \delta$  tenim que  $f(x) > M$ .

En aquest cas diem que  $f(x)$  tendeix a infinit quan  $x \rightarrow 0$ , i ho denotem  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$  o bé

$$f(x) \longrightarrow \infty \quad \text{quan } x \longrightarrow 0.$$

I una cosa simètrica si prenem  $f(x) = -1/x^2$ , en què diem que  $f$  tendeix a menys infinit quan  $x \rightarrow 0$ .

## 3.5 La derivada en un punt

Tornant a la derivada, notem que  $h$  apareix al denominador, que fa pensar que, a menys que no se simplifiqui amb un terme del numerador  $f(x+h) - f(x)$ , la funció no està definida per  $h = 0$ , el mateix que passava amb la majoria dels exemples que hem donat.

Quan aquest límit existeix diem que és la derivada de  $f$  al punt  $x$ , i ho denotem:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

També s'utilitzen altres notacions, com la de *Leibniz*, que és de les més utilitzades:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) \quad \text{o} \quad \frac{df}{dx}(x) \quad \text{o} \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Com a primer exemple calculem la derivada en un punt de la funció  $f(x) = x^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Utilitzant la *fórmula binomial*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \dots + \frac{1}{r!}m(m-1)\dots(m-r+1) \\ &\quad + x^{m-r}h^r + \dots + h^m. \end{aligned}$$

Si ara substraïem  $f(x)$ , queda

$$f(x+h) - f(x) = h(mx^{m-1} + \frac{1}{2!}m(m-1)x^{m-2}h + \dots + h^{m-1}).$$

Dividint per  $h$  queda el que hi ha entre parèntesis, que tendeix a

$$mx^{m-1} \quad \text{quan} \quad h \rightarrow 0,$$

és a dir,  $f'(x) = mx^{m-1}$ .

Hi ha casos, però, en què la derivada no existeix. Vegem-ne alguns exemples:

1. Prenem  $f(x) = |x|$ . Volem veure quina és la derivada a  $x = 0$ :

Hem de calcular el límit de

$$\frac{|h|}{h} \quad \text{quan} \quad h \rightarrow 0.$$

Ara bé  $|h|/h = 1$  si  $h > 0$ , i  $-1$  si  $h < 0$ . Certament el límit no pot existir, perquè per  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , per exemple, per petit que prenguem  $\delta$ , hi ha valors de  $h$  més petits en valor absolut que  $\delta$  que fan que  $|h|/h$  valgui 1 i  $-1$ , que disten més que  $2\varepsilon$ . Per tant la funció no té derivada a  $x = 0$ .

2. La funció  $f(x)$  que hem definit abans, que val 0 per  $x$  racional i 1 per  $x$  irracional, certament no té derivada per cap valor de  $x$ .

Per a calcular la derivada a un punt  $x$  hem suposat que la funció està definida a tot un interval de valors centrat a  $x$ . En el cas en què la funció  $f$  tingui per domini un interval tancat  $[a, b]$ , no podem definir, doncs, la derivada als extrems. Podem, però, definir la *derivada per la dreta* al punt  $x$ , com el límit per la dreta de  $(f(a+h) - f(a))/h$ , quan  $h$  tendeix a 0, és a dir, a través de valors positius de  $h$ . Similarment, definim la *derivada per l'esquerra* prenent el límit per l'esquerra a  $b$ , és a dir, prenent valors negatius de  $h$ . D'aquesta manera, la funció  $f$  pot tenir derivada per la dreta a  $a$  i per l'esquerra a  $b$ .

## 3.6 La funció derivada

Si tenim els valors de la derivada d'una funció podem definir una nova funció a tots els punts en què aquesta derivada existeixi: la funció derivada.

Si la derivada existeix en tots els punts del domini de la funció, diem que tenim una *funció derivable*. Quan el domini de la funció és un interval tancat  $I = [a, b]$ , la derivada als extrems s'haurà d'entendre *per la dreta* a  $a$  i *per l'esquerra* a  $b$ , i si existeixen, el mateix que la derivada als punts de  $(a, b)$ , direm que la funció és derivable a  $[a, b]$ .

Per tal de procedir amb l'estudi de les funcions i les seves derivades, ens resulta convenient introduir el concepte de funció contínua.

La funció derivada de  $f$  pot ser també derivable. Denotem per  $f''$  la derivada de la derivada de  $f$ :  $f'' := (f')'$ , i, en general,  $f^{(n)}$  és la funció obtinguda, si existeix, derivant successivament  $f$   $n$  vegades.

## 3.7 Funcions contínues

Una *funció és contínua* en un punt de  $\mathbb{R}$  si i sols si el valor de la funció a  $a$ ,  $f(a)$  coincideix amb el valor del límit de la funció  $f(x)$  quan  $x$  tendeix a  $a$ . Si recordem la definició de límit d'una funció, això ho podem escriure formalment com:  $f(x)$  és contínua a  $a$  si i sols si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_{\varepsilon, a} > 0$  tal que  $|x - a| < \delta_{\varepsilon, a} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

Aquí hem emfasitzat amb els subíndexs  $\varepsilon$  i  $a$ , que la  $\delta$  depèn, en general, tant de  $\varepsilon$  com del punt  $a$ .

Notem que aquesta definició és equivalent a dir que  $f(x)$  tendeix a  $f(a)$  quan  $x$  tendeix a  $a$ . O bé, d'acord amb el que hem fet notar quan hem dit el que era el límit d'una funció, que per tota successió  $\{x_n\}$  que tendeixi a  $a$  tenim que  $\{f(x_n)\}$  tendeix a  $f(a)$ .

Dels exemples que hem utilitzat abans per a il·lustrar l'existència o no de límits de funcions, el casos i), ii), iii) i v) corresponen a funcions que són contínues en tots els punts menys al 0, on ii), iii) i v) no estan ni tan sols definides, i encara que els assignem un valor per  $x = 0$ , no podem fer-les contínues en aquest punt per cap tria. En canvi la funció a iv) sí que la podem fer contínua a 0 prenent  $f(0) = 0$ . La funció  $f(x) = |x|$ , que no era derivable per  $x = 0$ , sí que resulta contínua en tots els punts. La *funció de Dirichlet* definida abans, que val zero als racionals i 1 als irracionals, no és contínua en cap punt. La comprovació formal de tot això la deixem com a exercici.

Si una funció és contínua en tots els punts d'un cert conjunt, per exemple un interval, diem que la *funció és contínua a l'interval*. Per exemple  $f(x) = |x|$  és contínua a tot  $\mathbb{R}$ , mentre que  $f(x) = 1/x$  per a  $x \neq 0$  i  $f(0) = 0$  és contínua a l'interval obert  $(0, 1)$  però no al tancat  $[0, 1]$ .

### 3.8 Derivabilitat i continuïtat

Tenim que tota funció derivable és contínua: efectivament, multiplicant i dividint per  $h \neq 0$ ,

$$f(x+h) - f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h.$$

Com que, per hipòtesi, el primer factor del segon membre tendeix a  $f'(x)$  quan  $h$  tendeix a 0, ens queda que  $f(x+h) - f(x)$  tendeix a 0 quan  $h$  ho fa, és a dir,  $f$  és contínua al punt  $x$ .

La derivada d'una funció no és necessàriament contínua. No és fàcil donar-ne un exemple amb el repertori de funcions tan petit com el que tenim ara. Utilitzant les funcions trigonomètriques, que definirem analíticament al capítol següent, es comprova que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^n}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

amb  $n \in \mathbb{N}$ , és derivable, i que la seva derivada no és contínua al 0. De fet per  $n > 1$  la derivada no és ni tan sols acotada a cap interval que contingui el 0.

Tot i no ser necessàriament contínua, la derivada té una propietat en comú amb les funcions contínues: que la imatge d'un interval és un interval (finit o infinit). Vegeu l'exercici 4 al final del capítol. Això es dedueix de la *propietat de la mitjana per la derivada*, de gran importància en el càlcul. Aquesta propietat diu que si  $f$  és derivable a  $[a, b]$ , llavors existeix un punt  $x \in (a, b)$  tal que  $f'(x) = f(b) - f(a)/(b - a)$ . És a dir, gràficament, que hi ha un punt entre  $a$  i  $b$  pel qual el pendent del tangent al gràfic de  $f$  coincideix amb el pendent de la corba que uneix els extrems del gràfic de  $f$ . O, en termes més cinemàtics, que si  $f$  representa la distància recorreguda en funció del temps, llavors en algun punt del trajecte la velocitat és precisament la velocitat mitjana de tot el trajecte. La demostració es basa en l'anomenat *Teorema de Rolle*, que ens diu que essent  $f$  contínua a  $[a, b]$  i derivable a  $(a, b)$  amb  $f(a) = f(b)$ , llavors per algun punt  $x \in (a, b)$  es té  $f'(x) = 0$ .

Aquest teorema se segueix del fet que essent contínua  $f$  (ja que és derivable), ateny el seu màxim i el seu mínim a  $[a, b]$  (vegeu l'apèndix 3 per a una prova d'aquesta propietat). Si el màxim l'ateny en un punt interior,  $x \in (a, b)$ , resulta que la derivada, que existeix ja que és derivable, ha de ser zero. Efectivament, per ser un màxim,  $f(x+h) - f(x) \leq 0$ , i per tant el quocient diferencial  $(f(x+h) - f(x))/h$  serà  $\leq 0$  per  $h > 0$  i  $\geq 0$  per  $h < 0$ . Si la derivada fos diferent de 0, diguem  $> 0$ , ens trobaríem que per  $h$  positiva prou petita el quocient diferencial hauria de ser positiu, en contradicció amb el que hem suposat. Anàlogament si fos  $< 0$ .

Per tant, si hi ha un màxim interior a  $x$ , llavors  $f'(x) = 0$ . Semblantment, canviant els signes, veiem que si s'ateny un mínim a  $x$  interior,  $f'(x) = 0$ . L'únic cas que ens queda per a comprovar l'existència de  $x \in (a, b)$  amb  $f'(x) = 0$

és quan el màxim i el mínim s'atenyen als extrems  $a$  i  $b$ . Però llavors, en ser  $f(a) = f(b)$ , la funció ha de ser constant:  $f(x) = f(a)$  per tots  $x \in [a, b]$ , i tenim que  $f'(x) = 0$  per tots  $x \in (a, b)$ .

D'això, el teorema del valor mitjà se segueix sumant una funció lineal de pendent  $f(b) - f(a)/(b - a)$  a la funció  $f$ . Efectivament, considerem

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Resulta que  $g(a) = g(b) = 0$ . Pel teorema de Rolle, per alguna  $x \in (a, b)$ , tenim  $g'(x) = 0$ . Calculant la derivada queda

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

o sigui que ja hem trobat  $x \in (a, b)$  amb

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

tal com volíem.

Ajudant-nos del teorema del valor mitjà veiem ara que si dues funcions tenen la mateixa derivada, llavors difereixen en una funció constant. Efectivament, siguin  $f$  i  $g$  tals que  $f' = g'$ . La funció diferència  $h = f - g$  té per derivada 0 a tots els punts. Si  $a$  i  $b$  són dos punts diferents, llavors existeix  $x \in (a, b)$  tal que  $h'(x) = (h(b) - h(a))/(b - a)$ . Com que  $h'(x) = 0$ , resulta que  $h(b) = h(a)$ , i això per  $a$  i  $b$  arbitraris, per tant  $h$  és constant.

### 3.9 Derivades de sumes, productes i quocients de funcions

Hi ha un seguit de propietats de la derivada que ens permeten calcular la derivada de funcions obtingudes combinant altres funcions de derivada coneguda.

Així si  $f$  i  $g$  són dues funcions, la seva suma  $f + g$  avaluada al punt  $x$  és  $f(x) + g(x)$  i, per tant, la seva derivada és

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\ = & \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \end{aligned}$$

i ara, com que el límit d'una suma és la suma dels límits, ja tenim que la derivada d'una suma és la suma de les derivades:  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ .

De manera igualment senzilla es veu que  $(af)'(x) = af'(x)$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(x+h) - af(x)}{h} = a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Utilitzant això obtenim la derivada de la funció polinomial a partir de la fórmula de la derivada que hem obtingut per  $f(x) = x^n$ , que és  $f'(x) = nx^{n-1}$ . Resulta així que si

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

llavors

$$P'(x) = a_0 + 2a_1x + \dots + na_nx^{n-1}.$$

Definim la funció producte de  $f$  i  $g$  per  $fg(x) := f(x)g(x)$ . Calculem-ne la derivada: sumant i restant convenientment obtenim

$$\frac{fg(x+h) - fg(x)}{h} = f(x+h) \left( \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) + g(x) \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right).$$

Si suposem que  $f$  i  $g$  són derivables al punt  $x$ , tenim que les expressions entre parèntesis al segon membre tendeixen respectivament a  $g'(x)$  i  $f'(x)$ , que són valors ben definits. Per altra banda  $f(x+h)$  tendeix a  $f(x)$ , ja que en ser  $f$  derivable a  $x$ , hi és contínua. Queda doncs que el límit de l'expressió existeix i és per tant la derivada de funció  $fg$  al punt  $x$ , que queda

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Aquesta expressió és coneguda com la *fórmula de Leibniz*.

Si considerem ara les funcions  $f$  i  $g$ , derivables al punt  $x$ , amb  $g(x) \neq 0$ , podem calcular la derivada a aquest punt de la funció quotient

$$\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Hem de calcular el límit de

$$\begin{aligned} & \left( \frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x) \right) / h \\ &= \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left( g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right), \end{aligned}$$

que existeix, ja que  $g(x+h) \rightarrow g(x) \neq 0$  i les derivades de  $f$  i  $g$  estan ben definides. Resulta doncs que

$$\left( \frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{1}{g^2(x)} (g(x)f'(x) - f(x)g'(x)).$$

Això ens permet trobar les derivades de les funcions racionals  $f(x) = P(x)/Q(x)$ , on  $P$  i  $Q$  són polinomis, vigilant sempre els punts en què  $Q(x) = 0$ , on la funció no està definida si  $P$  i  $Q$  no tenen factors comuns (ni tan sols és acotada en un entorn).

Per exemple, aplicant la regla de Leibniz a  $g(x) = 1/f(x) = 1/x^m = x^{-m}$ , resulta

$$g'(x) = \frac{1}{f^2(x)} (f(x) \cdot 0 - 1 \cdot f'(x)) = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}.$$



### 3.10 Composició de funcions i regla de la cadena

Si la funció  $f$  està definida al domini  $D$  en  $\mathbb{R}$  i els seus valors estan al domini de la funció  $g$ , llavors podem definir la funció composta  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  per a  $x \in D$ . Resulta que si  $f$  és derivable a  $x$  i  $g$  ho és a  $f(x)$ , la *funció composta*  $g \circ f$  (que es llegeix “ $f$  seguida de  $g$ ”) és derivable, i la seva derivada ve donada per l’anomenada *regla de la cadena*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

De la definició de derivada i de les propietats dels límits, se segueix que  $f$  té a  $f'(x)$  per derivada a  $x$ , si i sols si és cert que  $f(x+h) - f(x) = hf'(x) + o_f(h)$ , on  $o_f$  és una funció tal que  $o_f(h)/h$  tendeix a 0 quan  $h \rightarrow 0$ .

El mateix, *mutatis mutandis*, és cert per  $g$ . Podem escriure, doncs,

$$(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) = (f(x+h) - f(x))g'(f(x)) + o_g(f(x+h) - f(x))$$

i aplicant-ho de nou

$$= (hf'(x) + o_f(h))g'(f(x)) + o_g(f(x+h) - f(x)).$$

Dividim ara per  $h$ . Tenim d’una banda que  $o_f(h)/h$  tendeix a 0 quan  $h \rightarrow 0$ . De l’altra,

$$\frac{o_g(f(x+h) - f(x))}{h} = \frac{o_g(f(x+h) - f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Per ser derivable,  $f$  és contínua, i per tant  $f(x+h) - f(x)$  tendeix a 0 en tendir  $h$  a 0, d’on se segueix que el primer factor del segon membre de la igualtat tendeix a 0, mentre que el segon factor tendeix a  $f'(x)$ , que sabem que existeix i té un valor determinat. Per tant  $o_g(f(x+h) - f(x))/h$  tendeix a 0 en fer-ho  $h$ . En tenir doncs límit el segon membre, vol dir que el primer també té el mateix, per definició és la derivada de la funció composta  $g \circ f$  avaluada a  $x$ . Obtenim doncs la fórmula cercada.

### 3.11 La funció inversa i la seva derivada

En una secció anterior hem utilitzat l’arrel quadrada i, més en general, l’arrel d’ordre  $n$  d’un número natural (positiu si  $n$  és parell). D’una manera intuïtiva no dubtem gaire que la funció està ben definida. De fet tenim fins i tot un algorisme per anar calculant els valors de les arrels amb tanta precisió com vulguem.

La funció que associa l’arrel d’ordre  $n$  a un número es diu que és la *funció inversa* de l’elevació a la potència  $n$ , perquè si componem l’una amb l’altra obtenim la funció identitat, és a dir, la que a  $x$  associa el valor  $x$ . Efectivament,

d'acord amb com hem definit l'arrel i la potència, és cert que  $\sqrt[n]{x^n} = x$  i  $(\sqrt[n]{x})^n = x$ , si prenem en compte que en cas que  $n$  sigui parell  $\sqrt[n]{x}$  té dos possibles signes i  $x$  no pot ser negatiu. Si tenim dues funcions,  $f$  i  $g$ , de manera que  $f(g(x)) = x$  i  $g(f(x)) = x$  diem que  $g$  és la inversa de  $f$  i que  $f$  és la inversa de  $g$  (s'ha de vigilar una mica amb els dominis de  $f$  i  $g$ ). Això es denota amb  $g = f^{-1}$  i  $f = g^{-1}$ . Si  $i$  denota la funció identitat:  $i(x) = x$ , resulta que  $f \circ f^{-1} = i$  i  $f^{-1} \circ f = i$  (o equivalentment  $g \circ g^{-1} = i$ ,  $g^{-1} \circ g = i$ ).

Es diu que  $f$  és una *funció creixent* (*decreixent*) a un punt  $x$  si  $f(x_1) > f(x)$  (resp.  $f(x_1) < f(x)$ ) per  $x_1 > x$  (resp.  $x_1 < x$ ), i ho és a un interval obert  $I$  si per  $x_1 < x_2$ ,  $x_1, x_2 \in I$ , tenim que  $f(x_1) < f(x_2)$  (resp.  $f(x_1) > f(x_2)$ ). Hi ha una relació entre el fet que una funció derivable a  $I$  (és a dir, amb derivada a tots els punts de  $I$ ) sigui creixent o decreixent i el signe de la seva derivada.

De  $f(x+h) - f(x) = hf'(x) + o(h)$ , resulta que per a  $h$  prou petit,  $f(x+h) - f(x)$  té el mateix signe que  $f'(x)$ : n'hi ha prou amb fer que  $|o(h)|/h$  sigui més petit que  $|f'(x)|$  amb  $h > 0$ . Això ens diu que  $f$  és *creixent* a  $x$  si  $f'(x) > 0$  i *decreixent* a  $x$  si és negatiu. Ara bé, el que  $f'(x)$  sigui positiu, no implica que  $f$  sigui creixent a tot un entorn de  $x$ : podria ser que trobéssim punts  $x_1, x_2$  tan propers a  $x$  com volguéssim,  $x_1 < x_2$ , i que  $f(x_1) > f(x_2)$ . (Deixem com a exercici trobar una tal funció.)

Una condició suficient perquè  $f$  sigui creixent a tot un interval obert  $I$  és que  $f'$  sigui contínua i positiva a tot l'interval. En aquest cas  $f^{-1}$  està definida a tota la imatge de  $I$  sota  $f$ , resulta ser derivable, i la derivada ve donada per  $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$ , on suposem que  $y = f(x)$  per alguna  $x \in I$ . (Certament la funció podria ser creixent fins i tot amb  $f'$  anul·lant-se en alguns punts de l'interval, com amb  $f(x) = x^3$  a l'interval  $(-1, 1)$ , però llavors  $f^{-1}$  no és derivable al 0.)

Per provar-ho, notem primer que sota les hipòtesis proposades, la imatge de l'interval obert  $I$  és un interval obert  $f(I)$ : efectivament per ser  $f$  derivable, és contínua, i si  $f(x_1) < f(x_2)$  i  $c \in (f(x_1), f(x_2))$ , llavors existeix  $x \in (x_1, x_2)$  tal que  $f(x) = c$ . (Vegeu a l'apèndix 1 el *Teorema de Bolzano* per a una demostració d'això, on s'utilitza fonamentalment la completesa dels reals).

Ara tenim que per a  $y = f(x)$ ,  $x \in I$ , resulta que si  $h$  és tal que  $y+h \in f(I)$ , llavors existeix una única  $k$  tal que  $x+k \in I$ , i  $f(x+k) = y+h$ . A més, a causa de la continuïtat de  $f$  i que  $a$  és creixent, resulta que  $k$  tendeix a 0 quan  $h$  tendeix a 0. Resulta, doncs,

$$\frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \frac{f^{-1}(f(x+k)) - x}{h} = \frac{k}{f(x+k) - f(x)},$$

i si prenem el límit quan  $h$  tendeix a 0, queda

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

que és la fórmula per a la derivada de la funció inversa que preteníem obtenir.

La fórmula també resulta vàlida quan per comptes de  $f' > 0$  demanem  $f' < 0$ .

## 3.12 Derivades de potències fraccionàries

Amb les eines que hem acabat d'adquirir podem eixamplar el repertori de les funcions de les quals coneixem la derivada, que de moment s'havia quedat en els polinomis i les funcions racionals.

Per a l'extracció d'arrels tenim, que si  $g(y) = \sqrt[m]{y} = y^{1/m}$ , llavors  $g = f^{-1}$ , amb  $f(x) = x^m$ . Aplicant la fórmula acabada d'obtenir

$$g'(y) = \frac{1}{f'(\sqrt[m]{y})},$$

i com que  $f'(x) = mx^{m-1}$ , queda

$$g'(y) = \frac{1}{m(\sqrt[m]{y})^{m-1}} = \frac{1}{m} y^{\frac{1}{m}-1}.$$

Tot això, és clar, supeditat als valors pels quals  $\sqrt[m]{\cdot}$  està ben definida.

D'una manera més general ens queda, ajuntant els resultats per la derivada de  $x^m$  amb  $m$  positiu i negatiu, que ja teníem, que si

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{m}{n}}, \quad \text{llavors} \\ f'(x) &= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}. \end{aligned}$$

És interessant de fer notar que aquesta fórmula ja havia estat obtinguda per Newton al segle XVII utilitzant el desenvolupament de  $(x+h)^{m/n}$  com la suma infinita

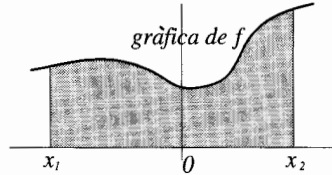
$$x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} h + \dots + \frac{1}{r!} \frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - 1\right) \dots \left(\frac{m}{n} - r + 1\right) x^{\frac{m}{n}-r} h^r + \dots$$

Sense preocupar-se per qüestions de convergència, Newton resta  $x^{m/n}$ , divideix entre  $h$  i fa tendir  $h$  a 0, amb la qual cosa obté el resultat.

Amb el coneixement de les derivades de les funcions que es poden derivar per composició i inversió hem eixamplat força el catàleg de funcions que tenim descrites analíticament i que podem derivar. Ens falten, però, les funcions: exponencial, logarítmica i trigonomètriques. Ens ajudaran a definir-les analíticament la integral d'una funció i el teorema fonamental del càlcul.

## 3.13 Introducció a la integral

La integral d'una funció no és un concepte local, és a dir, no depèn, com la derivada, només dels valors de la funció en un entorn del punt on avaluem la derivada. La integral ve a mesurar l'àrea de la regió compresa entre la gràfica de la funció, l'eix  $x$  de les abscisses i dues *línees d'ordenades* determinades per dos punts  $x_1$  i  $x_2$ . Tal com es mostra a la figura



Certament aquesta és una definició inspirada en la intuïció geomètrica i requereix ser complementada dient el que entenem per àrea entre la gràfica i l'eix de les abscisses quan  $f$  també pren valors negatius. A més veiem de seguida que hi ha funcions, com aquella que definim per 0 quan  $x$  és racional i per 1 quan no ho és, per a les quals la intuïció geomètrica ens pot fallar.

Invertirem, doncs, el procés: donada una funció  $f$  direm, analíticament, quina és la integral de  $f$  entre els punts  $x_1$  i  $x_2$  i definirem l'àrea sota la gràfica com el valor d'aquesta integral. Resulta que aquesta definició no funciona per a totes les funcions imaginables i ens haurem d'acontentar, de moment, amb les funcions contínues.

### 3.14 Acotament i continuïtat uniforme de les funcions contínues en un interval tancat

Per tal de comprovar que la integral està ben definida per a una funció contínua en un interval tancat, necessitarem un parell de propietats.

La primera és que una funció contínua en un interval tancat té els seus valors acotats, és a dir, existeix algun número que és superior al valor absolut de la funció a qualsevol punt. Ja sabem que si un conjunt de números reals és acotat, llavors té un extrem superior (inferior), és a dir, una cota superior mínima (inferior màxima). Resulta que una funció contínua en un interval tancat no només és acotada, sinó que per algun punt de l'interval s'ateny aquesta frontera superior (inferior).

Això no val per a les funcions no contínues en un interval tancat:  $f(x) = 1/x$  per a  $x \neq 0$  i  $f(0) = 0$  no és acotada a l'interval  $[-1, 1]$ . Tampoc per a les funcions contínues en un interval obert:  $f(x) = 1/x$  no és acotada a l'interval  $(0, 1)$ .

La segona és que, així com en la definició de continuïtat d'una funció en un punt  $a$ , es tracta que donada una  $\varepsilon > 0$  existeixi una  $\delta > 0$ , que en general dependrà tant de  $\varepsilon$  com de  $a$ , tal que si  $|x - a| < \delta$ , llavors  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ , si la funció és contínua en un interval tancat, llavors  $\delta$  es pot trobar de manera que depengui només de  $\varepsilon$ , és a dir que valgui el mateix per a tots els punts de l'interval. Aquesta propietat s'anomena *continuïtat uniforme*.

La funció  $f(x) = \frac{1}{x}$  no és uniformement contínua a  $(0, 1)$ , perquè per cada  $\varepsilon > 0$  que donem, hem de fer  $\delta$  més i més petita, amb límit zero, quan prenem  $a$  i  $x$  més i més prop de 0, per tal que  $|1/a - 1/x|$  sigui més petit que  $\varepsilon$ .

Les dues propietats depenen essencialment de la completitud dels reals i de la compacitat dels intervals tancats i es demostren als apèndixs 2 i 4.

### 3.15 Integral d'una funció contínua en un interval tancat

Considerem la funció  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Per tal de definir la integral dividim l'interval en  $n$  parts de longitud igual, mitjançant els punts  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ , amb  $x_i - x_{i-1} = (b - a)/n$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Considerem la suma

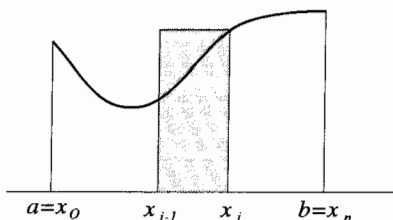
$$s_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

definim ara la *integral de  $f$  a l'interval  $I = [a, b]$*  com el límit de  $s_n$  quan  $n$  tendeix a  $\infty$ . Fem servir la següent notació que deriva de la utilitzada originalment per Leibniz al segle XVIII:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Una notació encara més senzilla és  $\int_a^b f$ .

Veiem que  $s_n$  correspon a la idea intuïtiva de la suma de les àrees dels rectangles mostrats a la figura, i que, per tant, en anar-se fent petites les seves bases, van aproximant-se a l'àrea entre la gràfica i l'eix de les abscisses, comptant com a negativa l'àrea quan  $f$  és negativa



Per veure que la integral està ben definida per a les funcions contínues hem de mostrar que  $\{s_n\}$  convergeix. Prenem doncs  $\varepsilon > 0$  i mostrem que existeix un valor  $n_0$  tal que per  $m, n > n_0$ , tenim  $|s_m - s_n| < \varepsilon$ , i que per tant la successió és de Cauchy i com a tal té límit.

Essent la funció contínua en un interval tancat, és uniformement contínua, és a dir, per cada  $\eta > 0$  podem trobar  $\delta_\eta > 0$  independent de  $x$  que garanteix que si  $|x - y| < \delta_\eta$ , llavors  $|f(x) - f(y)| < \eta$ .

Prenem  $n_0$  de manera que  $(b - a)/n_0 < \delta_\eta$  i considerem

$$s_m = \sum_{i=1}^m f(x_i)(x_i - x_{i-1}), \quad s_n = \sum_{j=1}^n f(x_j - x_{j-1}),$$

amb  $m, n > n_0$ . Notem que  $\{x_i\}$  i  $\{x_j\}$  designen conjunts de punts diferents, i potser hauríem de posar-los un índex  $m$  i  $n$  respectivament per distingir les

dues particions. Pensem, però, que ja n'hi haurà prou amb distingir-los amb els índexs  $i$  i  $j$ .

Dins de cada interval, ja sigui  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ , de longitud  $(b-a)/m$ , com  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  de longitud  $(b-a)/n$ , els valors de la funció a dos punts diferents no sobrepassa  $\eta$  en valor absolut.

Considerem ara

$$s_{mn} = \sum_{k=1}^{mn} f(x_k)(x_k - x_{i-1}),$$

on hem subdividit  $[a, b]$  en  $mn$  intervals iguals, és a dir, cada  $I_i$  en  $n$  parts del tipus  $I_k$  de longitud  $(b-a)/mn$ , i cada  $I_j$  en  $m$  d'aquests intervals  $I_k$ .

Tenim, doncs, que si prenem  $\eta$  de manera que  $2\eta(b-a) = \varepsilon$ , resultarà que tant  $|s_m - s_{mn}|$  com  $|s_n - s_{mn}|$  són menors que  $\varepsilon$ , ja que estem restant valors de  $f$  a punts que estan dins del mateix interval  $I_i$  o  $I_j$ .

Per tant

$$|s_m - s_n| \leq |s_n - s_{mn}| + |s_m - s_{mn}|,$$

tal com volíem provar.

Així, doncs,  $\{s_n\}$  és una successió de Cauchy i convergeix a un valor que és precisament el que hem definit com la integral de  $f$  a l'interval  $[a, b]$ .

Aquesta definició no és vàlida en general per a funcions que no siguin contínues en un interval tancat. De fet si intentéssim aplicar-la a  $f(x) = 1/x$ , a l'interval  $(0, 1]$ , ens trobaríem que el límit de  $s_n$  no existeix, o, més precisament, que tendeix a infinit.

De la definició d'integral, podem calcular directament les integrals d'unes quantes funcions.

Tenim així que

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}.$$

Efectivament

$$s_n = \sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{a}{n} = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{a^3}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

que tendeix a  $a^3/3$  quan  $n \rightarrow \infty$ .

Per a altres exponents més grans i per a altres límits, s'obtenen altres expressions utilitzant les fórmules de les sumes de les potències dels números naturals, que resulten prou complicades (vegeu els exercicis al final del capítol).

En lloc de dividir l'interval  $[a, b]$  en  $n$  parts iguals, és equivalent, per a la definició d'integral d'una funció contínua, prendre els punts  $x_i$  independentment de l'interval  $I$  considerat. Prenem així, per a cada  $n$ ,  $x_0 = 0$  i  $x_i = i/n$ , on  $i \in \mathbb{Z}$ . Considerem igualment les sumes  $s_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ , on prenem només les  $x_i$  que estan a  $I$  o, equivalentment, suposem que  $f$  val zero fora de  $I$ . Observem que en el límit el resultat és el mateix que abans, ja que la diferència deguda a termes als extrems de l'interval no pot passar d' $1/n$  multiplicat per

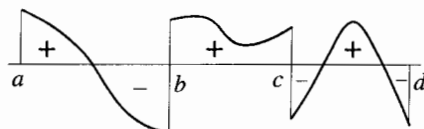
una cota superior de  $f$ , i a l'interior, la continuïtat uniforme de  $f$  ens garanteix que tendim al mateix límit, fent servir el mateix tipus d'argument que hem utilitzat abans.

Amb aquesta nova definició de la integral, resulta evident que si  $a < c < b$ , llavors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Podem estendre el significat de la integral per funcions que no siguin contínues a tot l'interval, si és que ho són a trossos. Això vol dir que hi ha un nombre finit de punts, on la funció deixa de ser contínua però posseeix límits tant per l'esquerra com per la dreta. En aquest cas definim la integral com la suma de les integrals de la funció restringida a cada un dels intervals definits per dos punts de discontinuïtat successius.

Així per la mena de funció amb la gràfica suggerida a la figura següent,



tenim que  $\int_a^d f = \int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^d f$ , que és una propietat que certament val per a funcions contínues a tot l'interval  $[a, d]$ .

El concepte d'integral que hem donat és conegut com a *integral de Cauchy*. Aquesta definició d'integral es pot modificar de manera d'incloure funcions que no són contínues a trossos o acotades. En tractarem en un apèndix d'aquest capítol.

Respecte de la suma de funcions i la multiplicació d'una funció per un número, la integral compleix

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) &= \int_a^b f + \int_a^b g \\ \int_a^b \alpha f &= \alpha \int_a^b f, \quad \text{per a } \alpha \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

que s'expressa dient que l'operació d'integració és lineal.

Això s'obté immediatament partint de la definició, el mateix que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

### 3.16 Teorema fonamental del càlcul

Mitjançant la integral es poden definir noves funcions de la següent manera. Suposem que  $f$  és contínua en un interval  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . Si  $x \in (a, b)$ , podem

considerar la integral  $\int_a^x f$ , que, com que està ben definida, ens dóna una funció de  $x$ . A aquesta funció de  $x$ , se l'anomena *integral indefinida* de  $f$  o també una *primitiva* de  $f$ . Canviant  $a$  per  $a'$  obtenim primitives diferents, que diferiran l'una de l'altra en la integral de  $f$  a l'interval  $[a, a']$ , és a dir, en una constant.

La següent propietat de la primitiva, que és una generalització de la relació entre la velocitat i l'espai recorregut en un moviment, és coneguda amb el nom de *Teorema Fonamental del Càlcul*:

Si  $f$  amb valors reals és contínua a  $I = [a, b]$ , llavors  $F(x) := \int_a^x f$  per  $x \in I$  és una funció derivable, i  $F'(x) = f(x)$ . Aquí s'entén que quan  $x = a$  la derivada és per la dreta i si  $x = b$ , és per l'esquerra.

Demostració:

Tenim que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f - \int_a^x f \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f.$$

Per una banda el límit quan  $h \rightarrow 0$  d'aquesta expressió val  $F'(x)$ . Per l'altra banda observem que de la definició de la integral,  $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f$  està comprès entre el suprem i l'ímfim de  $f$  a l'interval  $[x, x+h]$ . A causa de la continuïtat uniforme de tota funció contínua en un interval tancat, resulta que la diferència entre aquests suprem i ímfim es pot fer tan petita com es vulgui prenent  $h$  prou petita (la continuïtat uniforme ens garanteix que el valor absolut de la diferència dels valors de la funció en dos punts és menor que qualsevol  $\varepsilon > 0$  si la distància entre aquests dos punts és més petita que una certa  $\delta > 0$ , que podem prendre igual a  $h$ ). D'aquí que tant el suprem com l'ímfim de  $f$  a l'interval  $[x, x+h]$  tendeixen a  $f(x)$  quan  $h \rightarrow 0$ , i amb ells el valor de  $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f$ . Concloem, doncs, com volíem, que  $F'(x) = f(x)$ .

Si fem servir la notació de *Leibniz* per a indicar  $\int_a^x f$  hem de tenir compte de no fer intervenir la lletra  $x$  a l'expressió, fora de com a extrem superior de la integral. Per tant la denotaríem per

$$\int_a^x f(t) dt,$$

per exemple. Certament, no té cap importància la lletra que posem en lloc de  $t$  per indicar la variable, mentre no sigui  $x$ .

Com a conseqüència del teorema fonamental del càlcul, tenim el següent resultat, conegut com a *regla de Barrow* (Barrow fou un professor de Newton que el precedí en la càtedra de Cambridge).

Si  $f$  és derivable a l'interval  $[a, b]$  dels reals, i aquesta derivada és contínua (a  $a$  i  $b$  les derivades s'entenen per la dreta i l'esquerra respectivament), llavors

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$



Efectivament, segons el Teorema Fonamental la funció  $F$  donada per  $F(x) = \int_a^x f'$  té la mateixa derivada  $f'$  que  $f$ , i per tant  $F$  i  $f$  difereixen en una constant, tal com hem vist anteriorment. Ara bé,  $F(a) = 0$  per la qual cosa  $f(b) - F(b) = f(a)$  per a qualsevol  $b$ , que és precisament la regla enunciada.

La importància del teorema fonamental és difícil de sobrevalorar. A més de donar-nos un procediment per a definir noves funcions, ens dóna una relació entre derivada i integral que permet extreure, del coneixement de relacions entre funcions i les seves derivades (equacions diferencials) a què solen reduir-se les expressions de lleis de la natura, el coneixement d'aquestes funcions.

La primera conseqüència és que tenim les integrals de les funcions que apareixen com a derivades d'una altra, sense necessitat de calcular el límit de sumes, que ja hem vist que és prou enredat. Així, per exemple, deduïm de la derivada de  $x^m$  que hem calculat abans, que

$$\int_a^x t^m dt = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1},$$

per a tota  $m \in \mathbb{Q}$ , mentre  $m \neq -1$ .

Tenim així tota una llista d'*integrals immediates* que són aquelles que resulten de conèixer les derivades de les funcions.

### 3.17 Propietat del valor mitjà per a la integral

De la definició de la integral deduïm que si  $m \leq f(x) < M$  per  $x \in [a, b]$ , per a una funció contínua  $f$ , llavors existeix  $\mu \in [m, M]$  amb la propietat que  $\int_a^b f = (b-a)\mu$ .

A més, pel teorema de Bolzano tenim que existeix  $\xi \in (a, b)$  tal que  $\mu = f(\xi)$ , amb la qual cosa obtenim el *teorema del valor mitjà per a la integral*: existeix  $\xi \in (a, b)$  tal que  $\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$ .

També resulta útil considerar la integral del producte  $fg$  a l'interval, essent les dues funcions contínues. Llavors, com que  $m \leq f(x) \leq M$ , resulta que  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$  per tots els valors de  $x \in [a, b]$ . Integrant els termes d'aquesta desigualtat, resulta que

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g,$$

i utilitzant de nou el teorema de Bolzano per  $f$  contínua obtenim aquesta altra versió més forta del teorema del valor mitjà per la integral: existeix  $\xi \in (a, b)$  tal que

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

### 3.18 Teorema fonamental del càlcul i regla de la cadena

Utilitzant el teorema fonamental del càlcul i la regla de la cadena podem calcular la derivada de la integral d'una funció, quan els extrems de l'interval d'integració són funcions.

Així, si considerem la funció

$$I_f : x \mapsto \int_a^x f,$$

el teorema fonamental del càlcul ens diu que  $I'_f = f$ .

Si ara tenim la composició de funcions

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{I_f} \int_a^{g(x)} f,$$

on, amb aquest diagrama, desglossem la funció composta  $I_f \circ g$ , la regla de la cadena ens diu  $(I_f \circ g)' = (I'_f \circ g) \cdot g'$ , la qual cosa en aquest cas ens dóna

$$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Si el que volem és derivar la funció de  $x$  donada per  $\int_{h(x)}^{g(x)} f$ , el que fem és considerar-la igual a  $\int_a^{g(x)} f + \int_{h(x)}^a f$ , i ens queda

$$\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

## Exercicis i problemes

1. Dibuixeu a mà alçada diferents possibilitats de gràfiques de funcions, sense que hagin de correspondre necessàriament a expressions algèbriques o analítiques, però incloeu gràfiques d'algunes funcions racionals i contenint radicals.

A partir d'aquestes gràfiques dibuixeu, també a mà alçada, les derivades i les integrals indefinides corresponents.

2. Demostreu que la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{si } x = p/q, p \text{ i } q \text{ sense factors comuns,} \end{cases}$$

és contínua a tots els punts  $x \notin \mathbb{Q}$  i discontinua si  $x \in \mathbb{Q}$ , excepte si  $x = 0$ .

3. Demostreu que  $f(x) = |x|^a$  és derivable amb derivada contínua a  $x = 0$  si  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$ , i no ho és si  $0 < a \leq 1$ .
4. Demostreu que si  $f$  és derivable en l'interval  $I = [a, b]$ , llavors la imatge sota  $f'$  de  $I$  és un interval (possiblement no acotat).
5. Calculeu la derivada d'ordre 100 de

$$f(x) = 1/(x^2 - 1).$$

6. Ajudant-nos amb la derivada, podem saber quantes solucions reals té l'equació de tercer grau  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ . Com ho fem? Utilitzant el criteri que s'ha trobat, mostreu que  $x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$  té tres solucions reals.

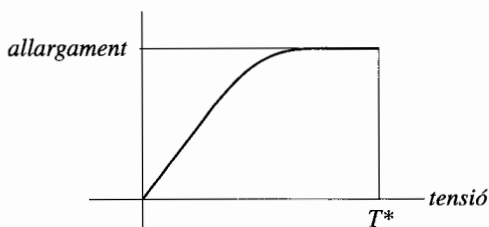
7. Demostreu que si un polinomi  $P$  de grau  $n$  s'anul·la a  $n$  punts diferents, llavors la seva derivada s'anul·la a  $n - 1$  punts diferents.

En canvi pot ser que la derivada s'anulli a  $n - 1$  punts i  $P$  no s'anulli més que en un punt si  $n$  és senar, i a cap punt si  $n$  és parell. Doneu-ne un exemple.

8. Suposem  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ . Demostreu que llavors  $f$  és constant.
9. Utilitzant la fórmula d'Al-Karhi per la suma dels  $n$  primers cubs (vegeu l'exercici 1 del capítol 2), calculeu directament la integral  $\int_a^b x^3 dx$ . Com ens ho faríem per calcular directament a partir de la definició  $\int_a^b x^n dx$  amb  $n > 3$ ? Una manera de fer-ho es mostra al llibre de Guzmán i Rubio inclòs a la bibliografia.

10. Per tal de trobar  $\int_0^a x^m$ ,  $m \in \mathbb{Q}$ ,  $m \neq -1$ , *Fermat* divideix l'interval  $[0, a]$  en intervals de longitud en progressió geomètrica, i suma les àrees dels rectangles que tenen per base cada un d'aquests intervals i per altura el valor de la funció en un dels seus extrems. Fent tendir a 1 la raó de la progressió geomètrica, s'obté com a límit el valor de la integral. Intenteu obtenir-lo.
11. Volem assegurar-nos que una corda no es trencarà en fer "pònting", és a dir, en llançar-nos en caiguda lliure fins que la corda, amb un extrem fixat al punt de sortida, ens aturi.

De la corda, en tenim la gràfica que ens dóna l'allargament (increment de longitud per unitat de longitud) en funció de la tensió, i és del tipus



Aquí  $T^*$  és la tensió que produeix la ruptura de la corda.

Què hem d'exigir d'aquesta característica?

Aquesta exigència depèn de la longitud de la corda?

12. Demostreu que si  $f'$  és contínua a l'interval  $I = [a, b]$ , i  $\sup_{x \in I} |f'(x)| = M$ , llavors  $|f(x)| \leq |f(a)| + M|x|$ .
13. Per a quines funcions  $f$  es compleix  $f''(x) = x^n$ ?  
I per a quines  $f^{(m)}(x) = x^n$ ?

14. Calculeu

$$\int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 4)^{-100} dx.$$

Sugerim tenir en compte que  $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h) dx$ , la qual cosa es dedueix directament de la definició de la integral.

15. *Balística al buit i amb gravetat uniforme*: Si  $y$  és l'altura del projectil, tenim  $y''(t) = -g$ , amb  $y(0) = 0$  i  $y'(0)$  essent la component vertical de la velocitat de sortida donada ( $g > 0$  és l'acceleració deguda a la

gravetat). Si  $x$  és el desplaçament horitzontal del mateix projectil, tenim  $x'(t) = x'(0)$ , constant igual a la velocitat horitzontal inicial.

Demostreu que la trajectòria de la bala és una paràbola i trobeu el punt en què  $y(t)$  torna a ser 0.

16. Escriviu les derivades de les funcions donades per

(a)  $h(x) = \int_a^x f g$

(b)  $f^{-1}$  si  $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ .

## Apèndixs

### 1. El teorema de Bolzano

Sigui  $I = [a, b]$  i  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua amb  $f(a) < 0 < f(b)$ . Llavors existeix  $x \in (a, b)$  tal que  $f(x) = 0$ .

Demostració:

Notem primer que si  $f(x) > 0$  (resp.  $f(x) < 0$ ) per a alguna  $x \in (a, b)$ , llavors existeix  $\varepsilon$  tal que  $0 < \varepsilon < f(x)$  (resp.  $0 > -\varepsilon > f(x)$ ). Per la definició de continuïtat tindrem llavors que existeix  $\delta > 0$  tal que per  $y$  a l'interval  $(x - \delta, x + \delta)$  es verifica  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ , i per tant  $f(y) > 0$  (resp.  $f(y) < 0$ ). Als extrems  $a$  i  $b$  tindrem intervals  $[a, a + \delta)$  on  $f$  serà negativa i  $(b - \delta, b]$  on serà positiva.

Prenem ara  $x^* = \sup\{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$ , és a dir, la frontera superior dels valors de  $x$  pels quals  $f$  és negativa. Com que prop de  $a$ ,  $f$  és negativa i prop de  $b$ ,  $f$  és positiva, resulta que  $x^* \in (a, b)$ . Veurem que  $f(x^*) = 0$ : Efectivament, si fos  $f(x^*) > 0$ , resultaria  $f(x) > 0$  per  $x \in (x^* - \delta, b]$ , en contra de la definició de  $x^*$  com la *mínima* cota superior dels valors de  $x$  pels quals  $f$  és negativa. Si fos  $f(x^*) < 0$ , llavors  $f(x^* + \delta)$  també seria negativa, en contra del fet que  $x^*$  és cota superior dels valors de  $x$  pels quals  $f$  és negativa. Per tant  $f(x^*) = 0$ .

### 2. Una funció contínua en un interval tancat és acotada

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  és contínua, on  $I = [a, b]$ , tenim que  $\exists M > 0$  tal que  $|f(x)| < M \forall x \in I$ .

Demostració:

Donada  $\varepsilon > 0$  trobem per cada  $x \in I$  un valor  $\delta(x)$  tal que si  $|x - x_1| < \delta(x)$ , llavors  $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ . Recobrim  $I$  per intervals oberts  $I_x$  que centrats en cada  $x$  tenen radi  $\delta(x)$ , és a dir,  $I_x = \{x_1 \in I \mid |x - x_1| < \delta(x)\}$ . Com que  $I$  és un interval tancat, posseeix la propietat de Heine-Borel (compacitat), i podem triar-ne un nombre finit,  $N$ , que cobreixin  $I$ . Com que a cada un d'ells  $f$  no pot tenir valors que distin més de  $2\varepsilon$ , deduïm que els valors de  $f$  no poden diferenciar-se més de  $2\varepsilon N$ . Per tant tenim que si  $M = |f(a)| + 2\varepsilon N$ , llavors  $|f(x)| < M$  per tota  $x \in I$ .

### 3. Una funció contínua en un interval tancat ateny el seu suprem i el seu ínfim

Si  $m = \inf\{M \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq M, x \in I\}$ , llavors existeix  $x \in I$  tal que  $f(x) = m$ .

Demostració:

Com que  $m$  és la mínima cota superior dels valors de  $f$  a  $I$ , o bé existeix  $x$  amb  $f(x) = m$ , i en tal cas ja tenim el que volem, o bé hi ha una successió

infinita  $\{x_n\}$  de punts de  $I$  tals que  $\{f(x_n)\} \rightarrow m$ . Per ser  $I$  tancat té la propietat de Weierstrass (compacitat), i el conjunt  $\{x_n\}$  té un punt d'acumulació a  $I$ ,  $x$ , per al qual tenim que existeix una subsuccessió  $\{x_{n_i}\}$  que hi convergeix.

Com que la funció és contínua això implica que  $f(x_{n_i}) \rightarrow f(x)$ . Per tant  $f(x) = m$ , tal com volíem demostrar.

#### 4. Una funció contínua en un interval tancat és uniformement contínua

A la definició de continuïtat podem prendre  $\delta$  independent del punt on avaluem la funció, és a dir  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  tal que  $|x - y| < \delta_\varepsilon$  implica  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ , on  $\delta_\varepsilon$  no depèn de  $x$ . En aquest cas diem que la funció és uniformement contínua.

Demostració:

Donada una  $\varepsilon > 0$  considerem els valors  $\delta_{x,\varepsilon}$  de la definició de continuïtat, de manera que si  $|x - y| < \delta_{x,\varepsilon}$ , llavors  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$  (canviant  $\varepsilon$  per  $\varepsilon/2$ , cosa que podem fer perquè les  $\delta$  existeixen, encara que depenguin del valor de  $\varepsilon$ , per a cada valor de  $\varepsilon > 0$ , en particular per a  $\varepsilon/2$ ).

Considerem ara els intervals oberts  $I_{x,\delta}$  centrats a cada punt de  $x$  de  $I$  i de radi  $\delta_{x,\varepsilon}/2$  (volem dir tots els punts  $y$  de  $I$  que compleixen  $|x - y| < \delta_{x,\varepsilon}/2$ ). Certament formen un recobriment de  $I$  i per la compacitat (propietat de Heine-Borel), n'existeix un nombre finit d'entre ells que constitueixen un recobriment (subrecobriment, respecte del primer) de  $I$ . Diguem que són els centrats a  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Sigui ara  $\delta_\varepsilon$  el mínim dels radis d'aquests intervals, és a dir,  $\delta_\varepsilon = \min_{i=1,\dots,n} \{\delta_{x_i,\varepsilon}/2\}$ . Tenim que si  $|x - y| < \delta_\varepsilon$ , llavors existeix alguna  $x_i$  tal que  $|x - x_i| < \delta_\varepsilon$  i  $|y - x_i| < \delta_\varepsilon$ , de la qual cosa es dedueix que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(y) - f(x_i)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

que és el que volíem demostrar.

#### 5. Límits de funcions i successions

El límit de funcions es pot reduir al límit de successions de la següent manera. Resulta que  $f(x) \rightarrow l$  quan  $x \rightarrow a$  si i sols si per a tota successió  $\{x_n\} \rightarrow a$  tenim que  $\{f(x_n)\} \rightarrow l$ . Els límits per l'esquerra i per la dreta es caracteritzen perquè les successions convergents corresponents tenen  $x_n > a$  o  $x_n < a$ , respectivament.

Per tal de practicar una mica donarem una demostració del primer cas i deixarem com a exercicis els altres casos.

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , llavors ja sabem que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta$ , llavors  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . Ara, si  $\{a_n\} \rightarrow a$ , tenim que  $\exists n_0$  tal que  $n > n_0$ , llavors  $|a_n - a| < \delta$ . Per tant  $|f(a_n) - l| < \varepsilon$ , i això demostra que  $\{f(a_n)\} \rightarrow l$ .

Recíprocament suposem que per a tota successió  $\{a_n\}$  amb límit  $a$  tenim  $\{f(a_n)\} \rightarrow l$ . Si  $f(x)$  no tendís a  $l$  quan  $x$  tendeix a  $a$ , llavors existiria  $\varepsilon > 0$  tal que per a tota  $\delta > 0$  i per a alguna  $x$  amb  $0 < |x - a| < \delta$  es tindria  $|f(x) - l| > \varepsilon$ . Escollint valors de  $\delta$  iguals a  $\frac{1}{n}$ , obtindríem valors  $x_n$  tals que  $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$  amb  $|f(x_n) - l| > \varepsilon$ . Certament la successió  $\{f(x_n)\}$  no convergeix a  $l$ , en contra de la hipòtesi, i això vol dir que  $f(x)$  ha de tendir a  $l$ .

Veiem com en formalitzar una mica un argument relativament senzill, s'ha d'escriure força més que utilitzant dibuixos i arguments intuïtius. Hem de tenir en compte, però, que encara que en el cas que acabem de tractar no hi ha hagut sorpreses, sí que tota l'anàlisi matemàtica necessita certa formalització per no concloure resultats erronis, ja que, com mostren alguns contraexemples, la intuïció geomètrica no entrenada pot saltar a conclusions errònies (d'aquí el nom *contraexemple*).

## 6. Extensió contínua d'una funció uniformement contínua a la clausura del seu domini

Si una funció  $f$  és uniformement contínua amb un cert domini no tancat, llavors podem estendre-la a una funció contínua definida a la *clausura* del domini. És a dir, existeix una funció que coincideix amb  $f$  als punts en què aquesta està definida, que és contínua, i que el seu domini conté tots els punts d'acumulació del domini original. Recordem que un punt d'acumulació d'un conjunt és aquell tal que qualsevol dels seus entorns conté punts del conjunt. La *clausura d'un conjunt* és el conjunt que s'obté en afegir-li tots els seus punts d'acumulació.

Per veure-ho, suposem que  $x = \lim x_n$  és un punt d'acumulació del domini de  $f$ , al qual pertanyen els punts  $x_n$ . Tenim llavors que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $|x_m - x_n| < \delta$ , llavors  $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$  (això perquè  $f$  és uniformement contínua). Per tant  $\{f(x_n)\}$  és convergent, puix que és de Cauchy. Suposem que convergeix a  $y$ . Definim doncs  $y = f(x)$ , i la funció estesa a  $x$  és contínua (uniformement).

En particular, si el domini de  $f$  és dens a un interval  $I$ , la funció s'estén continuament a tot  $I$ .

Aquest procediment d'extensió, l'utilitzarem per a definir la funció de Cantor a la secció 9 d'aquest apèndix, i, més endavant, per a definir l'exponencial a partir dels seus valors als racionals, i també per a definir la corba de Peano.

## 7. La integral de Riemann

La integral que hem definit al text s'aplica a funcions contínues i contínues a trossos. Per tal d'exemplar una mica més el repertori de les funcions definides en un interval finit  $I = [a, b]$ , per a les quals podem definir la integral de  $f$  acotada a  $I$ , és a dir, l'àrea sota la gràfica, s'aplica el següent procediment:

Es divideix  $I$  en  $n$  intervals  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ , mitjançant els punts  $x_j$ ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Ara calculem les que anomenem *sumes*



superiors

$$S = \sum_{j=1}^n \sup_{x \in I_j} \{f(x)\} (x_j - x_{j-1}).$$

I les sumes inferiors

$$s = \sum_{j=1}^n \inf_{x \in I_j} \{f(x)\} (x_j - x_{j-1}).$$

Certament, aquestes sumes depenen de com hem escollit la partició  $\{I_j\}$ , és a dir, els punts  $x_j$ .

Observem que la suma superior corresponent a  $\{I_j\}$  és no menor que la que correspon a suma inferior. També observem que si a  $\{x_j\}$  hi afegim més punts,  $S$  no pot créixer ni  $s$  decreixer. D'aquí que una suma superior no és mai més petita que una d'inferior, independentment de les respectives particions (n'hi ha prou amb considerar la partició obtinguda de la unió de les  $x_j$  de les dues particions). Per tant, les sumes superiors estan acotades inferiorment i tenen una frontera inferior  $S^*$ , mentre que les sumes inferiors tenen una frontera superior,  $s^*$ . Si  $S^* = s^*$ , diem que aquest valor és la *integral de Riemann* de  $f$  a l'interval  $I$ , i ho denotem com al text amb  $\int_a^b f$  o bé  $\int_a^b f(x) dx$ .

Quines funcions tenen integral de Riemann? Es pot demostrar que són aquelles i només aquelles funcions acotades a  $I$  que són contínues excepte potser en un conjunt de mesura zero. Un *conjunt de mesura zero* és aquell que per a cada  $\varepsilon > 0$  es pot recobrir amb un conjunt numerable d'interval oberts  $\{O_i\}$ , la suma de les longituds dels quals,  $\sum_{i=1}^{\infty} l(O_i)$ , (això és una sèrie infinita, és a dir la successió de sumes  $\sum_{i=1}^n l(O_i)$ , que ha de convergir) no sobrepassi  $\varepsilon$ .

Si la funció és contínua, o contínua a trossos, la integral de Riemann coincideix amb la del text. La cosa és diferent si la funció no és contínua, per exemple la funció

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

que és discontinua només als punts racionals, té integral de Riemann sobre l'interval  $[0, 1]$  igual a 1 (els racionals són numerables i es pot cobrir el corresponent al número  $i \in \mathbb{N}$  amb un interval obert de longitud  $\varepsilon/2^i$ . Es té llavors que  $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i = \varepsilon$ , i per tant el conjunt dels racionals de l'interval  $[0, 1]$  té mesura 0). En canvi la integral de Cauchy (la del text) tindrà un valor diferent perquè les  $x_i$  cauran en números racionals.

## 8. La integral de Lebesgue

Podríem tenir interès a eixamplar encara més el catàleg de les funcions  $f$  definides a un interval  $I$ , per a les quals es pot definir la integral, de manera que correspongui a la nostra idea intuïtiva d'àrea sota la gràfica. L'interès d'ampliar les funcions és el d'obtenir una "completesa" de les funcions integrables

semblant a la completesa dels números reals: voldríem que si tenim una successió de funcions  $f_n$  que sigui de Cauchy en cert sentit, llavors aquesta successió convergeixi també en cert sentit. Precisant més, el que volem és que si per cada  $\varepsilon > 0$  existeix un natural  $N_\varepsilon$  tal que  $n, m > N_\varepsilon$  impliquen  $\int |f_m - f_n| < \varepsilon$ , llavors existeix una  $f$  integrable que compleix que  $\int |f - f_n|$  tendeix a 0 quan  $n$  tendeix a  $\infty$ .

Aquesta “completesa”, i a més d’altres propietats, fan que la integral de Lebesgue hagi resultat enormement fecunda en el desenvolupament de l’anàlisi matemàtica contemporània.

La *integral de Lebesgue* d’una funció no negativa es defineix de la següent manera:

Es pren una partició  $0 = y_0, y_1, y_2, \dots$  de manera que  $y_j - y_{j-1} = h$  sigui constant. Es mesura el conjunt  $A_i$  de punts  $x$  tals que  $y_i \leq f(x) < y_{i+1}$ , i es considera  $s_h = \sum_{i=1}^{\infty} (y_i \cdot \text{mes}(A_i))$  (vegeu l’apèndix del capítol anterior per a la definició de la mesura de  $A_i$ ,  $\text{mes}(A_i)$ ). Ara considerem el límit de  $s_h$  quan  $h \rightarrow 0$ . Si això existeix aquesta és la integral de Lebesgue  $\int_I f$ . Aquesta integral coincideix amb la de Riemann per a les funcions que posseeixen aquesta darrera. Si una funció  $f$  és negativa en alguna part, prenem  $f = f^+ - f^-$  on  $f^+$  i  $f^-$  són funcions no negatives i definim  $\int f = \int f^+ - \int f^-$  (les funcions  $f^+$  i  $f^-$  són conegudes com la *part positiva* i la *part negativa* de  $f$ ). Notem que quan posem  $\int_I$  volem dir  $\int_a^b$  i no  $\int_b^a$ , que seria de signe contrari.

*Exemple.* Les funcions no acotades, com ara

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

tenen una integral de Lebesgue ben definida, però no de Riemann. Tot i això les tractarem més endavant en la secció d’integrals dites impròpies, a partir de la definició que hem donat al text.

Notem que les integrals de Lebesgue de dues funcions que difereixen només en un conjunt de mesura zero són iguals. Això fa que la integral a un interval pugui estar definida encara que el domini de la funció no sigui tot l’interval, sinó un conjunt que en difereixi en un conjunt de mesura nul·la. A les seccions següents donem un exemple, la derivada de la funció de Cantor, que no és definida a tot arreu, de l’interval  $[0, 1]$ , però per la qual definim la integral de Lebesgue.

## 9. La funció de Cantor

Definim una funció al complement del conjunt ternari de Cantor a l’interval  $[0, 1]$  (vegeu l’apèndix 6 del capítol 2), que resulta d’interès per a il·lustrar la continuïtat no absoluta.

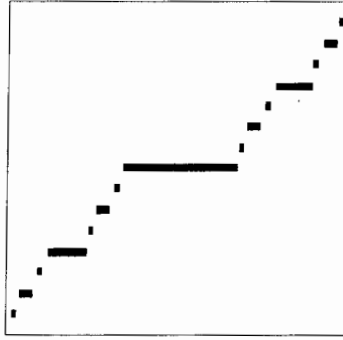
Per a definir-la, recordem que el conjunt de Cantor és el que queda després d’anar sostraint successivament els terços del mig de cada un dels intervals que van quedant, començant amb  $[0, 1]$ . La *funció de Cantor*, la definim primer al

complement del conjunt de Cantor dient que el seu valor a l'interval que traiem és constant i igual a la mitjana dels valors que ja li han estat adjudicats als punts més propers.

Queda així que

$$\begin{aligned} f(x) &= 1/2 & , & \text{ per a } x \in (1/3, 2/3), \\ f(x) &= 1/4 & , & \text{ per a } x \in (1/9, 2/9), \\ f(x) &= 3/4 & , & \text{ per a } x \in (7/9, 8/9), \text{ etc.} \end{aligned}$$

D'aquesta manera obtenim una funció esglaonada que té per domini el conjunt ternari de Cantor, que té una gràfica com la de la figura



Una altra manera de definir aquesta funció és veure que els intervals del conjunt de Cantor són els de la forma  $(a, b)$ , en què, en base 3, l'expressió de  $a$  només té les xifres 0 i 2, excepte la darrera que és 1 (si no acceptem cues infinites de dosos), i que l'expressió de  $b$  és la mateixa, canviant aquest 1 per un dos. Per exemple, l'interval  $(0.20002021, 0.20002022)$  (en base 3). El valor de la funció en aquest interval el definim amb l'expressió en base 2 que obtenim en canviar la xifra 2 en 1. En el nostre exemple tenim  $f(x) = 0.10001011$  (en base 2).

D'aquesta manera hem definit una funció  $f$  al complement del conjunt de Cantor  $C$ . Per altra banda ja sabem que aquest complement és dens a l'interval  $[0, 1]$ , és a dir, que qualsevol entorn de qualsevol punt de  $C$  interseca el complement de  $C$  on tenim la funció. Comprovarem ara que la funció  $f$  és uniformement contínua, i que, per tant es pot estendre a una funció, diguem-ne  $f$  també, contínua a tot l'interval  $[0, 1]$ , tal com hem vist a la secció 6 d'aquest apèndix.

Efectivament, si donem  $\varepsilon > 0$  arbitrària, prenent  $|x - y| < 1/3^m$  resulta que  $|f(x) - f(y)| < 1/2^m$ , que és menor que  $\varepsilon$  si  $m$  és prou gran. Aquí hem utilitzat que  $f$  és monòtona i que el salt màxim en un interval de longitud  $1/3^m$  és  $1/2^m$ .

La funció contínua i monòtona definida a l'interval  $[0, 1]$  és coneguda com a *funció de Cantor*.

Observem que  $f$  aplica el conjunt ternari de Cantor sobre tot l'interval  $[0, 1]$ .

## 10. La continuïtat absoluta

El fet que la integral indefinida de la derivada d'una funció ens retorna la funció, excepte per una constant additiva (regla de Barrow), deixa de ser vàlid en el context de la integral de Lebesgue, quan la derivada de la funció no és contínua.

Per exemple, per a la funció de Cantor  $f$  que hem estudiat en la secció anterior, tenim que la seva derivada és igual a 0 excepte en un conjunt de mesura 0, el conjunt ternari de Cantor, on la derivada no existeix. Com que la integral de Lebesgue existeix per una funció encara que aquesta no estigui definida en un conjunt de mesura nul·la, resulta que  $F(x) = \int_0^x f' = 0$  per a qualsevol  $x \in [0, 1]$ . Certament  $F$  no coincideix amb la funció de Cantor de la qual  $f$  n'és la derivada, i que, en particular, per  $x = 1$  val 1.

Hi ha, però, tota una família de funcions, que s'anomenen *absolutament contínues*, que tenen derivada excepte en un conjunt de mesura nul·la, i per a les quals val la regla de Barrow amb la integral de Lebesgue, és a dir, que  $\int_a^x f' = f(x) - f(a)$ . És a dir, les funcions absolutament contínues són les integrals indefinides de les funcions que tenen integral en el sentit de Lebesgue.

Una caracterització de les funcions absolutament contínues, que no utilitza ni la derivada ni la integral, és la següent:

$f$  és absolutament contínua a l'interval  $[a, b]$ , si per qualsevol  $\varepsilon > 0$ , existeix  $\delta > 0$  tal que si  $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ , llavors  $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ , on els intervals  $I_i = [a_i, b_i]$  no s'intersequen, i estan continguts a  $[a, b]$ .

En particular, una funció absolutament contínua és contínua.

Per més detalls es pot consultar el llibre de Royden (vegeu la bibliografia).

## 11. Aproximació de números algebraics per números racionals

A l'apèndix 7 del capítol anterior hem enunciat el resultat de Liouville que ens diu que si  $\alpha$  és un número algebraic d'ordre  $n$ , llavors existeix un número  $c$  positiu tal que per a qualsevol racional  $p/q$  es compleix  $|\alpha - p/q| > c/q^n$ . Aquí ho demostrarem.

Suposem que  $P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0$ . Tenim

$$\begin{aligned} P\left(\frac{p}{q}\right) &= a_0 + a_1\frac{p}{q} + \dots + a_n\frac{p^n}{q^n} \\ &= (a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \dots + a_np^n)\frac{1}{q^n}. \end{aligned}$$

Apliquem ara la propietat del valor mitjà per la derivada, i obtenim

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| |P'(\xi)|,$$

on  $\xi \in (\alpha, p/q)$ , i d'aquí

$$|a_0q^n + \dots + a_np^n| \frac{1}{q^n} = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| |P'(\xi)|.$$

Com que  $|a_0q^n + \dots + a_np^n|$  és un natural més gran que 1, resulta

$$\frac{1}{q^n} \leq \left| P \left( \frac{p}{q} \right) \right| = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| |P'(\xi)|.$$

A causa del fet que  $|P'(\xi)|$  està acotat en un interval fixat centrat a  $\alpha$ , diguem per  $1/c$ , obtenim la desigualtat cercada pels punts  $p/q$  a aquest interval. Fora de l'interval la desigualtat certament també es compleix per a un valor adequat de  $c$ .



## Capítol 4

# Les funcions elementals

### 4.1 Introducció històrica

Els mesopotamis de fa 4000 anys sabien com operar amb els números. Tenien un sistema posicional de base 60 i aproximaven números irracionals amb tanta precisió com volien. En una tauleta d'argila es troba gravat en la seva notació cuneïforme el valor de  $\sqrt{2}$  amb una aproximació equivalent a les sis primeres xifres decimals correctes. Aquest sistema de numeració els va permetre elaborar una astronomia gens trivial. A l'època selèucida, fa 23 segles, ja confeccionaven efemèrides, per tal de bastir el seu calendari, indicant la posició del Sol, la Lluna i els planetes a l'esfera celest amb molts anys d'anticipació. Això vol dir que a més de la capacitat de representar números i d'operar-hi, també havien desenvolupat eines per a mesurar i representar les posicions a l'esfera celest, i també per a calcular el moviment dels astres esmentats. Entre les eines matemàtiques cal destacar la utilització de les coordenades esfèriques, que inclou la mesura angular del cercle en graus, minuts i segons. Per tal de fer els seus càlculs i relacionar la teoria amb les observacions, havien de conèixer alguna trigonometria esfèrica, que sens dubte van haver de desenvolupar. Avui no tenim cap document explícit de com portaven a terme els càlculs, però s'han trobat moltes efemèrides gravades en tauletes d'argila de les quals podem deduir alguns dels processos matemàtics utilitzats.

Més tard *Apolloni*, *Hiparc* i *Ptolemeu*, de la cultura hellenística d'Alexandria, van idear una teoria que explicava el moviment dels astres del sistema solar, fent servir el llenguatge geomètric dels cicles i els epicicles en lloc del llenguatge aritmètic i les tècniques interpoladores dels mesopotamis. Aquest model geomètric fou el que essencialment va prevaler a l'astronomia del sistema solar fins arribar a incloure-hi *Copèrnic* i *Tycho Brahe*, i només va ser abandonat amb la teoria de *Kepler* i, poc després, per la teoria encara més innovadora de la mecànica de *Newton*, que redueix el problema al càlcul infinitesimal i més precisament a les equacions diferencials, i que és la que emprem encara ara en l'àmbit del sistema solar. A la teoria de *Ptolemeu*, explicada i utilitzada en la

seva *Sintaxi Matemàtica*, més coneguda com *Almagest* (El Més Gran), s'aplica la trigonometria i, per primera vegada, s'explicita una *funció circular* (o *funció trigonomètrica*, encara que aquest nom no apareix abans del Renaixement). Aquesta funció, relacionada directament amb el que avui coneixem per *sinus* d'un angle, és la corda inclosa per l'angle centrat en un cercle de radi donat. Utilitzant aquesta funció de l'angle es fan els càlculs astronòmics, que permeten relacionar les coordenades de l'esfera celest amb les observacions. El treball de *Ptolemeu* i els seus seguidors va ser conegut a l'Índia i més tard, fa uns 11 segles, pels àrabs de Bagdad (tornem a la Mesopotàmia!), que ja van definir les funcions trigonomètriques dels angles com les coneixem avui. De fet la paraula *sinus* apareix en fer els àrabs una mala traducció d'un terme hindú.

Resulta que el sinus d'un angle, que es pot definir com la meitat de la corda inclosa pel doble de l'angle centrat a l'origen d'un cercle de radi unitat, no es pot obtenir, tal com es va demostrar al segle XIX, de manera algebàrica (és a dir mitjançant funcions racionals i les seves inverses) a partir de l'angle. Per tal d'utilitzar les funcions circulars se'n van fer taules, és a dir, llistes dels valors d'aquestes funcions per valors dels angles separats per intervals prou petits perquè mitjançant interpolació es pogués tenir una bona aproximació. De fet, la confecció de taules de funcions trigonomètriques ha estat de primera importància per la matemàtica pràctica fins a l'adveniment de les calculadores electròniques, que permeten l'avaluació directa d'aquestes funcions per mètodes dels quals parlarem més endavant. I les funcions trigonomètriques no són útils només en l'astronomia, sinó també en la navegació, la topografia, la mineria, l'agrimensura, la construcció, el disseny, etc. Calcular amb funcions trigonomètriques comportava fer multiplicacions de números amb moltes xifres decimals, la qual cosa era extremament laboriosa sense l'ajut de les calculadores que tenim avui. Així va sorgir al principi del segle XVII la *funció logarítmica*, que permet substituir la multiplicació de dos números per la suma dels seus logaritmes. Els artífexs de les primeres taules de logaritmes van ser *Napier*, *Bürgi* i *Briggs*. Ja hem parlat en la introducció del capítol 3 del procediment que utilitza *Napier* per a definir el seu logaritme: considera dos punts movent-se, l'un al llarg d'un segment de longitud  $10^7$ , començant amb velocitat 1 en un extrem i tenint en cada punt una velocitat proporcional al que li falta per arribar a l'altre extrem, i l'altre al llarg d'una semirecta amb velocitat constant igual a 1. El que li falta al primer punt per arribar a l'extrem és el sinus (que es considerava calculat a un cercle de radi  $10^7$ ) i l'interval recorregut pel segon és el seu logaritme. La relació d'aquest logaritme amb el logaritme neperià o natural que coneixem avui ve donada per la fórmula  $\ln_N x = 10^7 \ln(10^7/x)$ , on  $\ln_N$  és el logaritme donat per Napier i  $\ln$  és el logaritme natural, que definirem al capítol següent. També tenim que  $\ln_N xy = \ln_N x + \ln_N y - \ln_N 1$ , és a dir, que no es compleix estrictament que el logaritme del producte és la suma dels logaritmes dels factors. Poc després *Briggs* va confeccionar una taula de logaritmes, anomenats *logaritmes decimals*, que complien amb  $\ln 10 = 1$  i  $\ln xy = \ln x + \ln y$ , i que han estat universalment utilitzats, fins a l'aparició de les calculadores electròniques d'avui. De taules de logaritmes, se n'han fet mol-



tes al llarg dels anys, amb més i més valors tabulats i amb gran aproximació. Fem notar que ja les taules de Napier i Briggs tenien un gran nombre de xifres decimals (14 a les taules de Briggs!), i que per tal de confeccionar-les van fer servir mètodes força enginyosos i refinats.

La *funció exponencial*, per altra banda, es pot considerar l'*antilogaritme*, és a dir, la funció inversa del logaritme, encara que ja té prou entitat per ella mateixa i apareix de manera natural en les solucions d'equacions diferencials que modelen moltes situacions pràctiques.

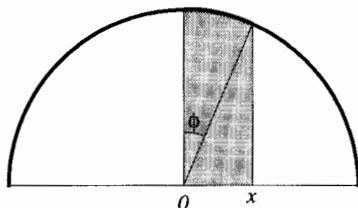
Amb el temps les funcions circulars i la logarítmica i l'exponencial han quedat normalitzades, de manera que les circulars es consideren en un cercle de radi 1, en què els angles es mesuren en radians, és a dir, com la longitud de l'arc abraçat per l'angle al centre del cercle. Per altra banda, en la matemàtica teòrica la funció logarítmica es pren en *base e*, i s'anomena el *logaritme natural* o *neperià* (encara que, com ja hem dit, no és ben bé el de Napier). La *funció exponencial* és la inversa del logaritme natural. A les seccions que segueixen donem una definició més rigorosa, deslliurada de la intuïció geomètrica, d'aquestes funcions, que són anomenades *funcions elementals*, i a partir de les quals se'n defineixen moltes més.

## 4.2 Les funcions circulars

Per donar les funcions trigonomètriques d'un angle agut se sol considerar un triangle rectangle amb aquest angle i llavors es defineix el sinus com la raó entre el catet oposat a l'angle i la hipotenusa. El *cosinus* seria la raó entre l'altre catet i la hipotenusa; la tangent, la raó del primer catet al segon. El problema rau en la manera de mesurar l'angle. Si el sinus ha de ser una funció, hem de dir quin número real associem al número real que mesura l'angle. Tant si ho fem en graus, dividint la circumferència en 360 parts "iguals" com si ho fem en radians, que és la longitud de l'arc que l'angle inclou centrat en un cercle de radi 1, hem de descansar en la noció de longitud d'arc, que és prou intuïtiva, però que no hem definit amb rigor encara. La definició de les funcions trigonomètriques es pot fer de diverses maneres, com ja anirem veient, però de moment escollirem una via rigorosa, basada en la intuïció que ja tenim, i en el teorema fonamental del càlcul.

Considerem un cercle de radi unitari i un angle  $\phi$ , que de moment prendrem agut, amb vèrtex al seu centre. Volem mesurar l'angle com el doble de l'àrea del sector que determina: quan el sector sigui tota la circumferència, és que l'angle és  $2\pi$ . (Aquí estem denotant per  $\pi$  l'àrea del cercle unitari).

De la figura se segueix que l'àrea del sector és l'àrea sota la circumferència menys l'àrea del triangle



La funció que té per gràfica la circumferència és  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $x \in [-1, 1]$ , i per tant l'àrea  $A(\phi)$  del sector ve donada per

$$A(\phi) = \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

I ara deixem de banda la intuïció, i definim directament una funció de  $x$  que anomenem *arc sinus*, i denotem per  $\arcsin$ , i que serà la mesura de l'angle  $\phi$  en radians, mitjançant

$$\arcsin(x) = 2 \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt - x\sqrt{1-x^2}.$$

O sigui que l'angle  $\phi$  mesurat en radians té per sinus el valor  $x$ .

Aquesta funció està ben definida per a  $x \in [-1, 1]$ , i pren valors a  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Determinem la derivada d'aquesta funció. Pel teorema fonamental del càlcul tenim

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt = \sqrt{1-x^2},$$

i aplicant les regles de derivació d'un producte, d'una arrel i d'un polinomi, resulta

$$\frac{d}{dx} (x\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

de manera que

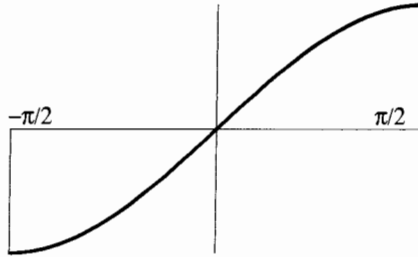
$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Aquesta derivada està definida i és positiva a  $(-1, 1)$ , i tendeix a infinit quan  $x \rightarrow \pm 1$ , ja que  $\sqrt{1-x^2}$ , el denominador, tendeix a 0.

Això ens diu que la funció és creixent, i que, per tant, té inversa. Podem, doncs, definir una funció que anomenarem *sinus*, i que denotarem per "sin", com

$$\sin = \arcsin^{-1}.$$

Aquesta funció té per domini  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , i té una gràfica com es mostra



Per definir-lo per a tots els valors de  $x \in \mathbb{R}$ , el que fem és prolongar-la de manera simètrica

$$\sin(x + \pi) = -\sin x \quad \text{i} \quad \sin(x) = -\sin(-x).$$

Resulta així una funció periòdica, amb període  $2\pi$  :  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ .

La derivada de “sin” es troba a partir de la fórmula que tenim per la derivada de la funció inversa d’una altra.

Com que  $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$ , ens resulta, prenent  $f = \arcsin$ , que

$$\sin'(x) = \frac{1}{f'(\sin(x))} = \sqrt{1 - (\sin(x))^2}.$$

Per tal de fer més elegant la notació, no es posen tants parèntesis si és que no ens podem confondre. Així, escrivim  $\sin x$  en lloc de  $\sin(x)$ , i  $\sin^2 x$  en lloc de  $(\sin(x))^2$ . D’aquesta manera la fórmula per la derivada del sinus queda

$$\sin' x = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

A la deducció anterior hem fet una trampa. En no esmentar excepcions sembla que l’hem considerada vàlida per a tots els valors de  $x \in \mathbb{R}$ . Resulta, però, que no està definida per a  $x = \pm 1$ , i per tant no podem deduir de la fórmula el valor de  $\sin'(\pm\pi/2)$ . Aquest valor, l’haurem d’obtenir d’una altra manera.

De fet tenim que  $\sin' x \rightarrow 0$  quan  $x \rightarrow \pi/2$ . Per tant, al punt  $\pi/2$  la funció és derivable per l’esquerra i té per derivada 0. Igualment quan  $x \rightarrow -\pi/2$ . D’aquesta manera resulta que  $\sin x$  és derivable i la derivada és contínua.

Segons la definició geomètrica del sinus i el cosinus, resulta que

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Adoptem, doncs, també aquesta com a definició formal del  $\cos x$ . També l’auríem pogut definir amb un procés semblant al que hem fet servir per a definir el sinus: integració i funció inversa.

D’acord amb això tenim que la derivada del sinus és el cosinus:

$$\sin' x = \cos x.$$

Insistim aquí en la natura multivaluada de l'angle, que fa que molts valors de  $x$  representin el mateix angle geomètric. Aquest, recordem-ho, és mesurat en radians i, per tant, dues  $x$  diferint en un múltiple de  $2\pi$  representen el mateix angle geomètric.

A partir del sinus es defineixen les altres funcions circulars. Ja hem vist com definir el cosinus. Les altres són

$$\begin{aligned} \text{la tangent,} & \quad \operatorname{tg} x = \sin x / \cos x, \\ \text{la cotangent,} & \quad \operatorname{ctg} x = 1 / \operatorname{tg} x, \\ \text{la secant,} & \quad \operatorname{sec} x = 1 / \cos x, \quad \text{i} \\ \text{la cosecant,} & \quad \operatorname{cosec} x = 1 / \sin x. \end{aligned}$$

Notem que totes aquestes funcions deixen d'estar definides als punts en què s'anul·len els seus denominadors. A més, no estan acotades a cap entorn d'aquests punts.

Ja sabem quina és la derivada de la funció sinus. Les derivades de les altres són, allà on són definides:

$$\begin{aligned} \cos' x &= -\sin x, \\ \operatorname{tg}' x &= 1 / \cos^2 x, \\ \operatorname{ctg}' x &= -1 / \sin^2 x, \\ \operatorname{sec}' x &= \operatorname{sec} x \cdot \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}' x &= -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

Totes aquestes expressions s'obtenen sense cap dificultat aplicant les regles de derivació i les relacions entre les funcions. Per exemple

$$\operatorname{tg}' x = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

A l'apèndix veurem com es demostra la igualtat

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

tan utilitzada en la trigonometria.

De la definició mateixa, tenim que

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Per a trobar les derivades de les funcions inverses de les altres funcions trigonomètriques, apliquem la fórmula per la derivada de les funcions inverses i alguna relació entre les funcions trigonomètriques. Així tenim:

$$\arccos' x = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)}.$$

Com que  $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ , tenim que  $\sin^2(\arccos x) + \cos^2(\arccos x) = 1$ , i per tant  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$ , d'on obtenim que

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

D'una manera semblant tenim

$$\arctg' x = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\arctg x)} = \frac{1}{\sec^2(\arctg x)}.$$

Com que  $\operatorname{tg}^2 \phi + 1 = \sec^2 \phi$ , tenim  $\operatorname{tg}^2(\arctg x) + 1 = \sec^2 \arctg x$ , i per tant  $x^2 + 1 = \sec^2 \arctg x$ , d'on concloem  $\arctg' x = 1/(1+x^2)$ .

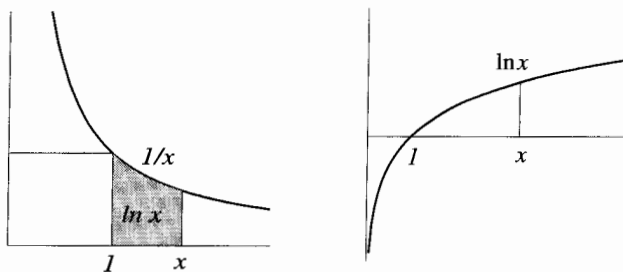
### 4.3 El logaritme natural

A l'apèndix fem una presentació del logaritme natural i de l'exponencial estenent la funció  $a^x$ , que per a nosaltres només té sentit quan  $x$  és racional, fins a incloure tots els reals. És com se sol fer a l'ensenyament secundari. Dintre del nostre text, però, ens estimem més seguir un camí més directe.

Definim el *logaritme natural* o *neperià* per

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad \text{amb } x > 0.$$

D'acord amb el teorema fonamental del càlcul aquesta funció està ben definida amb domini a  $[0, \infty)$ . Veiem així que el logaritme natural ve definit per l'àrea sota la gràfica de la hipèrbola equilàtera



Aquest fet ja va ser observat per Gregori de Sant Vicenç i el seu deixeble Antonio de Sarasa al segle XVII.

El mateix teorema fonamental del càlcul ens dóna la derivada d'aquesta funció:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Observem que les primitives de les funcions de la forma  $f(x) = x^r$  són funcions del mateix tipus quan  $r \neq -1$ . El logaritme, que correspon a aquest

valor, transcendeix el camp de les funcions d'aquesta forma. De fet, com dèiem, resulta que no es pot expressar en termes de funcions algebraïques, tal com va mostrar Liouville al segle XIX.

És fàcil veure que aquesta funció compleix les propietats fonamentals que demanem del logaritme, que són

$$\begin{aligned}\ln 1 &= 0, \quad i \\ \ln xy &= \ln x + \ln y.\end{aligned}$$

La primera propietat se segueix directament de la definició, mentre que la segona propietat l'obtenim de la següent manera:

Utilitzant les regles de derivació tenim

$$\frac{d}{dx} \ln(xy) = y \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}.$$

Per tant, en tenir la mateixa derivada que el logaritme, vol dir que, com a funció de  $x$ , difereix de  $\ln x$  en una constant:

$$\ln(xy) - \ln(x) = \text{const.}$$

Prenent  $x = 1$ , tenim que

$$c = \ln y - \ln 1 = \ln y,$$

i d'aquí que  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$  per a tots els valors positius de  $x$  i de  $y$ .

Per inducció se segueix que  $\ln(x^n) = n \ln x$ .

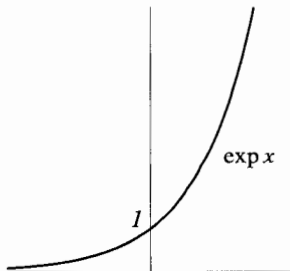
## 4.4 La funció exponencial

Com que la derivada de la funció logarítmica és positiva a  $[0, \infty)$  i pren tots els valors de  $\mathbb{R}$ , la seva funció inversa ve definida de  $\mathbb{R}$  a  $[0, \infty)$  i s'anomena *funció exponencial*. Tenim així

$$\exp = \ln^{-1}.$$

També se sol emprar la notació  $\exp(x) = e^x$ .

La seva gràfica té, doncs, el següent aspecte:



De l'expressió per la derivada d'una funció inversa obtenim immediatament

$$\exp' = 1/(1/\exp) = \exp.$$

De la definició se segueix de seguida que

$$\exp(0) = 1 \quad (\text{ja que } \ln 1 = 0),$$

i també tenim que

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Això se segueix d'observar que si  $x = \ln \zeta$ ,  $y = \ln \eta$ , llavors  $x + y = \ln \zeta + \ln \eta = \ln \zeta\eta$ , i per tant  $\exp(x + y) = \zeta\eta = \exp(x) \cdot \exp(y)$ .

El valor de  $\exp(1)$  és un vell conegut nostre, el número  $e$  introduït en un exemple del capítol 2. Per a comprovar-ho podem recórrer a la definició de l'exponencial de  $x$  que donem a l'apèndix. Si no volem utilitzar aquest procediment, haurem d'esperar al capítol 6 on estudiem l'expressió de les funcions com a sèries per a veure que  $\exp(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$ , que ja hem demostrat al capítol 2 que és precisament el número  $e$ .

La funció exponencial, o més precisament la funció  $ce^x$ , on  $c$  és un número real, té una propietat important que la caracteritza, i és que és la seva pròpia derivada.

Això es veu de la següent manera: suposem que  $f' = f$ , llavors si prenem  $g = f/\exp$ , tenim  $g' = f' \exp - f \exp/\exp^2 = 0$ , la qual cosa implica  $g = \text{constant}$ .

Per a definir  $a^x$  per  $a > 0$ , el que fem és posar  $\ln(a^x) = x \ln a$ , i d'aquí  $a^x = e^{x \ln a}$ .

Aquesta *funció exponencial de base  $a$* , com la podem anomenar, compleix les següents propietats:

$$\begin{aligned} (a^b)^c &= a^{bc} \\ a^1 &= a \\ a^{x+y} &= a^x a^y. \end{aligned}$$

Podem utilitzar també la notació  $\exp_a$  per a la funció de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}^+$  tal que  $\exp_a(x) = a^x$ .

També definim el *logaritme en base  $a$* ,  $\ln_a$ , com a funció inversa de  $\exp_a$ ; és a dir, si  $\exp_a y = x$ , tenim que

$$y = \ln_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Troben les derivades

$$\begin{aligned} \exp'_a x &= \frac{d}{dx}(e^{x \ln a}) = a^x \ln a \\ \ln'_a x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right) = \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Utilitzant les funcions exponencial i logarítmica podem definir funcions com

$$f(x) = g(x)^{h(x)} := e^{h(x) \ln g(x)}.$$

La derivada d'aquesta funció es calcula fent servir la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}(g(x)^{h(x)}) = \frac{d}{dx}(e^{h(x) \ln g(x)}) = g(x)^{h(x)} \left( h'(x) \ln g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)} \right).$$

## 4.5 Integració en termes de funcions elementals

Observem que en derivar les funcions elementals i les funcions que n'obtenim ja sigui algebraicament o invertint-les o mitjançant la seva composició, no obtenim funcions que no puguem expressar de la mateixa manera.

En canvi, en integrar  $1/x$  o  $\sqrt{1-x^2}$ , obtenim  $\ln x$  i  $\arcsin x$ , que resulten no ser algebraïques. Ens podem preguntar si totes les integrals indefinides on intervinguin funcions elementals són expressables en termes de les funcions elementals. La resposta és no: per integració es generen funcions no expressables d'aquesta manera (Liouville, 1845).

Hi ha taules d'integrals que contenen la llista de les primitives que es poden expressar en termes de funcions elementals (i també d'integrals on això no és possible), raó per la qual tampoc és gaire necessari conèixer-les de memòria, i ni tan sols cal saber obtenir-les mitjançant algun dels mètodes que estudiarem a continuació. Tanmateix, recordar la majoria de les integrals immediates i conèixer els mètodes d'integració per tal de trobar les fórmules que apareixen en aquestes taules d'integrals és una part fonamental de la cultura matemàtica, i s'utilitzen sovint per a canviar de forma expressions i facilitar-ne la manipulació.

Per començar tenim les anomenades integrals immediates, que no són més que l'expressió invertida de les derivades de les funcions que hem anat trobant. Per exemple

$$\begin{aligned} \int_0^x t^n dt &= \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad n \neq -1, \\ \int_1^x \frac{dt}{t} &= \ln x, \\ \int_0^x \cos t dt &= \sin x, \\ \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} &= \operatorname{arctg} x, \\ \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \arcsin x, \text{ etc.} \end{aligned}$$



A les taules d'integrals apareixen les *primitives* dels integrands i la notació emprada sol ser

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x.$$

Cal fer notar que en no especificar l'interval sobre el qual integrem, les coses poden prestar-se a males interpretacions. De fet la fórmula anterior per al logaritme és vàlida per a  $x$  positiva. Si  $x$  fos negativa podem escriure

$$\int_{-1}^x \frac{dt}{t} = \ln(-x),$$

i les dues formes es poden escriure  $\int dx/x = \ln|x|$ , que no és vàlida per a  $x = 0$ .

En aquests casos s'entén que a la funció de la banda dreta se li pot afegir una constant qualsevol, i continua essent cert que té per derivada l'integrand.

Per tal de poder expressar les integrals indefinides en termes de funcions elementals es fan servir fonamentalment les tècniques de substitució, la d'integració per parts i la descomposició en fraccions elementals, a més de consideracions enginyoses que inclouen identitats trigonomètriques i d'altres tipus.

## 4.6 Substitució de variables a la integral

Es tracta d'aconseguir reduir la integral a una d'immediata mitjançant un canvi de variables. Això significa, essencialment, fer servir la regla de la cadena.

Efectivament, sabem que si  $F$  és una primitiva de  $f$ , llavors, per a qualsevol funció  $g$  derivable,

$$(F \circ g)' = (f \circ g)g'.$$

L'aplicació de la Regla de Barrow, ens diu que

$$\int_a^b (F \circ g)' = F(g(b)) - F(g(a)),$$

i també que

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = F(g(b)) - F(g(a)),$$

o sigui que finalment obtenim la igualtat

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

Així, doncs, si podem expressar una funció  $h$  com  $(f \circ g)g'$ , amb  $f$  de primitiva coneguda  $F$ , obtenim que

$$\int_a^b h = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Per exemple considerem  $\int_a^x \operatorname{tg}.$

Si prenem  $f(x) = 1/x$  i  $g = \cos$ , ens queda  $g' = -\sin$  i per tant  $\operatorname{tg} = \sin/\cos = -g'/g = -(f \circ g)g'$ . D'acord amb el resultat anterior, com que  $F = \ln$ , ens queda

$$\int_a^x \operatorname{tg} = F(g(a)) - F(g(b)) = \ln \cos a - \ln \cos x.$$

En una taula d'integrals trobarem això escrit

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \cos x + C,$$

sense especificar els límits d'integració.

En general no cal ser gaire formal per aplicar la substitució. Intuïtivament hem d'identificar la funció  $g$ , calcular-ne la derivada  $g'$  i veure si el que queda és de la forma  $(f \circ g)g'$  amb una  $f$  de primitiva coneguda.

En un altre exemple, considerem

$$\int_a^b \frac{dx}{x \ln x}.$$

No tenim gaires funcions combinades aquí. Si provem  $g = \ln$ , resulta  $g'(x) = 1/x$ , de manera que l'integrand ens queda  $g'/g$ , on reconeixem immediatament la derivada de  $\ln g$ . Per tant la integral es redueix a  $\int_a^b (\ln g)' = \ln \ln b - \ln \ln a$ .

Per a calcular la primitiva de l'integrand anterior, algunes persones utilitzen el següent procediment:

Posen  $t = \ln x$  (identificant intuïtivament la nostra funció  $g$ ), i escriuen  $dt = \ln' x \, dx = dx/x$ , d'on obtenen  $dx = x \, dt$ . Substituint aquests valors en la integral (sense fixar-se en l'interval d'integració), obtenen

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln \ln x.$$

Aquest procediment és, de fet, el mateix que hem fet servir nosaltres, encara que utilitza la notació de diferencial,  $dt$  i  $dx$ , que no hem definit.

En una altra variant de la mateixa fórmula de substitució, s'utilitza en la forma

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) \, dt.$$

Per exemple, suposem que volem reduir una integral sobre l'interval  $(a, b)$  a una integral sobre  $(0, 1)$ , fent el canvi de variable  $x = a + t(b - a)$ . Obtenim

$$\int_a^b f = \int_0^1 (f \circ g)g' = (b - a) \int_0^1 f(a + t(b - a)) \, dt.$$

Aquest mètode és útil per a reduir a un interval comú integrals que s'han de comparar o bé d'avaluar numèricament fent servir taules de coeficients calculades per a un interval definit.

## 4.7 Integració per parts

Mitjançant la *integració per parts* també es tracta de convertir la integral en una expressió en què entrin integrals diferents, que intentem que siguin més tractables. Es basa en la fórmula de Leibniz per a la derivada d'un producte. Efectivament, de  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ , tenim, aplicant la Regla de Barrow, que

$$\int_a^b f \cdot g' = \int_a^b (f \cdot g)' - \int_a^b f' \cdot g = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f' \cdot g,$$

on

$$[f \cdot g]_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Això es pot utilitzar quan l'integrand té un factor la derivada del qual té una expressió més senzilla.

Així, per exemple, prenent  $f(t) = t$  i  $g'(t) = e^t$ , obtenim

$$\int_a^x te^t dt = [te^t]_a^x - \int_a^x e^t dt = xe^x - ae^a - e^x + e^a.$$

Observem que podem escollir  $g$  com una primitiva qualsevol de  $g'$ .

La integració per parts s'ha d'aplicar de vegades en successió per anar reduint els integrands fins a formes conegudes.

Per exemple considerem el següent cas que dóna lloc a una *fórmula de reducció*:

$$I_n := \int_0^x \cos^n = \int_0^x \cos \cdot \cos^{n-1}.$$

Ara integrem per parts, prenent  $g' = \cos$ ,  $f = \cos^{n-1}$ , de manera que resulta que  $g = \sin$  i  $f' = -(n-1)\cos^{n-1} \cdot \sin$ , i la integral queda

$$I_n = [\sin \cdot \cos^{n-1}]_0^x + (n-1) \int_0^x \sin^2 \cdot \cos^{n-2}.$$

Ara, substituint  $\sin^2 = 1 - \cos^2$ ,

$$I_n = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \left( \int_0^x \cos^{n-2} - \int_0^x \cos^n \right),$$

és a dir

$$I_n = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$

d'on se segueix

$$I_n = \frac{1}{n} \sin x \cdot \cos^{n-1} x + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}.$$

Als exercicis donem exemples d'aplicació dels mètodes de substitució i integració per parts.

## 4.8 Integració de funcions racionals

Les funcions racionals, és a dir les expressables com a quocient  $R$  de funcions polinòmiques  $P$  i  $Q$ , tenen totes les primitives expressables en termes de funcions elementals. La manera de trobar aquestes primitives consisteix a descompondre el denominador  $Q$  en factors de grau màxim dos (i tots de primer grau si totes les arrels són reals), i llavors a expressar  $R = P/Q$  com a suma de fraccions que tenen per denominador aquests factors, elevats a alguna potència si aquest factor apareix amb una multiplicitat més gran que 1.

De fet, suposem que  $Q(x) = x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \dots + b_0$  factoritza com

$$Q(x) = (x - r_1)^{m_1} \dots (x - r_k)^{m_k} (x^2 + s_1x + t_1)^{n_1} \dots (x^2 + s_lx + t_l)^{n_l},$$

on els factors de segon grau corresponen a les arrels no reals. (A l'apèndix considerarem la manera de fer la integració reduint aquests factors a grau 1 amb els números complexos.)

Segui quin sigui  $P$ , diguem,  $P(x) = a_px^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_0$ , resulta que sempre podem escriure, si  $p < q$ ,

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \left( \frac{\alpha_{11}}{x - r_1} + \dots + \frac{\alpha_{1m_1}}{(x - r_1)^{m_1}} \right) + \dots \\ &+ \left( \frac{\alpha_{k1}}{x - r_k} + \dots + \frac{\alpha_{km_k}}{(x - r_k)^{m_k}} \right) + \dots \\ &+ \left( \frac{\beta_{11}x + \gamma_{11}}{x^2 + s_1x + t_1} + \dots + \frac{\beta_{1n_1}x + \gamma_{1n_1}}{(x^2 + s_1x + t_1)^{n_1}} \right) + \dots \\ &+ \left( \frac{\beta_{l1}x + \gamma_{l1}}{x^2 + s_lx + t_l} + \dots + \frac{\beta_{ln_l}x + \gamma_{ln_l}}{(x^2 + s_lx + t_l)^{n_l}} \right). \end{aligned}$$

I si  $p \geq q$  haurem d'afegir un polinomi de grau  $p - q$ .

La manera de calcular els coeficients  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  en aquesta expressió consisteix a treure denominadors (multiplicant per  $Q$ ) i a igualar els coeficients de les mateixes potències de  $x$ . Això ens dóna unes equacions que ens permeten deduir els valors cercats. Cosa que pot resultar laboriosa quan el grau de  $Q$  és elevat.

Una vegada escrit d'aquesta manera, l'únic que hem de conèixer són les primitives de les expressions següents:  $1/(x - r)^m$ , que és  $(x - r)^{1-m}/(1 - m)$  si  $m \neq 1$ , i  $\ln|x - r|$  si  $m = 1$ , i de  $(\beta x + \gamma)/(x^2 + sx + l)^n$ , que es tracta expressant el denominador en la forma  $x^2 + sx + l = (x + a)^2 + b^2$ . Fent el canvi de variable (substitució)  $x + a = y$  les integrals corresponents es redueixen a

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^2 + a^2} &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) \\ \int \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \\ \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^n} &= \frac{-1}{2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{x}{(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \right).$$

Aquesta darrera és una fórmula de reducció que s'obté integrant per parts (vegeu els exercicis).

## 4.9 Integrals en termes de funcions elementals d'algunes funcions no racionals

Algunes funcions algebraïques no racionals admeten integrals expressables en termes de les funcions elementals. Els mètodes per aconseguir aquesta expressió són els que ja hem esmentat. Les taules d'integrals contenen una llista d'aquestes expressions.

En posarem uns quants (pocs) exemples:

1.

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx,$$

prenent

$$x = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1}$$

queda

$$-6 \int \frac{t^3 dt}{(t^3 - 1)^2} = \frac{2t}{t^3 - 1} + \frac{1}{3} \ln \frac{t^3 - 1}{(t-1)^3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}}.$$

Ara s'ha de desfer la substitució que, recordem, ha de ser invertible a la part que ens interessa!

2. Si tenim  $R(\sin, \cos)$ , el canvi  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  dóna la integral d'una funció racional de  $t$ :

$$\int 2R \left( \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{dt}{1+t^2},$$

que es tracta com abans.

3. Si tenim  $R(e^{ax})$  fem  $e^{ax} = t$  i queda  $R(t)/t$ , racional. També  $R(\ln x)/x$  amb  $\ln x = t$  dóna  $R(t)$ .

## 4.10 Primitives no expressables en termes de funcions elementals

El teorema fonamental del càlcul ens garanteix que per a qualsevol funció contínua  $f$ ,  $F(x) = \int_a^x f$  (suposant  $f$  definida a  $[a, x]$ ) és una funció de  $x$ . Resulta, però, que  $F$  no sempre és expressable mitjançant combinacions de funcions elementals. Això no ens hauria de sorprendre gaire, quan ja en integrar

$1/x$  o  $1/\sqrt{1-x^2}$  hem abandonat les funcions algebraiques. Va ser Liouville qui va demostrar el segle passat que efectivament es transcendia el reialme de les funcions elementals en integrar-les, però ja des de molt abans s'havien trobat funcions la primitiva de les quals no s'havia pogut reduir a una expressió amb funcions elementals.

Aquest és el cas, per exemple, de les integrals el·líptiques, que ja en temps dels Bernoulli (segle XVII) s'havien trobat en intentar calcular la longitud de l'el·lipse, i que també apareixen en intentar trobar el període d'oscil·lació d'un pèndol simple.

Si tenim l'el·lipse d'equació  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ , prenem  $k = (a^2 - b^2)/a^2$  i fem el canvi  $t = x/a$ , resulta per a la longitud de l'arc de l'el·lipse a partir d'un vèrtex el valor

$$a \int_0^t \frac{\sqrt{(1-k^2t^2)} dt}{\sqrt{(1-t^2)}},$$

com ja deduirem més endavant.

Així mateix, en calcular el període d'oscil·lació d'un pèndol simple de longitud  $l$  sota l'acció de la gravetat, obtindrem al capítol d'equacions diferencials l'expressió

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\phi \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}}.$$

La integral que apareix en aquesta darrera fórmula és coneguda com a integral el·líptica de primera espècie.

La integral  $\int_0^\phi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi} d\xi$  és coneguda com a el·líptica de segona espècie.

Encara n'hi ha una de tercera espècie, que no escriurem aquí. Legendre va demostrar que tota integral el·líptica general, que és de la forma  $\int R/\sqrt{P_4}$ , on  $R$  és una funció racional i  $P_4$  és un polinomi de 4<sup>art</sup> grau, es pot reduir a una integral el·líptica d'una de les tres espècies esmentades.

Notem que el canvi  $x = \sin \zeta$  torna la integral de primera espècie en

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},$$

mentre que la de segona espècie queda

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

que s'anomenen formes de Jacobi.

Deixem com a exercici fer el canvi de variables.

Una altra integral que dóna origen a una nova funció transcendent és

$$\int_0^x e^{-t^2} dt,$$

que apareix en els càlculs de probabilitats. Multiplicada per  $2/\sqrt{\pi}$ , dóna la probabilitat que en una distribució gaussiana la variable aleatòria estigui en l'interval  $[0, \sqrt{2}x]$ . D'aquesta funció, se'n troben taules a la majoria dels llibres de probabilitat i estadística.

## Exercicis i problemes

### 1. Demostreu

- (a)  $2x/\pi < \sin x < x$ ,  $x \in (0, \pi/2)$ .  
 (b)  $x - (x^3/6) < \sin x < x$ ,  $x \in (0, \pi/2)$ .  
 (c)  $1 - (x^2/2) < \cos x < 1 - (x^2/2) + (x^4/4!)$ ,  $x \in (0, \pi/2)$ .  
 (d)  $|\sin x - \sin y| < |x - y|$ .

### 2. Dibuixeu a mà alçada les gràfiques de

$\sin 2x$ ,  $\sin(x^2)$ ,  $\sin^2 x$ ,  $\sin x + \sin 2x$ ,  $\operatorname{tg} x - x$ ,  $\sin x/x$ ,  $x \sin x$ ,  $e^x + e^{-x}$ ,  
 $e^{-x^2}$ ,  $e^{\sin x}$ ,  $\ln(\sin x)$ ,  $\sec x$ ,  $\operatorname{tg}^{-1} x$ ,  $\sin(e^{-x})$ ,  
 i d'altres que us pugueu imaginar combinant funcions polinòmiques, racionals, amb radicals, amb les funcions elementals i les seves inverses.

### 3. Utilitzant l'expressió $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ , deduiu expressions per a $\cos(x + y)$ , $\operatorname{tg}(x + y)$ , $\sin(x/2)$ , $\sin 3x$ , en termes de sinus i cosinus de $x$ i de $y$ , i de $\sin^3 x$ en termes de sinus i cosinus de $x$ i $3x$ .

### 4. Demostreu que

$$1/2 + \cos x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n + 1/2)x}{2 \sin(x/2)}.$$

(Es pot demostrar primer que

$$\sin(n + 1/2)x - \sin(n - 1/2)x = 2 \sin x/2 \cdot \cos nx).$$

### 5. Demostreu que $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ , $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ .

### 6. Definim les funcions *sinus*, *cosinus* i *tangent* en graus, $\sin^\circ$ i $\cos^\circ$ mitjançant $\sin^\circ x = \sin(\pi x/180)$ , $\cos^\circ x = \cos(\pi x/180)$ , $\operatorname{tg}^\circ = \sin^\circ / \cos^\circ$ . Quant valen $(\sin^\circ)'$ , $(\cos^\circ)'$ , $(\operatorname{tg}^\circ)'$ i $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ en termes d'aquestes funcions?

Quant valen  $\sin 75^\circ$ ,  $\cos 105^\circ$ ,  $\sec 165^\circ$ ,  $\sin 72^\circ$ ?

### 7. Considerem les funcions

$$f(x) = x^m \sin(1/x^n), \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad \text{per a } x \neq 0, \quad \text{i } f(0) = 0.$$

Per a quins valors de  $m$  i  $n$ ,  $f$  és



- (a) contínua?  
 (b) acotada en un entorn de 0?  
 (c) derivable?  
 (d) amb derivada contínua?  
 (e) derivable  $k$  vegades?
8. Dibuixeu les gràfiques de les funcions hiperbòliques definides a l'apèndix, de les seves derivades, integrals i inverses, on aquestes existeixin.
9. Sigui  $f$  creixent, és a dir,  $f(x) > f(y)$  si  $x > y$ , i suposem  $f(0) = 0$ . Demostreu que

$$g(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{f(t)} dt > 0 \quad \text{per a tot } x > 0,$$

si la integral té sentit.

10. Doneu les derivades de les funcions donades a continuació en termes de funcions elementals:

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right), \\ f(x) &= (\arccos(x/\cos x))^{\ln \operatorname{tg} e^{-x}}, \\ f(x) &= x^x, \\ f(x) &= (\ln x)^{\ln x}. \end{aligned}$$

11. Trobeu primitives de les següents funcions:

$$\sin^2 x, \ln x/x, \sec x, xe^{-x^2}, x/\sqrt{1-x^4}, \ln^3 x, \cos \ln x, \sec^3 x, \ln(\ln x)/x, \ln(x + \sqrt{x}), 1/(1 + \sin x).$$

Aquestes funcions admeten primitives expressables en termes de funcions elementals, i per a trobar-les els mètodes de substitució i d'integració per parts són útils. Tanmateix, les taules d'integrals publicades contenen llistes de les funcions que tenen primitives expressables amb funcions elementals més utilitzades, la qual cosa evita haver-se de trencar el cap cercant el mètode adequat, que pot no existir.

12. Fent servir la igualtat de l'exercici 4, demostreu que

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin(t/2)} dt = \pi, \quad \text{per a tota } n \in \mathbb{N}.$$

13. Demostreu que si  $f$  té integral finita a  $[a, b]$  (potser impròpia), llavors

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

14. Trobeu fórmules de reducció per a

$$\begin{aligned} & \int x^n (\ln x)^m \, dx, \quad n \neq -1, \\ & \int x^n \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \, dx, \\ & \int (\sin^n(x)/x^n) \, dx, \\ & \int (e^{ax}/x^n) \, dx. \end{aligned}$$

## Apèndixs

### 1. Presentació més tradicional de l'exponencial i el logaritme

La funció exponencial en base  $a$ , per  $a > 0$  se sol definir per  $f(x) = a^x$ . Aquesta expressió de moment no té cap sentit si  $x$  no és racional. Si  $x = p/q$ , amb  $p$  i  $q$  enters, llavors el que significa és  $f(p/q) = a^{p/q} = +\sqrt[q]{a^p}$ . Notem que dels possibles valors de l'arrel prenem el positiu. Per a estendre el significat a valors de  $x$  que no siguin racionals, utilitzem un resultat que hem establert en l'apèndix del capítol anterior: resulta que la funció  $x \rightarrow a^x$  definida per  $x \in \mathbb{Q}$  és uniformement contínua en qualsevol interval acotat (vegeu l'apèndix del capítol 3), i per tant es pot estendre d'una manera única a una funció contínua definida per tota  $x \in \mathbb{R}$  i denotada per  $\exp_a$  que pren valors reals i positius.

Del fet que  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$  per  $x, y \in \mathbb{Q}$ , se segueix per continuïtat que la mateixa propietat és certa per  $x, y \in \mathbb{R}$ .

D'aquí resulta que  $\exp_a x$  és creixent o decreixent amb  $x$  depenent de si  $a$  és més gran o més petit que 1. Això es pot veure donant un increment  $h > 0$  a  $x$  i veient que la funció s'incrementa també positivament:  $a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1) > 0$ , perquè  $a^h > 1$  si  $a > 1$  i  $h > 0$  (és cert per a  $h$  racional i, per continuïtat se segueix que també ho és per a tota  $h$  real positiva).

Resulta, doncs, que per  $a \neq 1$  la funció

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

és monòtona i per tant té inversa. Aquesta inversa, l'anomenem *logaritme en base a* i la denotem per  $\ln_a$ .

Notem que el logaritme en base  $a$  de  $x$  queda definit de la manera habitual, com l'exponent al qual cal elevar  $a$  per obtenir  $x$ .

Com que  $a^0 = 1$  se segueix que  $\ln_a 1 = 0$ , i de la propietat  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ , se segueix que  $\ln_a xy = \ln_a x + \ln_a y$ , i també tenim que  $\ln_a y^x = x \ln_a y$ .

En particular, quan  $a = 10$  tenim el *logaritme decimal* o de *Briggs*, mentre que per  $a = e$ , la constant definida en un dels exemples del capítol 2, obtenim el *logaritme natural* o *neperià*, que se sol denotar per  $\ln$ .

El càlcul de les derivades de  $\exp_a$  i  $\ln_a$  no resulta senzill en aquesta aproximació. Pel cas del logaritme en base  $e$ , però, no és gaire complicat. Efectivament, fent servir les propietats dels logaritmes, obtenim

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{h} \ln \left( 1 + \frac{h}{x} \right),$$

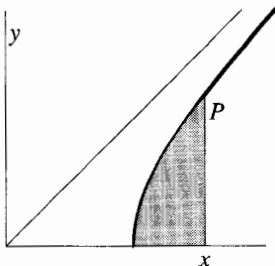
i recordant una de les caracteritzacions del número  $e$  (capítol 2) resulta que això tendeix a  $1/(x) \ln e = 1/x$  quan  $h \rightarrow 0$ .

D'aquí, utilitzant les fórmules de derivació de la funció inversa, podem obtenir la derivada de la funció exponencial.

## 2. Les funcions hiperbòliques

A partir de la funció exponencial es defineixen les *funcions hiperbòliques*. El *sinus hiperbòlic* es defineix com  $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$ , mentre que el *cosinus hiperbòlic* és  $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$ . També es defineixen la *tangent hiperbòlica*  $\operatorname{th} = \operatorname{sh} / \operatorname{ch}$ .

El motiu de l'adjectiu hiperbòlic ve del fet que es poden definir aquestes funcions d'una manera geomètrica mitjançant una hipèrbola equilàtera, anàlogament a com s'ha fet amb les funcions circulars fent servir un cercle.



Així, a la figura, tenim una hipèrbola equilàtera d'equació  $x^2 - y^2 = 1$ , i la seva porció en el primer quadrant és la gràfica de la funció  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ . Si considerem l'àrea  $A$  del sector hiperbòlic ratllat, en funció de  $x$  obtenim, restant a l'àrea del triangle rectangle determinat pel punt  $P$  de coordenades  $(x, y)$  la integral de  $f$  de 1 a  $x$ :

$$A = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt, \quad \text{amb } x \in [1, \infty).$$

La funció *argument del cosinus hiperbòlic* es defineix ara com

$$\operatorname{arch} x = 2A.$$

Derivant, obtenim

$$\operatorname{arch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

que és una funció positiva de  $(1, \infty)$  a  $(0, \infty)$ .

Per tant,  $\operatorname{arch}$  és creixent amb  $\operatorname{arch} 1 = 0$  i  $\operatorname{arch} x \rightarrow \infty$  quan  $x \rightarrow \infty$ . Podem, doncs, definir la seva inversa  $\operatorname{ch} : (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ .

La seva derivada ve donada per

$$\operatorname{ch}' x = \frac{1}{\operatorname{arch}'(\operatorname{ch} x)} = \sqrt{\cosh^2 x - 1}$$

calculada utilitzant la fórmula per a la derivada de la funció inversa.

El *sinus hiperbòlic* es defineix ara per

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\frac{2}{\operatorname{ch} x} - 1},$$

pel qual

$$\operatorname{sh}' x = \frac{2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch}' x}{2\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \operatorname{ch} x.$$

D'això resulta que

$$\operatorname{sh}' x + \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x,$$

és a dir, que la funció  $\operatorname{sh} + \operatorname{ch}$  es té a ella mateixa per derivada, la qual cosa implica que  $\operatorname{sh} + \operatorname{ch} = c \exp$ , tal com hem vist en la secció 4 d'aquest capítol. La constant  $c$  val 1, perquè tenim que  $\operatorname{sh}(0) + \operatorname{ch}(0) = \exp(0) = 1$ . D'una manera anàloga tenim que  $\operatorname{sh}' x - \operatorname{ch}' x = -(\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x)$ , que mostra similarment que  $\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x = e^{-x}$ .

Ajuntant això resulta,

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{i} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

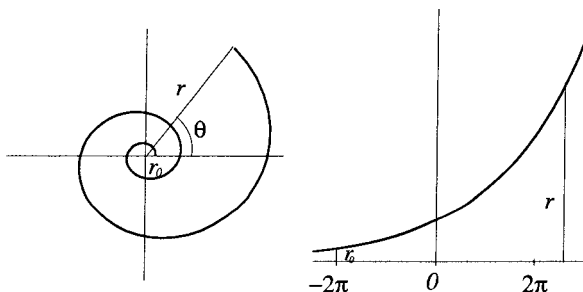
que són les definicions formals que havíem avançat.

Fem notar que la gràfica del cosinus hiperbòlic correspon a la *catenària*, que és la forma assolida per una cadena penjant entre dos punts sota l'acció del seu pes.

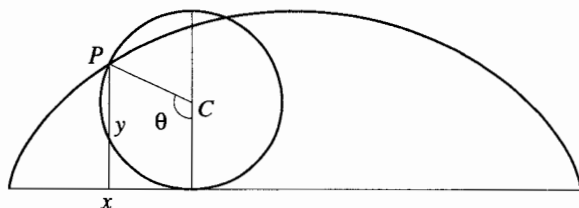
### 3. Corbes cinemàtiques

Ja *Arquimedes* definia cinemàticament l'*espiral*: un punt es mou amb velocitat constant allunyant-se del centre d'un radi que gira amb velocitat angular uniforme. Per tal de definir-la prenem la distància  $r$  del punt que es mou a un punt fix del pla pres com a origen, com a funció de l'angle,  $\theta$ , que forma el segment que uneix aquests dos punts amb una semirecta fixa que té l'extrem a l'origen. Resulta així que l'*espiral* és la gràfica de la funció  $r = f(\theta)$  amb  $f(\theta) = \alpha\theta$ , on  $\alpha \in \mathbb{R}$  és un número real constant.

L'*espiral logarítmica*, la definim de manera semblant, però amb el punt allunyant-se del centre sobre el radi que gira amb una velocitat proporcional a la distància al centre. És a dir  $dr(t)/dt = \alpha r(t)$ , i  $\theta(t) = \omega t$ . Això correspon a  $r$  donada en funció de  $\theta$  per  $r = r_0 \exp(\alpha\theta/\omega)$ , on  $r_0$  és la distància al centre del punt al moment inicial. Fixem-nos que les gràfiques en termes de funcions i en l'espai físic són ben diferents:



Una altra corba cinemàtica que va ser molt considerada al segle XVII pels matemàtics de l'època, *Roberval*, *Huygens*, i d'altres i que es pot descriure com la gràfica d'una funció definida en termes de les funcions elementals, és la *cicloide*, definida la seva gràfica per les posicions d'un punt fix a la circumferència d'un cercle que roda sense lliscar sobre una recta horitzontal.



En termes dels elements geomètrics illustrats al dibuix tenim

$$x = \theta - \sin \theta, \quad y = 1 - \cos \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Si s'elimina  $\theta$  de les expressions obtenim la relació entre  $x$  i  $y$ :

$$\begin{aligned} x &= \arccos(1 - y) - \sin(\arccos(1 - y)) \\ &= \arccos(1 - y) + \sqrt{y(2 - y)}. \end{aligned}$$

Això està definit per a  $y$  entre 0 i 2, mentre  $x$  pren valors a  $[0, \pi]$ . Per  $x \in (\pi, 2\pi]$  hem de prendre  $\arccos(1 - y)$  a  $(\pi, 2\pi)$  i l'arrel  $\sqrt{y(2 - y)}$  amb signe  $-$ .

Expressar  $y = f(x)$  en termes de  $x$  resulta més difícil, però mirant-nos les derivades ens podem convèncer que és una funció creixent ben definida de  $[0, \pi]$  a  $[0, 2]$ , i la podem perllongar per a tota  $x$  a  $\mathbb{R}$ , definint  $f(-\theta) = f(\theta)$  per  $\theta \in [0, \pi]$ , i estenent-la periòdicament de manera que  $f(\theta) = f(\theta + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

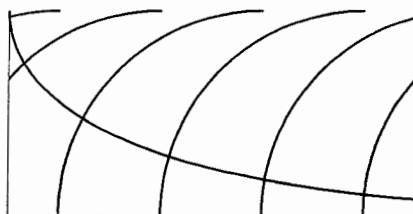
Podem, com a exercici, calcular les derivades i veure que no està definida  $f'(0)$  (ni  $f'(2k\pi)$  per qualsevol  $k \in \mathbb{Z}$ ). De fet  $f'(x)$  tendeix a  $+\infty$  quan  $x \rightarrow 0^+$  i a  $-\infty$  quan  $x \rightarrow 0^-$ .

La cicloide és una corba de propietats molt especials: resulta que, de cap per avall, és la forma d'una rampa al llarg de la qual una partícula que caigui sota l'acció de la gravetat triga el temps mínim d'entre totes les possibles rampes en caure d'un punt a un altre (és la *braquistòcrona*, Johann Bernoulli, 1696) i també si es deixa que aquesta partícula continuï movent-se, ho fa oscil·lant d'una banda a l'altra del punt més baix, amb un període que és independent del punt de la corba en què s'ha deixat anar la partícula (la *isòcrona*, Huygens, 1673).

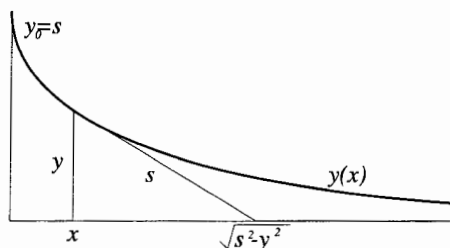
L'àrea en un període ( $2\pi$ ) sota la cicloide és precisament tres vegades l'àrea del cercle que en rodolar la genera (exercici).

Una altra corba interessant que es pot definir en termes de les funcions elementals és la *tractriu*, que es pot donar de moltes maneres: cinemàticament, com la trajectòria d'una partícula amb fricció que es mou sobre un pla estirada per un cordill de longitud constant amb l'extrem seguint una recta d'aquest

pla, també com la gràfica de la funció tal que la longitud de la tangent entre un punt de la gràfica i l'eix de les abscisses (la *subtangent*) és constant, també com l'envolupant de les normals a la cicloide, i també com una corba normal en una família de cercles de radi constants centrats a l'eix de les abscisses



La condició que la subtangent és constant, diguem de valor  $s$ , correspon al fet que es verifica  $y' = -y/\sqrt{s^2 - y^2}$ , amb  $y(0) = s$  (vegeu la figura que segueix).



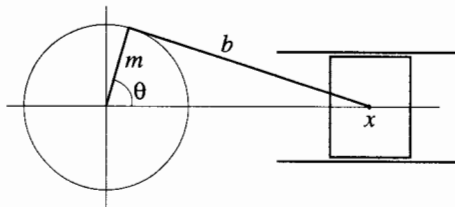
D'aquí resulta que  $\Phi(y(x)) = -\int_s^{y(x)} \frac{\sqrt{s^2 - y^2}}{y} dy = x$  i tindrem  $y(x) = \Phi^{-1}(x)$ .

Una altra propietat és que si es genera una superfície fent girar aquesta gràfica sobre l'eix de les abscisses, aquesta té curvatura constant negativa, i les geodèsiques sobre ella representen les rectes a la geometria hiperbòlica de Lobatxevski.

#### 4. Mecanisme de biela i maneta

Per calcular les forces que la biela exerceix sobre el pistó o la que el pistó fa sobre les parets del cilindre, en un motor o compressor de cilindres amb mecanisme de biela i maneta, hem de tenir en compte, a més de les forces exercides sobre el pistó pels gasos del cilindre, les forces que s'han d'afegir a causa de les acceleracions del pistó.

Considerem el mecanisme il·lustrat a la figura, en què una maneta de longitud  $m$  gira al voltant de  $O$ , arrossegant amb el seu moviment la biela de longitud  $b$  i el pistó de massa  $M$  que es veu forçat a moure's al llarg del cilindre que té per eix l'eix de les abscisses



El moviment de  $m$  en un motor real no és uniforme, però si hi ha un volant prou gran, és a dir si el moment d'inèrcia de les parts que giren al voltant de 0 és prou gran, el moviment serà proper a l'uniforme. Suposem, doncs, que coneixem  $\theta$  en funció de  $t$ , que en els càlculs pràctics prendrem com  $\theta = \omega t$ .

Essent  $x = m \cos \theta + \sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \theta}$ , on  $x$  i  $\theta$  són funcions del temps, s'obté derivant respecte de  $t$ :

$$x' = -m\theta' \sin \theta - \frac{m^2 \theta' \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \theta}}.$$

Si el moviment de la biela és uniforme

$$x'(t) = -m\omega \sin \omega t \left( 1 + \frac{m \cos \omega t}{\sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \omega t}} \right).$$

Derivant de nou tenim l'acceleració:

$$x''(t) = m\omega^2 \left( \cos \omega t + \frac{\cos^2 \omega t}{\sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \omega t}} + \frac{m(m^2 - b^2) \sin^2 \omega t}{\sqrt{(b^2 - m^2 \sin^2 \omega t)^3}} \right).$$

La força deguda a l'acceleració que la biela efectua sobre el pistó està dirigida al llarg de la biela, i sabem que la seva component  $F$  al llarg de l'eix del cilindre és, doncs,  $Mx''(t)$ . De la geometria del sistema, resulta que la component  $G$  d'aquesta força perpendicular a aquest eix, que representa la força que efectua el pistó sobre el cilindre deguda només al moviment, és tal que

$$Fm \sin \theta = G(x - m \cos \theta).$$

A aquestes forces s'han d'afegir les degudes a la pressió dels gasos, que actuen en la direcció de l'eix, i que haurem de descompondre en l'absorbida per la biela en la seva direcció, i l'absorbida per les parets del cilindre, perpendicular a l'eix.

## 5. Caracterització de les funcions circulars

Hem vist que una caracterització de la funció exponencial és que coincideix amb la seva derivada i que avaluada a 0 val 1.

Veurem ara que si una funció és la negativa de la segona derivada, llavors és combinació lineal del sinus i del cosinus.



Efectivament, considerem  $f'' = -f$  i que  $f(0) = a$ ,  $f'(0) = b$ .

Prenem

$$f(x) = g(x) + b \sin x + a \cos x.$$

Derivant dues vegades queda

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) + b \cos x - a \sin x \\ f''(x) &= g''(x) - b \sin x - a \cos x. \end{aligned}$$

Per tant, si  $f'' = -f$ , obtenim  $g'' = -g$ , amb  $g(0) = 0$ ,  $g'(0) = 0$ .

Si ara multipliquem per  $g'$  la darrera equació resulta

$$0 = g'g'' + gg' = \frac{1}{2}((g')^2 + g^2)'$$

Per tant  $(g')^2 + g^2 = 0$ , o sigui que tant  $g'$  com  $g$  s'anul·len. Queda doncs finalment que  $f(x) = b \sin x + a \cos x$ .

## 6. Funcions circulars de sumes

Per a molts dels càlculs resulta útil la fórmula

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

És habitual deduir-la a partir de la definició geomètrica d'aquestes funcions. Per a fer la nostra deducció considerem  $f(x) = \sin(x + y)$  per  $y$  fixada.

Derivant obtenim

$$f'(x) = \cos(x + y),$$

i derivant de nou

$$f''(x) = -\sin(x + y).$$

Resulta, doncs, que  $f''(x) + f(x) = 0$ .

Com que  $f(0) = \sin y$  i  $f'(0) = \cos y$ , tenim pel resultat de la secció anterior que

$$f(x) = \cos y \cdot \sin x + \sin y \cdot \cos x,$$

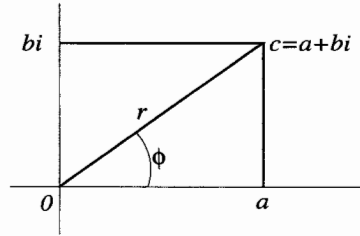
que és el que volíem.

Les fórmules pel cosinus de la suma i d'altres fórmules trigonomètriques es dedueixen d'aquesta utilitzant les relacions ja conegudes.

## 7. Exponencial i logaritme de números complexos

A l'apèndix 10 del capítol 2 hem estudiat els números complexos, definint-los mitjançant l'expressió  $c = a + bi$ , en què  $a$  i  $b$  són números reals i equiparem  $i$  amb  $\sqrt{-1}$  pel que fa a les seves propietats algebraiques. La funció circular i l'exponencial permeten una caracterització diferent dels números complexos.

Per a fer-la considerem el punt del pla  $(a, b)$  corresponent al número complex  $a + bi$  en el que s'anomenen coordenades polars, és a dir, donat per la seva distància a l'origen  $r$ , i per l'angle  $\phi$  que el segment que l'uneix a l'origen fa amb la part positiva de l'eix al llarg del qual mesurem la part real  $a$  de  $c$ .



Definim, basant-nos en la nostra intuïció,  $a = r \cos \phi$ ,  $b = r \sin \phi$ , de manera que resulta  $c = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ .

L'angle  $\phi$ , mesurat en radians, és anomenat l'*argument* de  $c$ , i es denota per  $\phi = \arg c$ . Ja hem vist que  $r = |c|$  és el *mòdul* de  $c$ .

Observem ara que el producte de dos números complexos té per mòdul el producte dels mòduls dels seus factors, i per argument la suma dels arguments. Efectivament:

$$\begin{aligned} c_1 c_2 &= r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) \cdot r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 + i(\sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \phi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)). \end{aligned}$$

Tenim, doncs, que  $c$  es pot expressar com el producte de  $r$  per una funció  $s$  de  $\phi$  que compleix  $s(\phi_1 + \phi_2) = s(\phi_1)s(\phi_2)$  i a més  $s(0) = 1$ .

Per l'analogia amb la funció exponencial, denotarem  $s(\phi)$  per  $e^{i\phi}$ , és a dir, com l'*exponencial del número imaginari*  $i\phi$ .

Queda, doncs,

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi,$$

que es coneix com la *fórmula de De Moivre*, i que ens relaciona les funcions circulars amb l'exponencial.

D'aquesta manera el número  $c = r(\cos \phi + i \sin \phi)$  es denota  $c = r e^{i\phi}$ , on  $\phi$ , en radians, està definit excepte per un factor additiu que sigui múltiple de  $2\pi$ .

Així queda  $c_1 c_2 = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$ .

Podem posar també  $c = e^{\ln r} e^{i\phi} = e^{\ln r + i\phi}$ , i llavors el logaritme natural del número complex  $c$ , resulta ser el número complex

$$\ln c = \ln r + i\phi + 2k\pi i \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

En particular tenim que  $\ln(-1) = \ln e^{-i\pi} = -i\pi + 2k\pi i$ .

La definició de  $e^{\rho+i\phi}$  no és del tot arbitrària; de fet es va veure forçada precisament per la integració de funcions racionals.

Considerem

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

L'integrand es pot expressar com a suma de fraccions simples, posant  $(1+t^2) = (t-i)(t+i)$ , de manera que

$$\frac{1}{1+t^2} = \left( \frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i} \right) \frac{1}{2i}.$$

Si integrem utilitzant formalment les fórmules d'integració immediata com si tots fossin números reals, ens queda

$$2i \operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{t-i} - \int_0^x \frac{dt}{t+i} = \ln \frac{x-i}{x+i} + \pi i.$$

Podem comprovar que el resultat s'adiu amb la fórmula de De Moivre, la qual cosa ens justifica en la utilització de les mateixes fórmules d'integració.

Efectivament, de  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ , en deduïm

$$\sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}, \quad \cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}.$$

Volem veure l'equivalència de

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{x-i}{x+i} + \frac{\pi}{2},$$

amb

$$x = \operatorname{tg} \phi = \frac{1}{i} \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}.$$

Substituint el valor de  $\phi$  de la primera expressió a la segona, obtenim, després d'operar una mica, la identitat  $x = x$ , que ens dóna la justificació desitjada.

Més endavant, al capítol 6, veurem com també amb l'exponencial definida per sèries de potències, la nostra definició de  $e^{i\phi}$  és útil.



## Capítol 5

# Tècniques de càlcul

### 5.1 Introducció

En aquest capítol recollim un seguit de tècniques que s'escapen una mica de la seqüència central de desenvolupament teòric del càlcul infinitesimal, però que, tanmateix, resulten indispensables quan hem de respondre qüestions concretes sobre el comportament de les funcions, la suma de sèries, l'avaluació d'integrals, etc. Els temes de què tractarem són la determinació de la convergència o no de successions i sèries infinites, el comportament asimptòtic de funcions, el càlcul dels elements qualitius de les gràfiques de funcions, les integrals impròpies, algunes funcions especials, l'avaluació de la suma d'algunes sèries i d'algunes integrals definides. A l'apèndix incloem la fórmula d'Euler-Maclaurin i parlem de sèries asimptòtiques.

Els mètodes presentats en aquest capítol són analítics. Al capítol 7 presentem les tècniques que, utilitzant les eines d'aquest capítol (i d'altres), permeten obtenir els resultats numèrics que requereix la utilització pràctica de la matemàtica.

Al llarg de la història, aquestes tècniques s'han anat desenvolupant empeses per la mateixa dinàmica evolutiva del càlcul infinitesimal i les seves aplicacions. Ja *Fermat* al principi del segle XVII reduïa el problema de trobar el màxim o el mínim d'una funció a l'anul·lació de la derivada. Resulta interessant comparar els mètodes pre-càlcul, gairebé arquimedians, que feia servir *Huygens* cap a mitjan segle XVII per a demostrar l'isocronisme del pèndol cicloïdal i dissenyar un rellotge que l'utilitzés, amb l'ús que *Newton*, cap al final del segle, fa del càlcul infinitesimal, que acaba d'emergir, per a resoldre els mateixos problemes.

Els mètodes que estudiarem en aquest capítol van associats als noms dels matemàtics més coneguts als segles XVII, XVIII i principi del XIX. Tenim així *Newton*, l'*Hôpital*, els *Bernoulli*, *Maclaurin*, *Euler*, *Cauchy*, *Gauss*, *Stirling*, etc., donant nom a diversos criteris i tècniques. És amb el cúmul dels seus resultats que es va conformant el corpus del càlcul infinitesimal i la seva capacitat de descriure i avaluar els fenòmens de l'experiència.

Cal fer notar que la utilització dels ordinadors digitals de gran capacitat no han fet obsoletes les tècniques analítiques del càlcul, ans al contrari, projectar programes de computació numèrica eficaços requereix una anàlisi que descansa en aquests resultats, diguem-ne clàssics, que presentem.

## 5.2 Convergència de successions

Al capítol 2 ja hem parlat de successions de números reals,  $\{a_n\}$ , i n'hem definit el límit, quan existeix, com el número real  $l$  que té la propietat que per a cada real  $\varepsilon > 0$  hi ha un natural  $n_0$  tal, que si  $n > n_0$ , llavors es compleix que  $|l - a_n| < \varepsilon$ . Si aquest límit existeix diem que la successió és convergent. Al mateix capítol hem vist el criteri de convergència més important: la successió  $\{a_n\}$  és convergent si i sols si és de *Cauchy*, és a dir, si per a cada  $\varepsilon > 0$  donada, existeix  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal, que si  $m, n > n_0$ , llavors  $|a_m - a_n| < \varepsilon$ .

També hem dit què vol dir tenir límit infinit,  $\infty$  (o menys infinit,  $-\infty$ ): que, donat qualsevol número  $M > 0$ , els números  $a_n$  són més grans que  $M$  (resp. més petits que  $-M$ ) a partir d'una  $n_0$  (que depèn de  $M$ ). En tal cas, no diem que la successió convergeix.

Notem que una successió convergent no té més d'un límit. Si n'hi haguessin dos,  $l_1$  i  $l_2$ , diguem, la successió estaria forçada a prendre valors en un entorn arbitràriament petit de cada un d'ells a partir de certa  $n_0$ . Això és impossible: si està més a prop que  $|l_1 - l_2|/2$  d'un d'ells a partir de certa  $n_0$ , és que està més lluny que aquesta distància de l'altre, i aquest darrer no pot ser límit.

El *criteri de convergència de Cauchy* ens diu que  $\{a_n\}$  convergeix si i sols si per cada  $\varepsilon > 0$ , existeix  $n_0$  tal, que si  $m, n > n_0$ , llavors  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ . Recordem que aquest criteri és precisament el que caracteritza (i justifica) els números reals no racionals, com hem vist al capítol 2.

Recordem també que tota successió monòtona i acotada és convergent. Si no són acotades tendeixen a  $+\infty$  o a  $-\infty$ .

Donada una successió, una subsuccessió és una nova successió formada suprimint termes de la primera. D'una manera més formal això es pot expressar dient que  $\{a_{j(n)}\}$  és una subsuccessió indexada per  $n$ , de  $\{a_n\}$ , si  $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  és una aplicació creixent, és a dir  $j(n+1) > j(n)$ . Aquesta aplicació, injectiva, no ha de ser necessàriament exhaustiva.

Si una successió convergeix, llavors té una subsuccessió monòtona, que resulta que sempre convergeix al mateix límit que la successió original (exercici).

## 5.3 Límits superior i inferior d'una successió

Al capítol 2 hem introduït el concepte de punt d'acumulació d'un conjunt de punts de la recta real. El *punt d'acumulació d'una successió*  $\{a_n\}$  (també anomenat *punt límit*, que no s'ha de confondre amb *el límit*), es defineix com un punt tal que qualsevol dels seus entorns conté una infinitat de termes de la successió, comptant com a termes diferents els que tenen diferent índex, encara

que tinguin el mateix valor. Així, 1 és punt d'acumulació de la successió  $\{a_n\}$  amb  $a_n = 1$  per tota  $n$ , i 0 és punt d'acumulació de  $\{1/n\}$ .

Els punts d'acumulació d'una successió  $\{a_n\}$  es poden caracteritzar així:  $a$  és un punt d'acumulació si hi ha una subsuccessió de  $\{a_n\}$  que tendeix a  $a$ .

Certament una successió pot tenir molts punts d'acumulació. Per exemple la successió  $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$ , és a dir  $\{(-1)^n\}$  té tant 1 com  $-1$  com a punts d'acumulació. Un altre exemple: la successió dels números racionals numerats com ho hem fet al capítol 2, secció 10, té tots els números reals per punts d'acumulació.

Donada una successió  $\{a_n\}$  podem, doncs, associar-li el conjunt  $L$  dels seus punts d'acumulació (o límits). Anomenem *límit superior de la successió*  $\{a_n\}$  l'extrem superior de  $L$ , i ho denotem per  $\overline{\lim}\{a_n\} = \sup L$ . Anàlogament el *límit inferior de la successió* queda definit per

$$\underline{\lim}\{a_n\} = \inf L.$$

Els mateixos conceptes, els podem definir com

$$\begin{aligned}\overline{\lim}\{a_n\} &= \limsup_{m \in \mathbb{N}} \{a_{n+m}\}, \quad \text{i} \\ \underline{\lim}\{a_n\} &= \liminf_{m \in \mathbb{N}} \{a_{n+m}\}\end{aligned}$$

Per veure que això funciona s'ha d'observar que les successions  $b_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} \{a_{n+m}\}$  i  $c_n = \inf_{m \in \mathbb{N}} \{a_{n+m}\}$  tenen límit (exercici).

Observem que  $\lim\{a_n\}$  existeix si i sols si  $\overline{\lim}\{a_n\} = \underline{\lim}\{a_n\}$  i llavors el valor del límit és el mateix que els del límit superior i l'inferior.

Certament  $\overline{\lim}\{a_n\}$  pot valer  $\infty$  i  $\underline{\lim}\{a_n\}$  pot valer  $-\infty$ , com ja hem vist amb la successió de tots els racionals ordenats segons el mètode del capítol 2.

## 5.4 Exemples i límits de successions

1. Primer considerem les successions que d'una manera intuïtiva ja podem dir a què tendeixen.

La successió  $\{1/n\}$  ja ha estat considerada al capítol 2, i hem vist que tendeix a 0. La raó d'això rau en l'axioma arquimedià, que ens diu que  $1/n$  es pot fer més petit que qualsevol número real  $\varepsilon > 0$  donat d'antuvi.

La successió  $\{1/n^p\}$  amb  $p$  qualsevol real positiu, tendeix també a 0. Efectivament, tenim que donat  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon^{1/p} = e^{(1/p)\ln \varepsilon}$  és positiu. Per tant existeix  $n_0$  tal, que si  $n \geq n_0$ , llavors  $1/n < \varepsilon^{1/p}$ . Prenent la potència  $p$  a ambdós costats, tenim que  $1/n^p < \varepsilon$ , tal com volíem.

La successió  $\{1/a^n\}$ , amb  $a > 1$ , tendeix a 0 també, perquè  $a^n$  tendeix a  $\infty$ : prenent logaritmes,  $\ln a^n = n \ln a$ , i això tendeix a  $\infty$  quan  $n$  tendeix a  $\infty$ , perquè  $\ln a > 0$ .

Igualment la successió  $\{\sqrt[p]{p}\}$  amb  $p > 0$  tendeix a 1: prenent logaritmes tenim  $\ln \sqrt[p]{p} = \ln p/n$ , que tendeix a 0 quan  $n$  tendeix a  $\infty$ .

2. Considerem successions de la forma  $\{P(n)/Q(n)\}$ , on  $P$  i  $Q$  són polinomis, i volem calcular-ne el límit. Suposem

$$\begin{aligned} P(n) &= a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_0 \\ Q(n) &= b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_0. \end{aligned}$$

Tenim, dividint numerador i denominador per  $n^p$ :

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_p + a_{p-1} n^{-1} + \dots + a_0 n^{-p}}{b_q n^{q-p} + b_{q-1} n^{q-p-1} + \dots + b_0 n^{-p}}.$$

Tots els termes de la forma  $n^r$  amb  $r < 0$  tendeixen a 0, mentre que els que tenen  $r > 0$  tendeixen a  $\infty$ . Resulta, doncs, que

Si  $p = q$ , l'expressió tendeix a  $a_p/b_q$ .

Si  $p > q$ , el denominador tendeix a 0, mentre que el numerador tendeix a  $a_p$ , per tant el límit és  $\infty$  si  $a_p > 0$  i  $-\infty$  si  $a_p < 0$ .

Si  $p < q$ , el numerador tendeix a  $a_p$ , mentre que el denominador tendeix a  $\infty$  o a  $-\infty$ , per tant el límit és 0.

3. Considerem ara la successió  $\{a^n/n!\}$  amb  $a > 0$ .

Tenim de

$$\frac{a}{n+1} \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!},$$

que, si  $a/(n+1) < \frac{1}{2}$  es tindrà que

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{2} \frac{a^n}{n!}.$$

Per tant, si escollim  $n_0$  de manera que  $2a < n_0 + 1$ , tindrem, repetint  $m$  vegades la desigualtat anterior, que

$$\frac{a^{n_0+m}}{(n_0+m)!} < \frac{1}{2^m} \frac{a^{n_0}}{n_0!}.$$

Ara, si fem tendir  $m$  a infinit, això tendeix a 0, és a dir  $\{a^n/n!\} \rightarrow 0$ .

4. Prenem la successió  $\{a^n/n^p\}$  amb  $a > 1$  i  $p \in \mathbb{N}$ .

Suposem  $a = 1 + b$ , amb  $b > 0$ . Tenim llavors, pel teorema del binomi, que, si  $n > p + 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n^p} &= \frac{(1+b)^n}{n^p} = \frac{1}{n^p} \left( 1 + b + \dots + \frac{n!}{(n-r)!r!} b^r + \dots + b^n \right) \\ &> \frac{1}{n^p} \frac{n! b^{p+1}}{(n-p-1)!(p+1)!} = \frac{b^{p+1}}{(p+1)!} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-p)}{n^p}. \end{aligned}$$

El primer factor de la darrera expressió és una constant, i el segon és de la forma del primer exemple d'aquesta secció, i com que tenim al numerador el terme de grau més gran igual a  $n^{p+1}$ , la successió tendeix a  $\infty$ .



Fem notar que aquest límit també el podem calcular encabint la successió en la funció  $a^x/x^p$  i aplicant el teorema de l'Hôpital que estudiarem més endavant.

5. D'una manera semblant tenim que  $\{a_n\}$ , amb  $a_n = \sqrt[n]{n}$  tendeix a 1, ja que si  $a_n = 1 + b_n$ , resulta, aplicant el teorema del binomi, que  $n = (1 + b_n)^n > n(n-1)/b_n^2/2$ , i d'aquí que  $0 < b_n < \sqrt{2/(n-1)}$ , que tendeix a 0 quan  $n$  tendeix a  $\infty$ .

6. Per a trobar el límit de la successió  $\{\sqrt[n]{n!}\}$ , observem que si  $m$  és qualsevol natural, i  $n > m$ , llavors

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{m! \sqrt[n]{(m+1) \dots n}} > (m+1)^{(n-m)/n}.$$

Com que l'exponent tendeix a 1 quan  $n$  tendeix a  $\infty$ , la nostra successió és més gran que  $m$  per a  $n$  prou gran. Essent  $m$  arbitrària, això prova que la successió tendeix a infinit.

## 5.5 La constant d'Euler

Considerem la successió  $\{a_n\}$  amb

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Aquest terme també es pot escriure

$$a_n = 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \ln \frac{3}{2} + \dots - \ln \frac{n}{n-1} + \frac{1}{n},$$

ja que  $\ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n}{n-1} = \ln \left( 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-1} \right) = \ln n$ .

Fixem-nos ara que

$$\frac{1}{k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{k+1} < \int_0^1 \frac{dx}{k+x} = \ln \frac{k+1}{k} < \int_0^1 \frac{dx}{k} = \frac{1}{k},$$

perquè  $k < k+x < k+1$  si  $x \in (0, 1)$ .

Resulta, doncs, que si escrivim  $a_n$  com

$$a_n = (1 - \ln 2) + \left( \frac{1}{2} - \ln \frac{3}{2} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n-1} - \ln \frac{n}{n-1} \right) + \frac{1}{n},$$

deduïm que  $a_n \geq 0$  per a tota  $n$ .

Per altra banda, si escrivim

$$a_n = 1 + \left( \frac{1}{2} - \ln 2 \right) + \left( \frac{1}{3} - \ln \frac{3}{2} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} \right),$$

resulta que tots els termes d'aquesta suma són negatius excepte l'1. Per tant  $a_n$  és una successió decreixent de termes positius, i per tant té un límit  $\gamma$ .

Aquest límit és conegut com la constant d'Euler i apareix en avaluar certes equacions, com veurem més endavant.

La constant  $\gamma$  val aproximadament 0.577, i algú s'ha entretingut a obtenir-ne centenars de xifres decimals. No se sap, però, si és un número racional o no.

## 5.6 Suma de sèries

Anomenem *sèrie* o *sèrie infinita* la successió de les sumes  $\sum_{j=1}^n a_j = s_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Cada un dels termes d'aquesta successió s'anomena *suma parcial* de la sèrie. Es diu que la sèrie té una suma, convergeix o és *sumable*, si la successió  $\{s_n\}$  convergeix, i del límit se'n diu *suma de la sèrie* i es designa per

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Com a exemple de sèries convergents tenim les definides per  $s_n = \sum_{k=0}^n r^k$ , amb  $0 < r < 1$ . Efectivament,  $\{r^k\}$  forma una progressió geomètrica amb raó  $r < 1$  (és a dir, cada terme s'obté de l'anterior multiplicant-lo per  $r$ ). Resulta que  $s_n - r s_n = 1 - r^{n+1}$ , i per tant  $s_n = (1 - r^{n+1}) / (1 - r)$ . Com que  $\{r^{n+1}\} \rightarrow 0$ , tenim que  $\{s_n\} \rightarrow 1 / (1 - r)$ , i podem escriure  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 / (1 - r)$ .

D'aquesta sèrie, se'n diu *sèrie geomètrica* de raó  $r$ .

Un altre exemple el constitueix  $\sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)$ , que ja hem vist al capítol 2, secció 12, que convergeix al número  $e$ .

Es veu de seguida que si la suma d'una sèrie ha d'existir, llavors  $a_n$  ha de tendir a zero quan  $n$  tendeix a infinit. Efectivament, si no fos així la successió  $\{s_n\}$  no seria de Cauchy, és a dir no seria cert que a partir de certa  $n_0$  la diferència entre dos termes de la successió és menor que un valor qualsevol  $\varepsilon > 0$  donat d'antuvi: només cal prendre  $s_n - s_{n-1} = a_n$ , que no tendiria a 0 i per tant podríem trobar  $\varepsilon > 0$  de manera que  $s_n - s_{n-1}$  fos més gran que  $\varepsilon$  en valor absolut, per  $n$  arbitràriament gran.

Pel mateix criteri, resulta que una sèrie té suma si i sols si

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + \dots + a_m) = 0.$$

No n'hi ha prou que  $\{a_n\}$  tendeixi a 0 perquè  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  existeixi. Un exemple el proporciona la *sèrie harmònica*

$$s_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

La successió  $\{s_n\}$  tendeix a  $\infty$ , com es veu agrupant convenientment els termes:

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Cada un dels parèntesis val més de  $\frac{1}{2}$ , i per tant

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2},$$

que certament tendeix a  $\infty$  quan  $n$  ho fa.

## 5.7 Sèries alternants

Una sèrie és *alternant* si és de la forma  $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$  o bé  $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$ , amb  $a_k > 0$ . Si  $|a_{n+1}| \leq |a_n|$  i  $a_n \rightarrow 0$ , llavors la sèrie és convergent.

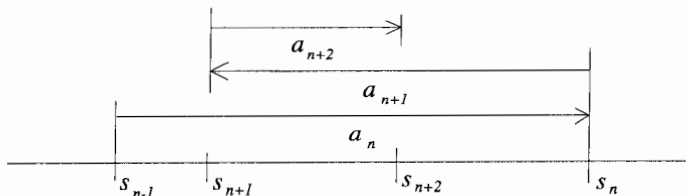
Per veure-ho n'hi ha prou amb notar que l'interval d'extrems  $s_n, s_{n+1}$  està inclòs al d'extrems  $s_{n-1}, s_n$ , i que la longitud d'aquests intervals tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ .

Per tant les successions

$$\begin{array}{ccccccc} s_{n-1}, & s_{n+1}, & s_{n+3}, & \dots, & i \\ s_n, & s_{n+2}, & s_{n+4}, & \dots \end{array}$$

són monòtones, l'una creixent, i l'altra decreixent, i els termes de cada una acoten els termes de l'altra, per la qual cosa totes dues convergeixen, i ho fan al mateix valor, ja que  $s_{n+m-1} - s_{n+m} \rightarrow 0$  quan  $m \rightarrow \infty$ . Això implica que la sèrie  $s_n$  convergeix.

La figura següent hauria d'ajudar a entendre la situació, que no volem descriure més formalment.



Un exemple de sèrie alternant que compleix totes les hipòtesis i per tant convergent és

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}.$$

Adonem-nos que no podem prescindir de la condició  $|a_{n+1}| < |a_n|$  per assegurar la convergència d'una sèrie alternant. Efectivament, considerem la sèrie

$$s_n = 1/2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2^4} + \dots - \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{2^k} \right),$$

que divergeix, tot i ser alternant i que els termes tendeixen a 0 (exercici).

## 5.8 Sèries absolutament convergents

Diem que una sèrie  $\sum a_n$  és *absolutament convergent* si ho és la sèrie dels valors absoluts dels seus termes:  $\sum |a_n|$ . La sèrie alternant  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$  proporciona un exemple d'una sèrie convergent que no ho és absolutament: la sèrie dels valors absoluts és l'armònica, que divergeix.

Una sèrie absolutament convergent no canvia de suma quan es “canvia l'ordre” dels seus termes, mentre que amb una de convergent que no ho sigui absolutament podem canviar l'ordre de manera que les sumes parcials tendeixin al número real que vulguem (deixem la demostració com a exercici).

Quan diem *canviar l'ordre d'una sèrie o reordenar els termes d'una sèrie* el que volem dir és prendre una aplicació  $f$  de  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{N}$  que sigui bijectiva, és a dir que estigui definida per a tota  $n \in \mathbb{N}$ , i que per cada  $m \in \mathbb{N}$  existeixi  $n$  tal, que  $f(n) = m$ . Definim la nova sèrie mitjançant  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ .

## 5.9 Criteris de convergència de sèries

Per a determinar si una sèrie convergeix o no, s'han desenvolupat tot un seguit de condicions suficients que en general no expliciten quin és el valor del límit.

Una de les proves o criteris ens permet decidir la convergència d'algunes sèries comparant-ne els termes amb els de sèries que ja sabem que convergeixen.

El *criteri de comparació* ens diu que si la sèrie  $\sum a_n$  de termes positius convergeix, llavors qualsevol sèrie  $\sum b_n$  amb  $0 \leq b_n \leq a_n$  també convergeix.

La raó està en el fet que si  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  i  $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$ , tenim  $0 \leq t_n \leq s_n$ . Essent  $s_n$  convergent, és acotada, i per tant  $t_n$  també ho és. En ser  $b_n$  no negativa,  $t_n$  és monòtona. Essent  $t_n$  acotada i monòtona és convergent.

D'una manera semblant podem dir que si  $\sum a_n$  amb  $a_n > 0$  divergeix, llavors  $\sum b_n$  amb  $b_n > a_n$  també ho fa.

El criteri de comparació ens permetrà obtenir d'altres criteris a les seccions següents. De moment ens permet decidir la convergència de  $\sum \phi(n)r^n$  amb  $0 < r < 1$  si  $-M < \phi(n) < M$ .

Efectivament, resulta que

$$|\phi(n)r^n| < Mr^n,$$

i per tant

$$\sum |\phi_n r^n| < M \sum r^n.$$

La darrera sèrie és geomètrica amb raó més petita que 1 i per tant convergeix, la qual cosa implica que la nostra sèrie convergeix absolutament i, per tant, convergeix.

Dintre d'aquest cas cauen sèries amb termes com

$$a_n = \frac{\cos n}{2^n + n^2 - \sin^3 n} = \frac{1}{2^n} \left( \frac{\cos n}{1 + \frac{n^2}{2^n} - \frac{\sin^3 n}{2^n}} \right).$$

Al darrer parèntesi el numerador oscil·la entre  $-1$  i  $1$ , mentre que el denominador tendeix a  $1$ , per tant el parèntesi és acotat i podem aplicar el criteri anterior.

En canvi una sèrie  $\sum a_n$  en què  $a_n > 0$  sigui de la forma  $\phi(n)/n$ , on  $\{\phi(n)\}$  tendeixi a una constant  $c > 0$  divergeix, perquè si  $\varepsilon < c$ , tenim que per  $n$  més gran que una certa  $n_0$ ,  $\phi(n) > c - \varepsilon > 0$ , i per tant

$$\frac{1}{n}\phi(n) > (c - \varepsilon)\frac{1}{n},$$

la qual cosa implica

$$\sum_{k=n_0}^n \frac{1}{k}\phi(k) > (c - \varepsilon) \sum_{k=n_0}^n \frac{1}{k}.$$

Com que la sèrie harmònica divergeix, la nostra també.

## 5.10 Criteri de convergència del quocient

Aquest criteri de convergència de sèries rep també el nom de *criteri de D'Alembert* i ens diu que si  $\overline{\lim} |a_{n+1}/a_n| < 1$ , llavors  $\sum a_n$  convergeix, mentre que si existeix  $n_0$  tal, que per a  $n > n_0$ ,  $|a_{n+1}/a_n| > 1$ , la sèrie  $\sum a_n$  divergeix. Si  $\underline{\lim} |a_{n+1}/a_n| \leq 1 \leq \overline{\lim} |a_{n+1}/a_n|$ , no podem decidir.

Quan existeix el  $\lim |a_{n+1}/a_n| = r$  el que ens diu aquest criteri és que si  $r > 1$ , la sèrie divergeix, si  $r < 1$  convergeix, i si  $r = 1$  no ho podem dir.

La demostració de la validesa d'aquest criteri és la següent:

Si  $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$  a partir de certa  $n_0$ , això vol dir que  $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ ; per tant  $\{a_n\}$  no tendeix a  $0$ , i la sèrie no convergeix.

Si  $\lim |a_{n+1}/a_n| = r < 1$  vol dir, de la definició de límit superior, que existeixen  $n_0$  i  $s$ ,  $r < s < 1$  tals, que per  $n > n_0$  es compleix

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < s.$$

Procedint inductivament, a partir de

$$|a_{n_0+1}| < s|a_{n_0}|,$$

obtenim  $|a_{n_0+m}| \leq s^m |a_{n_0}|$ .

Per tant per a  $n \geq n_0$ ,

$$|a_n| < |a_{n_0}| s^{n-n_0} = |a_{n_0}| s^{-n_0} \cdot s^n.$$

D'aquí que

$$\sum |a_n| \leq |a_{n_0}| s^{-n_0} \sum s^n.$$

Aquesta darrera és una sèrie geomètrica amb raó  $s < 1$ , i per tant convergeix.

Aquest criteri ens serveix, per exemple, per a determinar la convergència de la *sèrie binomial*. Aquesta sèrie és  $\sum a_n$ , amb

$$a_n = \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}x^n,$$

on  $p$  i  $x$  són reals arbitraris.

Aquesta sèrie s'obté d'aplicar formalment la *fórmula del binomi* de Newton:

$$(1+x)^p = 1 + x + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Quan  $p$  és un natural, resulta que aquesta expressió té un número finit de termes, ja que per a  $n > p$  apareix un factor nul a cada terme, i en aquest cas la suma és igual efectivament a  $(1+x)^p$ .

En canvi, quan  $p$  no és un enter positiu, la sèrie es torna infinita, i només tindrà sentit si convergeix.

El criteri de D'Alembert ens serveix per a esbrinar si convergeix o no: tenim  $a_{n+1}/a_n = (p-n)x/(n+1)$ . Quan  $n$  tendeix a  $\infty$ , aquesta expressió tendeix a  $-x$ . Si  $|x| < 1$  resulta, doncs, que la sèrie binomial convergeix, mentre que divergeix si  $|x| > 1$ . Per a  $x = 1$  aquest criteri no ens diu res. El que no hem demostrat és que quan convergeix ho fa al valor  $(1+x)^p$ . Això ho farem al proper capítol.

Exemples del fet que el criteri del quocient no decideix quan  $r = 1$ , els constitueixen les sèries  $\sum \frac{1}{n}$ , que divergeix (és la sèrie harmònica), i  $\sum \frac{1}{n^2}$  que convergeix, com veurem més endavant amb el criteri de la integral.

## 5.11 Criteri de convergència de l'arrel

També és conegut com a *criteri de Cauchy* i consisteix a calcular  $\sqrt[n]{|a_n|}$  i el seu límit per a determinar la convergència de  $\sum a_n$ .

Si  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = r$ , llavors la sèrie convergeix si  $r < 1$ , divergeix si  $r > 1$  i no ens diu res si  $r = 1$ .

La demostració és la següent:

Si  $r < 1$  podem trobar  $s$  de manera que  $r < s < 1$ , i existeix  $n_0$  tal, que si  $n > n_0$ , llavors  $\sqrt[n]{|a_n|} < s$ , o sigui  $|a_n| < s^n$ . Com que la sèrie  $\sum s^n$  és geomètrica amb raó més petita que 1, convergeix, i per tant  $\sum a_n$  també.

Per altra banda si  $r > 1$  vol dir que existeix  $\{n_k\}$  tal, que  $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \rightarrow r$ , o sigui que  $|a_{n_k}| > 1$  i per tant  $\{a_n\}$  no tendeix a 0 i la sèrie divergeix.

Per veure que per a  $r = 1$  el criteri no decideix, podem prendre els mateixos exemples utilitzats a la secció passada:  $\sum \frac{1}{n}$  i  $\sum \frac{1}{n^2}$  (que  $\sqrt[n]{n^2} \rightarrow 1$  es deixa com a exercici).

Els criteris del quocient i de l'arrel ens seran d'utilitat per a determinar el radi de convergència de sèries de potències al capítol següent.

Fem notar que el criteri de l'arrel és més discriminant que el del quocient, ja que es compleix

$$\underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

(Deixem com a exercici per al lector la demostració).

## 5.12 Criteri de convergència mitjançant la integral

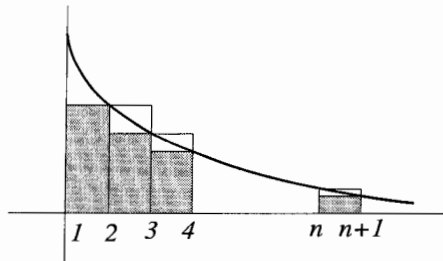
Si  $f$  és una funció contínua a  $[0, \infty)$ , positiva i decreixent tal que  $f(n) = a_n$ , llavors tenim que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  convergeix si ho fa la successió d'integrals  $\{\int_0^n f\}$ .

De fet tenim una mica més, també podem dir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f < \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f$ .

Efectivament, de la definició d'integral, i tenint en compte que  $f$  és decreixent,  $\sum_{k=1}^n f(k)$  és més petit que  $\int_0^n f$ , que forma una successió monòtona. Si és acotada aquesta successió té límit i se segueix el resultat. D'una manera anàloga tenim la cota inferior per la suma de la sèrie:

$$\int_1^{n+1} f < \sum_{k=1}^n a_k.$$

Una figura ajudarà a la intuïció d'aquesta afirmació.



Si la successió creixent  $\int_1^n f$  tendeix a infinit, llavors també ho farà  $\sum_{k=1}^n a_k$ , segons la desigualtat última.

El criteri també pot aplicar-se quan  $f$  no és contínua a  $[0, \infty)$ , sinó tan sols a  $(0, \infty)$ , és a dir, si  $f(x)$  tendeix a infinit quan  $x$  tendeix a 0 per la dreta. Llavors, el que hem de fer és fixar-nos que

$$a_1 + \int_2^n f < \sum_{k=1}^n a_k < a_1 + \int_1^n f$$

i procedir com abans.

Per exemple en aquest cas estem amb la sèrie  $\sum(1/n^2)$ . Si fem  $f(x) = 1/x^2$ , tenim una funció no acotada en un entorn de 0.

De les darreres desigualtats tenim:

$$1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^n \frac{dt}{t^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dt}{t^2}.$$

Com que  $\int_a^b dt/t^2 = 1/a - 1/b$ , queda

$$\frac{3}{2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 2.$$

El criteri no ens diu, però, quin és el límit de la sèrie. Per conèixer-lo haurem de filar molt més prim.

### 5.13 Càlcul de límits de funcions

Quan la funció  $f$  és contínua en un punt, ja sabem com trobar-ne el límit: només cal avaluar-la.

El cas és diferent si volem conèixer el límit a l'infinit o bé si la funció no està definida al punt considerat i el que volem veure és si la podem estendre contínuament a aquest punt (és a dir, incloure aquest punt al seu domini fent que la funció sigui contínua, generalment només per la dreta o per l'esquerra).

Per exemple, la funció

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

té límit 0 quan  $x$  tendeix a 0, perquè  $|f(x)| = |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$ , i per tant donada  $\varepsilon > 0$ , n'hi ha prou amb prendre  $|x| < \varepsilon$  per fer que  $|f(x)| < \varepsilon$ . Així, doncs, si afegim  $f(0) = 0$  a la definició de la funció, tenim una funció contínua.

En canvi la funció

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

no té límit quan  $x$  tendeix a 0, ja sigui per la dreta o per l'esquerra: efectivament en qualsevol entorn de 0 la funció pren tots els valors de l'interval  $[-1, 1]$ , i per tant no podem assegurar que  $|f(x)| < \varepsilon$  si  $|x|$  és prou petita. Això vol dir que no la podem fer contínua afegint el 0 al domini de definició.

La funció  $f(x) = (1/x) \sin(1/x)$ ,  $x \neq 0$ , no només no té límit quan  $x \rightarrow 0$ , sinó que no és acotada. I tampoc no tendeix ni a  $+\infty$  ni a  $-\infty$ , ni per l'esquerra ni per la dreta, puix oscil·la amb amplitud creixent quan ens apropem a 0.

Diferent resulta el cas de la funció

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0,$$



que també es pot estendre contínuament a tot  $\mathbb{R}$  prenent  $f(0) = 0$ . Resulta que la funció així definida és derivable a tots els punts. Si  $x \neq 0$ , aplicant les fórmules de derivació,

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

mentre que

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h}.$$

Com que  $|\sin \frac{1}{h}| \leq 1$  per a tota  $h$ , resulta que  $f'(0) = 0$ .

Notem, però, que  $f'(x)$  no té límit quan  $x$  tendeix a 0, i per tant la derivada no és contínua.

Un exemple del càlcul del límit de  $f(x)$  quan  $x$  tendeix a infinit, el constitueix

$$f(x) = \frac{a^x}{x^p}, \quad \text{amb } a > 1, \quad p > 0 \text{ reals, } \quad x \in (0, \infty).$$

Tenim que si  $n = [x]$  (la part entera de  $x$ , és a dir el número natural  $n$  que fa  $0 \leq x - n < 1$ ),  $b = 1 - a$  i  $m$  és un natural més gran que  $p$ , llavors per a  $n > m$ :

$$\begin{aligned} \frac{a^x}{x^p} &> \frac{(1+b)^n}{(n+1)^m} = \frac{1}{(n+1)^m} \left( 1 + nb + \dots + \frac{n! b^{m+1}}{(n-m-1)!(m+1)!} + \dots b^n \right) \\ &> \frac{b^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \frac{n!}{(n-m-1)!(n+1)^m}. \end{aligned}$$

La primera desigualtat l'hem obtinguda prenent un numerador més petit (o igual) i un denominador més gran que els de l'expressió original. Després hem desenvolupat el numerador per la fórmula del binomi, i la desigualtat final s'obté negligint termes positius d'aquest desenvolupament.

Notem ara que el segon factor de l'última expressió és

$$\frac{n!}{(n-m-1)!(n+1)^m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m)}{(n+1)^m} = \frac{n^{m+1} + \dots}{n^m + \dots},$$

on el numerador és un *polinomi mònic* (és a dir amb el coeficient del terme de grau més alt igual a 1) en  $n$  de grau  $m+1$ , mentre que el denominador ho és de grau  $m$ . Ja hem vist que això tendeix a infinit quan  $n$  tendeix a infinit.

La conclusió és, doncs, que  $a^x/x^p \rightarrow \infty$  quan  $x \rightarrow \infty$ . És a dir, en altres paraules, que  $a^x$  tendeix a  $\infty$  més de pressa que  $x^p$ .

Deixem com a exercici fer veure que els límits d'una suma, producte o quocient de funcions, són la suma, el producte o el quocient dels límits d'aquestes funcions (en el cas del quocient, quan el límit del divisor no és zero).

## 5.14 La regla de l'Hôpital

Ens podem trobar en el cas d'haver de calcular el límit d'una funció expressada com el quocient de dues funcions que tendeixen a zero al punt on volem calcular el límit. El següent teorema ens dóna un procediment força utilitzat.

Suposem que  $g$  i  $h$  són dues funcions contínues a  $[a, b]$  i derivables a  $(a, b)$ . Suposem a més que  $g'/h'$  té límit per la dreta al punt  $a$ . Llavors es compleix:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g'(x)}{h'(x)}.$$

Per a demostrar-ho prenem

$$f(x) = g(x)(h(b) - h(a)) - h(x)(g(b) - g(a)),$$

definida i contínua a  $[a, b]$ , derivable a  $(a, b)$  i amb  $f(a) = f(b)$ , com podem comprovar avaluant-la a  $a$  i a  $b$ .

Llavors, pel teorema de Rolle (capítol 3), es verifica que existeix un punt  $\xi \in (a, b)$  per al qual  $f'(\xi) = 0$ .

Això vol dir que

$$g'(\xi)(h(b) - h(a)) = h'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Ara, hem suposat que  $h(a) = g(a) = 0$ , i per tant resulta

$$\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)} = \frac{g(b)}{h(b)}.$$

Com que quan  $b \rightarrow a^+$ , també  $\xi \rightarrow a^+$ , resulta que el lim de  $g(x)/h(x)$  coincideix amb el de  $g'(x)/h'(x)$ , que existeix perquè  $h'$  no tendeix a 0.

D'una manera simètrica es pot demostrar el resultat pel límit per l'esquerra.

Cal fer notar que la propietat contrària no és certa, podria ser que  $g/h$  tingués límit, mentre que  $g'/h'$  no en té. Per exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = 0,$$

mentre que derivant el numerador i el denominador ens queda

$$\frac{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x},$$

que no té límit quan  $x$  tendeix a 0, ja que oscil·la entre  $-1$  i  $1$ .

Per al cas en què  $a = \infty$  el que fem és prendre  $1/y$  en lloc de  $x$ , i considerar el límit quan  $x \rightarrow 0^+$ . Queda:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{g(1/y)}{h(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(-g'/y^2)(1/y)}{(-h'/y^2)(1/y)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)}{h'(x)}.$$

Simètricament per  $a = -\infty$ .

Com a exemple d'utilització de la regla de l'Hôpital considerem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x},$$

on  $\ln x \rightarrow -\infty$ , mentre que  $1/x \rightarrow \infty$  quan  $x \rightarrow 0$ . Derivant numerador i denominador, queda l'expressió  $(1/x)/(-1/x^2) = -x$ , que certament tendeix a 0 quan  $x \rightarrow 0$ .

Aquest límit anterior ens serveix per a veure que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$ , perquè prenent logaritmes, tenim  $\ln(x^x) = x \ln x$ , que tendeix a 0, com acabem de veure, per tant, si el logaritme tendeix a 0, vol dir que  $x^x$  tendeix a 1, ja que  $\ln$  és una funció contínua i amb inversa que val 0 a 1.

També ens pot resultar interessant calcular el límit de  $g/h$  quan tant  $g$  com  $h$  tendeixen a  $\infty$ . Certament, això es pot intentar reduint l'expressió a  $(1/h)/(1/g)$ , i llavors tant  $1/h$  com  $1/g$  tendeixen a 0, encara que això no sempre ens resol el problema. Per exemple, per a calcular  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x/x$ , que ja hem demostrat en una secció anterior que tendeix a  $\infty$ , podríem intentar escriure-ho com  $x^{-1}/e^{-x}$ . Si derivem, però, queda  $x^{-2}/e^{-x}$ , que no ens resol el problema, ni iterant la derivació moltes vegades.

Per resoldre aquesta situació es pot obtenir un teorema que ens digui que fins i tot en el cas que numerador i denominador tendeixin a  $\infty$  podem aplicar la regla de l'Hôpital: Això voldria dir pel nostre exemple cercar el límit de  $e^x/1$  quan  $x \rightarrow \infty$ , que certament és  $\infty$ . La demostració d'aquest teorema, la deixem com a exercici.

L'aplicació successiva d'aquest darrer criteri ens permet calcular el límit d'expressions com  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x/x^n$ , amb  $n \in \mathbb{N}$ . El que fem és anar calculant les derivades successives de numerador i denominador fins arribar a un límit conegut. Obtenim

$$\frac{e^x}{nx^{n-1}}, \dots, \frac{e^x}{n!},$$

que certament tendeix a  $\infty$  quan  $x \rightarrow \infty$ , ja que  $n!$  és una constant.

## 5.15 Ordre de creixement de les funcions

Diem que  $f(x)$  és de l'ordre de creixement de  $g(x)$ , ambdues positives, quan  $x$  tendeix a  $a$ , si existeix un real  $M > 0$  tal que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) < M$ . Això se sol denotar per  $f(x) = O(g(x))$  quan  $x \rightarrow a$ . S'entén que  $a$  pot ser  $\pm\infty$  i que també el límit pot ser per la dreta o per l'esquerra si  $a$  és finita.

En canvi, diem que  $f$  és d'un ordre de creixement més petit que  $g$  quan  $x \rightarrow a$  si  $f/g \rightarrow 0$  quan  $x \rightarrow a$ . Això es denota per

$$f(x) = o(g(x)).$$

Recordem que aquesta darrera notació ja s'ha fet servir al capítol 3 en demostrar la regla de la cadena.

Un concepte més restrictiu és que  $f$  i  $g$  són *asimptòtiques* quan  $x \rightarrow a$  si  $\lim f/g = 1$  quan  $x \rightarrow a$ . Es denota per  $f \sim g$  quan  $x \rightarrow a$ .

Aquests conceptes resulten d'interès quan tant  $f$  com  $g$  tendeixen a infinit, o a zero al punt considerat.

## 5.16 Regularitat de funcions

Ja hem vist que no totes les funcions tenen derivades de tots els ordres a tots els punts. Per a aquelles que hem definit en termes de les funcions elementals, ja sigui mitjançant les operacions algebraïques o la integració indefinida, tenim fórmules de derivació que ens permeten anar calculant les derivades successives. El que pot passar és que apareguin denominadors que s'anul·lin en algun punt, i llavors la funció corresponent deixa d'estar definida (de fet deixa d'estar acotada) en aquest punt.

Per exemple  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , una funció definida per a tota  $x \in \mathbb{R}$ , té per derivada  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ , que no està definida per a  $x = 0$ .

En canvi, la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per a } x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{per a } x > 0, \end{cases}$$

té derivades de tots els ordres a tots els punts de  $\mathbb{R}$ . Calculem-les a  $x = 0$ :  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \exp(-1/h^2)/h$ , que val 0 ja que si fem  $1/h = x$ , queda el límit quan  $x$  tendeix a infinit de  $x/\exp(x^2)$ , que és menor que  $x/\exp x$ , que ja sabem que tendeix a 0 (aplicant la regla de l'Hôpital).

Resulta, doncs, que

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{per a } x \leq 0 \\ \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} & \text{per a } x > 0, \end{cases}$$

que és una funció contínua com es pot veure aplicant de nou la regla de l'Hôpital.

Repetint el procediment, tenim

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2}{h^4}e^{-\frac{1}{h^2}} = 0, \quad \text{i}$$

$$f''(x) = \left( \frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right) e^{-1/x^2}, \quad \text{per a } x \neq 0$$

que tendeix a 0 quan  $x$  ho fa. O sigui que  $f''$  també és contínua a  $x = 0$ .

Procedint successivament obtenim que les derivades de tots els ordres valen zero per  $x = 0$ , i també tendeixen a 0 quan  $x$  ho fa.

En general, si en el domini de definició de la funció  $f$  tenim que  $f^{(n)}$  existeix, diem que  $f$  és *derivable d'ordre  $n$* . Si a més  $f^{(n)}$  és contínua (la qual cosa implica

que  $f^{(j)}$  per a  $j < n$  també ho és), llavors diem que  $f$  és *derivable d'ordre  $n$  amb continuïtat*.

D'una manera relativament poc precisa, però força utilitzada, es diu que una funció és més *regular* com més derivades posseeix. S'utilitza de vegades el terme  $f$  pertany a  $C^n$  o a  $C^\infty$ , (o és de classe  $C^n$  o  $C^\infty$ ), per a indicar que posseeix derivades contínues fins a ordre  $n$  o de tots els ordres al seu domini de definició. Així la funció utilitzada al darrer exemple pertany a  $C^\infty$ , mentre que  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  pertany a  $C^0$ .

## 5.17 Màxims, mínims i punts d'inflexió

Ja sabem que la derivada positiva correspon a una funció creixent, mentre que una de negativa correspon a una funció decreixent. Quan la derivada s'anul·la tenim el que s'anomena un *punt crític*. Ja esmentàvem en la introducció d'aquest capítol que Fermat va "inventar" el concepte de derivada tractant de maximitzar l'àrea d'un rectangle de perímetre donat: si  $p$  és el semiperímetre i  $x$  és un costat, llavors el màxim s'assoleix quan la derivada de la funció  $f(x) = x(p - x)$  s'anul·la.

Si en algun interval on la funció està definida i és derivable, la derivada passa de ser positiva a l'esquerra d'un punt  $a$ , a ser negativa a la seva dreta, en aquest punt la funció té un *màxim*, és a dir, que per a  $x$  en un entorn de  $a$  tenim  $f(a) > f(x)$  ja que  $f(a + h) - f(a) = \int_a^{a+h} f'(x) dx$  serà negativa tant per a  $h$  positiva com per a  $h$  negativa. Per altra banda també resultarà que  $f'(a) = 0$ , perquè  $(f(a + h) - f(a))/h > 0$  per a  $h < 0$ , cosa que implica  $f'(a) \geq 0$ , mentre que per a  $h > 0$ ,  $(f(a + h) - f(a))/h < 0$ , que força  $f'(a) \leq 0$ . Per tant  $f'(a) = 0$ .

D'una manera semblant un canvi en un punt  $a$  de derivada negativa a positiva comporta l'existència d'un *mínim* de la funció a  $a$ , és a dir que per a  $x$  en un entorn de  $a$ ,  $f(x) > f(a)$ .

En canvi, si  $f'(a)$  és 0, mentre que és positiva per a tota  $x \neq a$  en un entorn de  $a$ , tenim el que s'anomena un *punt d'inflexió*: la funció és creixent a tot l'entorn, amb derivada nul·la a  $a$ . També tenim un punt d'inflexió quan  $f'(x)$  és negativa per  $x \neq a$ .

Les condicions que hem donat sobre les derivades en un entorn de  $a$  no sempre són fàcils de comprovar. De vegades convé més mirar-se la segona derivada. Per exemple, si  $f'(a) = 0$  i  $f''(a) > 0$ , llavors  $f$  té un mínim a  $a$ , perquè vol dir que  $f'$  és creixent: si val 0 a  $a$ , llavors és negativa a la seva esquerra i positiva a la seva dreta. Similarment, si  $f'(a) = 0$  i  $f''(a) < 0$ , es té un màxim. Si  $f'(a) = 0$  i  $f''(a) = 0$  no podem dir res, ja que  $f'$  pot ser creixent, decreixent o cap de les dues coses en un entorn de  $a$ .

Si a més de  $f'(a) = f''(a) = 0$ , tenim  $f'''(a) > 0$ , llavors sabem que la segona derivada és creixent, per tant passa de ser negativa a positiva en anar creixent  $x$ , o sigui que la primera derivada passa de decreixent a ser creixent: tenim, doncs, un mínim igual a 0 per a la primera derivada. Això vol dir que

la derivada és sempre positiva per a  $x \neq a$  i això comporta que la funció és creixent: tenim doncs un punt d'inflexió. Semblantment si  $f'''(a) < 0$ .

Sistematitzant aquests raonaments (ho deixem com a exercici), podem establir la regla general: Si la derivada d'ordre més petit que no s'anulla a  $a$  és d'ordre parell, llavors es té un màxim o un mínim, segons que el signe d'aquesta derivada sigui negatiu o positiu respectivament. Si és d'ordre senar, llavors la funció és creixent o decreixent en un entorn de  $a$ , segons que el signe sigui positiu o negatiu; si a més  $f'(a) = 0$ , es té un punt d'inflexió.

Cal fer notar que aquestes condicions són totes suficients, és a dir ens diuen a partir de les derivades si tenim màxims o mínims. Podria ser, però, que  $f^{(n)}(a) = 0$  per a tota  $n \in \mathbb{N}$ , i que es tingués un mínim o un màxim, o un punt d'inflexió.

Per exemple, la funció

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

té un mínim per a  $x = 0$ , però  $f^{(n)}(0) = 0$  per a tota  $n$ , tal com hem vist en la secció anterior. Així mateix, la funció derivable

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

té totes les derivades nulles a  $x = 0$ , però no té ni un màxim ni un mínim, ni un punt d'inflexió en aquest punt.

## 5.18 Gràfiques de funcions

Les propietats qualitatives de les funcions queden retratades en les seves gràfiques. Els elements que hi volem veure reflectits són el comportament asimptòtic quan  $x \rightarrow \pm\infty$ , incloent si té o no té límit, o bé l'ordre de creixement; el comportament asimptòtic als punts en què la funció no és contínua, els punts en què canvia de signe, tant ella com les seves derivades, etc.

Les eines que tenim per a fer això són, entre d'altres, les que hem exposat en aquest capítol, i queda ja al criteri de cadascú com aprofitar-les de la manera més apropiada. Per tal d'obtenir informació més quantitativa sobre les funcions, per exemple per a trobar amb alguna precisió els punts on s'anulla ella o les derivades, s'han de complementar les tècniques analítiques amb els mètodes numèrics que estudiarem en capítols posteriors.

Per tal de tenir una idea de com és la gràfica d'una funció, resulta aconsellable, quan es pot, expressar-la com a producte de dues funcions de gràfica coneguda. Generalment, intentar extreure la gràfica a través d'una mètode rígida: cercar zeros, punts crítics, "asímtotes verticals", límits a l'infinit, etc., ajuda a obtenir la gràfica, però pot ser oneros i fins i tot impracticable.

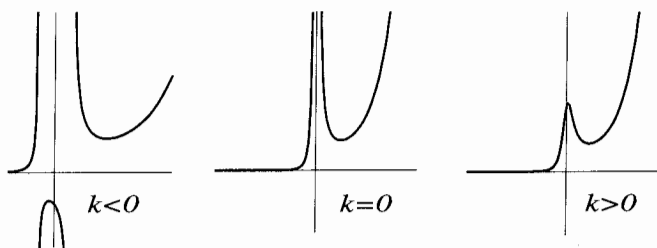
Recordem que als punts de discontinuïtat no és necessari que la funció tingui límits per la dreta i per l'esquerra, ni que siguin infinits, com passa a les "asímtotes". Per exemple

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x)/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

té un denominador que tendeix a 0 quan  $x \rightarrow 0^+$ . Com que  $\sin(1/x)$  es manté entre  $-1$  i  $1$ , resulta que la funció no és acotada a cap entorn de 0, i presenta oscil·lacions cada vegada més grans a mesura que ens aproximem a 0.

Per exemple, per a obtenir les propietats qualitatives de la gràfica de la funció  $f(x) = e^x/(x^2 + k)$  per diversos valors de  $k$ , recomanem fer la gràfica de  $e^x$ , per una banda i de  $1/(x^2 + k)$  per l'altra.

Resulta doncs que, segons que  $k$  sigui negatiu, zero o positiu tindrem les tres possibles gràfiques següents



En el cas  $k > 0$  veiem que tenim una funció contínua i la determinació del màxim i el mínim marcats es pot fer calculant els zeros del numerador de la derivada:

$$(x^2 - 2x + k)e^x,$$

que s'anulla per a  $x = 1 \pm \sqrt{1 - k}$ .

Si  $0 < k < 1$  tindrem, doncs, un màxim i un mínim, si  $k = 1$  tenim un punt d'inflexió, i si  $k > 1$  la funció és sempre creixent.

## 5.19 Límits superior i inferior d'una funció

Una manera de definir el límit superior d'una funció quan  $x \rightarrow a$  (aquí  $a$  pot ser a més de qualsevol número real,  $+\infty$  o  $-\infty$ , i el límit pot ser per l'esquerra o per la dreta) és utilitzar successions tendint a  $a$ . Així el límit superior de  $f(x)$  quan  $x$  tendeix a  $a$  seria el suprem dels límits superiors de les successions  $\{f(a_n)\}$ , sobre el conjunt de totes les successions  $\{a_n\}$  que tendeixen a  $a$ .

Una altra manera és prendre  $\sup f(x)$  per a  $x$  en un entorn de  $a$  i definir el límit superior de  $f$  quan  $x$  tendeix a  $a$ , com el límit de l'extrem superior de  $f(x)$  a l'interval  $(a - \delta, a + \delta)$  sense el punt  $a$ , quan  $\delta$  tendeix a 0. És a dir

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{x \in (a - \delta, a + \delta) \\ x \neq a}} \{f(x)\}.$$

Certament aquest límit ha d'existir si  $f(x)$  és acotada en un entorn de  $a$ , perquè  $\sup f(x)$  al conjunt  $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$  és una funció monòtona no decreixent de  $\delta$ , és a dir, no creix quan  $\delta$  tendeix a 0. Per tant escollint  $\delta = 1/n$ , tenim una successió no creixent i acotada, i que, per tant, és convergent.

Si volem el límit superior quan  $x \rightarrow \infty$ , posarem:

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{x \geq M} \{f(x)\}.$$

Aquí també  $\sup_{x \geq M} \{f(x)\}$  és una funció monòtona no creixent de  $M$ , i pot tenir límit finit o infinit.

Si es vol definir el límit superior per l'esquerra, prendrem

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in (a-\delta, a)} f(x).$$

Els altres casos s'obtenen *mutatis mutandis* a partir de les definicions donades.

## 5.20 Integrals impròpies

La nostra definició de la integral considera només la de les funcions contínues definides en intervals tancats. Encara que l'estenguéssim a la integral de Riemann només cobriríem les funcions acotades sobre un interval acotat i amb el conjunt de punts de discontinuïtat de mesura zero (vegeu apèndix del capítol 3). Això no donaria la integral de casos d'interès en què les funcions o bé no són acotades, o bé en què el domini sobre el que volem integrar és un interval no acotat.

La integral de Lebesgue, que hem definit també en l'apèndix del capítol 3, sí que pot servir, ja que la seva definició no pren en consideració ni l'acotació de la funció ni la de l'interval d'integració. És aquesta una de les raons, entre d'altres ja avançades quan l'hem definida, que ha fet que aquest concepte d'integral s'hagi imposat, sobretot si tenim en compte que coincideix amb la integral de Riemann i la nostra, la de Cauchy, quan les funcions compleixen les condicions perquè existeixin.

Una altra manera d'estendre les integrals a funcions no acotades i dominis infinits, sense abandonar la seva continuïtat més que possiblement a un nombre finit de punts, és la introducció feta, ja des del segle XVII, de les integrals impròpies.

Considerem primer el cas d'un interval no acotat.

Quan escrivim l'expressió  $\int_a^\infty f$ , el que volem dir és  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f$ , si és que existeix. Si aquest és el cas diem que la integral *convergeix*.

Considerem diversos exemples:

$$\int_a^x \sin t \, dt = \cos a - \cos x,$$



és una funció de  $x$  oscil·latòria: quan  $x$  tendeix a infinit el valor de la funció abraça tot l'interval  $[\cos a - 1, \cos a + 1]$ . Per tant  $\int_0^\infty \sin t dt$  no convergeix.

Tampoc no convergeix  $\int_0^\infty t dt$ , puix que  $\int_0^x t dt = x^2/2$  tendeix a  $\infty$  quan  $x$  tendeix a  $\infty$ .

En canvi  $\int_0^\infty e^{-at} dt$  convergeix per  $a > 0$ , ja que

$$\int_0^x e^{-at} dt = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}),$$

tendeix a  $1/a$  quan  $x$  tendeix a  $\infty$ . En canvi la integral divergeix si  $a \leq 0$ .

La integral  $\int_a^\infty e^{-at} \sin t dt$  convergeix, perquè en ser  $|\sin t| \leq 1$ , tenim que

$$\int_a^x |e^{-at} \sin t| dt < \int_a^x e^{-at} dt,$$

i aquesta darrera integral és una funció de  $x$  creixent i acotada.

Amb una mica de treball podem demostrar que  $\int_a^\infty e^{-at} P(t) dt$ , on  $P$  és un polinomi de grau qualsevol, convergeix si  $a > 0$  i divergeix si  $a \leq 0$  (exercici).

D'una manera del tot anàloga podem considerar  $\int_{-\infty}^a f$  i llavors definir  $\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^a f + \int_a^\infty$ , si totes dues existeixen.

Per exemple

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2}$$

convergeix, perquè

$$\int_x^y \frac{dt}{1+t^2} = \arctg y - \arctg x,$$

quan  $y \rightarrow \infty$ ,  $\arctg y \rightarrow \pi/2$ , mentre que quan  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\arctg x \rightarrow -\pi/2$ . Per tant diem que  $\int_{-\infty}^\infty dt/(1+t^2)$  és igual o convergeix a  $\pi$ .

## 5.21 Integrals de funcions no acotades

Una altra mena d'integral impròpia es presenta quan una funció és contínua en un interval obert, però no és acotada en l'entorn d'un dels extrems d'aquest interval (diem que no és acotada al punt corresponent).

Per exemple, si considerem  $f(x) = 1/\sqrt{x}$ , ens resulta que  $\int_0^1 f$  no té sentit segons la nostra definició d'integral, puix que  $f$  no és acotada a l'interval  $[0, 1]$ . Ara bé, podem considerar  $\int_\varepsilon^1 dx/\sqrt{x} = [2\sqrt{x}]_\varepsilon^1 = 2(1 - \sqrt{\varepsilon})$ , amb  $0 < \varepsilon < 1$ . Quan  $\varepsilon$  tendeix a 0, això tendeix a 2, i aquest és el valor que donem a  $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$ , i diem que convergeix o és igual a 2.

De manera semblant tenim que

$$\int_0^x \ln t dt = x \ln x - x,$$

perquè integrant per parts

$$\int_{\varepsilon}^x \ln t \, dt = [t \ln t]_{\varepsilon}^x - \int_{\varepsilon}^x dt = x \ln x - x + \varepsilon - \varepsilon \ln \varepsilon,$$

i tant  $\varepsilon$  com  $\varepsilon \ln \varepsilon$  tendeixen a 0 quan  $\varepsilon$  ho fa. (Això darrer es pot deduir per la regla de l'Hôpital, per exemple).

En canvi, certament,  $\int_0^1 dx/x$  no és convergent. No costa gaire de veure que  $\int_0^1 dx/x^m$  és convergent si i sols si  $m < 1$  (exercici).

Les funcions  $1/x$  i  $1/\sqrt{|x|}$  són, des del punt de vista de la integració, ben diferents: mentre que  $\int_{-1}^1 dx/\sqrt{|x|}$  existeix, ja que tant  $\int_{-1}^0 dx/\sqrt{-x}$  com  $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$  convergeixen, les integrals  $\int_{-1}^0 dx/x$  i  $\int_0^1 dx/x$  no convergeixen: la primera tendeix a  $-\infty$ , mentre que la segona ho fa a  $\infty$ .

Cauchy va trobar una manera de definir  $\int_a^b dx/x$ , per  $a < 0$  i  $b > 0$ , que consisteix a prendre-la com  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{-\varepsilon} dx/x + \int_{\varepsilon}^b dx/x \right)$ . L'expressió entre parèntesis val  $-\ln \frac{a}{\varepsilon} + \ln \frac{b}{\varepsilon} = \ln \frac{b}{a}$ , que és independent de  $\varepsilon$ . (És clar que això no és el mateix que prendre  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{-\varepsilon} dx/x + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^b dx/x$  que no existeix).

Quan es pot emprar aquest procediment, és a dir, quan hi ha un punt on la funció  $f$  no està acotada, i existeix  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f \right)$ , el definim com el *valor principal de Cauchy* d'aquesta integral.

Aquest concepte dona un cert sentit a la integral de funcions per a les quals ni la integral de Lebesgue no en té. (Resulta que perquè la integral de Lebesgue existeixi cal que sigui integrable el valor absolut de la funció, i certament  $\int_{-1}^1 dx/|x|$  no ho és en cap sentit). Realment no és un concepte de gaire conseqüència dins de l'anàlisi matemàtica, però en el passat ha tingut certa presència, com per exemple per a la definició de les funcions *logaritme-integral* o *exponencial integral* de les quals tractarem en l'apèndix.

Es tenen també funcions que deixen de ser acotades a l'entorn d'un punt i que tenen integrals impròpies convergents, però que no ho són absolutament, és a dir, que la integral del valor absolut de la funció no convergeix. Per exemple tal és el cas amb  $f(x) = x^{\alpha} \cos(1/x^{\beta})$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ .

Per  $\alpha > -1$  la integral en un interval que inclogui el zero convergeix, i absolutament, ja que  $|x^{\alpha} \cos(1/x^{\beta})| \leq |x^{\alpha}|$ . Es pot veure (exercici) que si  $\alpha + \beta > -1$  la integral convergeix, i divergeix quan no és així.

Un exemple d'una integral que és impròpia tant perquè l'interval d'integració  $(0, \infty)$  no és acotat, com perquè no és acotada al 0, és la *integral de Frullan*

$$F = \int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

essent  $f$  una funció contínua a  $[0, \infty)$  amb  $\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  convergent.

Tenim

$$F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(bx)}{x} dx \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{a\varepsilon}^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{b\varepsilon}^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t} dt$$

Ara, per la propietat de la mitjana de la integral:

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(t) \cdot \frac{1}{t} dt = f(\xi) \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{dt}{t} = f(\xi) \ln \frac{b\varepsilon}{a\varepsilon} \quad \text{on } \xi \in (a\varepsilon, b\varepsilon).$$

Per tant  $F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\xi) \ln \frac{b}{a} = f(0) \ln \frac{b}{a}$ .

Curiosament el valor de la integral no depèn de  $f$  més que pel valor que tingui al 0.

## 5.22 Les desigualtats de Cauchy-Schwartz

Si  $f$  i  $g$  són contínues a trossos a l'interval  $[a, b]$ , llavors

$$\left( \int_a^b fg \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2 \right) \left( \int_a^b g^2 \right).$$

Per demostrar-ho prenem, per a una  $t$  real,  $\int (f + tg)^2$ , que és igual a  $\int f^2 + 2t \int fg + t^2 \int g^2$ .

Aquesta expressió que és  $at^2 + bt + c$  és no negativa, que vol dir que  $b^2 - 4ac \leq 0$ , que és precisament la desigualtat cercada.

Pel cas discret tenim també que

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right),$$

que es demostra de la mateixa manera que en el cas anterior:

$$\sum a_k^2 + 2t \sum a_k b_k + t^2 \sum b_k^2 \geq 0.$$

## Exercicis i problemes

1. Trobeu els límits, quan  $n$  tendeix a  $\infty$ , de les successions

$$\begin{array}{ll} \sqrt{n^2 + n} - n; & \\ n^a/(1+b)^n, & a, b \in \mathbb{R}, b > 0; \\ e^{-na}n^b, & a, b > 0; \\ n^{-a} \ln n, & a > 0; \\ nc^n, & |c| < 1; \\ 2n^2/n!; & \\ (-1)^n \sqrt{n} \sin(n^n)/(n+1). & \end{array}$$

2. Reduint els seus termes a sumes definidores d'integrals, calculeu els límits quan  $n$  tendeix a  $\infty$  de les següents successions

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}, \quad \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}, \quad \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}, \quad \sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}}.$$

Convé prendre logaritmes a les tres darreres successions.

3. Digueu quines de les següents sèries són convergents i quines són divergents. Per estalviar notació tan sols escrivim el terme  $n$ -èsim de la sèrie.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, & 1/(\ln n)^n, \\ (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})/n, & (-1)^n/(\ln n)^n, \\ (\sqrt[n]{n} - 1)^n, & \sin(1/n), \\ \ln n/n, & n!/n^n, \\ 1/\ln n, & 1/n^2 (\ln n), \\ 1/(\ln n)^k, & 1/n^s \text{ per a } s > 1, \\ 1/(\ln n)^{\ln n}. & \end{array}$$

Per a la darrera sèrie es pot fer servir el criteri de la integral, veient que  $\int_0^\infty (e^y/y^y) dy$  convergeix.

4. Demostreu que si  $a_n \geq a_{n+1}$ , llavors  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  convergeix si i sols si  $\sum_{k=0}^\infty 2^k a_{2^k}$  ho fa.

Utilitzant aquesta propietat, mostreu que  $\sum_{n=2}^\infty 1/n(\ln n)^p$  convergeix per a  $p > 1$  i divergeix per a  $p \leq 1$ .

5. Comproveu que

$$1/n^2 = -2\pi^2 \int_0^1 x(1-x) \cos(2n\pi x) dx,$$

i a partir d'aquí i del resultat de l'exercici 4 del capítol anterior, demostreu que  $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2 = \pi^2/6$ .

6. Trobeu els següents límits:  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)/Q(x)$ ,  $P$  i  $Q$  polinomis,  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$ , segons quin sigui el valor de  $a > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x/(\ln x)^n$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^n$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x/\operatorname{tg} x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x - 1)/x^2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{1/x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} ((x - 2)/(x^2 + x - 2))^{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$ .
7. Avaluu els límits de les següents funcions quan  $x \rightarrow \infty$ :

$$e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt,$$

$$e^{-x} \int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt,$$

$$xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-t^2} dt,$$

$$x \int_0^{1/x} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

8. Demostreu que si  $P$  és un polinomi, llavors  $\frac{d^n}{dx^n}(P(x)e^{-x}) \rightarrow 0$  quan  $x \rightarrow \infty$ , per a tota  $n \in \mathbb{N}$ .
9. Demostreu que les funcions  $f(x) = e^{-1/x^2}$ ,  $f(0) = 0$  i  $f(x) = e^{-1/x^2} \sin(1/x^n)$ ,  $f(0) = 0$  tenen derivades de tots els ordres contínues a  $\mathbb{R}$ .
10. Indiqueu com estan relacionades respecte de l'ordre de creixement quan  $x$  tendeix a  $\infty$ , les funcions a cada un dels següents parells de funcions:  $x^2$  i  $x^2 + \ln(x^2)$ ,  $x^3 + \ln(x^3)$  i  $x^3 \ln x$ ,  $x^x$  i  $e^{x^2}$ ,  $x^{\ln x}$  i  $(\ln x)^x$ ,  $2^x$  i  $e^{x/2}$ .
- I respecte a l'ordre de creixement quan  $x \rightarrow 0^+$  les funcions dels següents parells?
- $x^{-3}$  i  $e^{-1/x}$ ,  $x^{-3} \ln x$  i  $(\ln x)^{1/x}$ ,  $e^{1/x^2}$  i  $(1/x)^{1/x}$ .
11. Calculeu la relació entre l'altura i el radi de la base d'un cilindre, si volem maximitzar-ne el volum amb l'àrea fixada (suma de l'àrea de les dues bases circulars i de l'àrea lateral).
12. Volem anar d'un punt  $A$  situat a 100 m de l'aigua en una platja recta, a un punt  $B$  a l'aigua, situat a 100 m de terra. Suposem també que  $A$  i  $B$  no estan a la mateixa perpendicular a la línia de la costa. Si la velocitat a terra és 5 vegades la velocitat a l'aigua, quina és la trajectòria al llarg de la qual esmerçarem menys temps?

13. Tenim un recipient cònic amb un angle de  $60^\circ$  al vèrtex, situat amb l'eix en posició vertical i el vèrtex cap avall. El recipient conté una quantitat fixada de líquid. Quin és el diàmetre de la bola impermeable que, introduïda al recipient, tocant-lo al llarg d'un cercle horitzontal, fa que el nivell del líquid sigui màxim?
14. Quin és el triangle de màxima àrea inscrit en un cercle donat? I el triangle rectangle de mínima àrea circumscribit al mateix cercle?
15. Dibuixeu les gràfiques de les següents funcions, marcant els màxims, els mínims, els punts de discontinuïtat i els límits a l'infinit.

$$\begin{aligned} & \ln|x|/x, \quad a^x/\ln|x|, \quad \text{per a } a > 0, \\ & x^x, \quad \text{per a } x > 0 \\ & e^x/x^n, \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \text{per a } x \notin (-1, 0]. \end{aligned}$$

16. Demostreu la *desigualtat de Gronwall*:

Siguin  $f$  i  $g$  funcions no negatives i contínues a  $[a, b]$ , i  $k$  un número positiu. Llavors, si  $f(x) \leq k + \int_a^x fg$  per a tota  $x \in [a, b]$ , es compleix que  $f(x) \leq k \exp\left(\int_a^x g\right)$ .

17. Demostreu que  $f(x) = \int_x^\infty (e^{-t}/t) dt$  és integrable en un entorn de 0.
18. Demostreu la convergència de les següents integrals impròpies

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x \, dx, \quad \int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} \, dx, \quad \text{si } \lambda, \mu \in (0, 1), \\ & \int_0^\infty \sin(x^2) \, dx. \end{aligned}$$

19. Demostreu que

$$f(y) = \int_0^\infty \frac{\cos(xy)}{1+x^2} \, dx$$

és una funció contínua de  $y$ .

20. Digueu quines funcions de la forma  $f(x) = x^m \sin(1/x^n)$ ,  $f(0) = 0$ , són derivables a 0, però la seva derivada no és integrable (com a integral impròpia) a  $[0, a]$ .

21. Avalueu les següents integrals impròpies:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt, \quad \int_1^{\infty} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x},$$
$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1 + x^{3/2}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}}, \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

22. Justifiqueu les igualtats:

$$\int_0^{\infty} \ln\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) dx = \pi a,$$
$$\int_0^{\infty} \frac{\ln ax}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi \ln ab}{2b},$$
$$\int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

23. Demostreu que tant  $\int_2^x (\ln t) dt$  com  $\int_0^x |\sin t/t| dt$  tendeixen a  $\infty$  quan  $x \rightarrow \infty$ .

## Apèndixs

### 1. La integral de Poisson i la fórmula de Wallis

La funció  $ke^{-x^2}$  representa una distribució probabilística (la gaussiana), i per tant volem que  $k$  sigui tal, que  $\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-x^2} = 1$ . Per trobar-la podem calcular  $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  (que és la meitat de la integral de  $-\infty$  a  $\infty$ ) i llavors prenem  $k$  de manera que multiplicat per aquest valor valgui  $1/2$ .

El càlcul de la integral esmentada es pot fer amb gran facilitat utilitzant funcions de dues variables i coordenades polars, tal com ho farem més endavant. Aquí en farem una deducció amb les tècniques que posseïm: més onerosa però que ens permet practicar.

Si a la integral  $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  fem el canvi de variables  $x = y\sqrt{n}$ , obtenim

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \int_0^1 (1-y^2)^n &< \sqrt{n} \int_0^1 e^{-ny^2} dy < I \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\infty} e^{-ny^2} dy < \sqrt{n} \int_0^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^n}, \end{aligned}$$

ja que  $(1-y^2)^n < e^{-ny^2} < (1+y^2)^{-n}$ , la qual cosa al seu torn surt de  $1-y^2 < e^{-y^2} < 1/(1+y^2)$  elevat a  $n$ .

Això darrer s'obté prenent  $y^2 = x$ , i veient que per a  $x \geq 0$ ,  $1-x < e^{-x} < 1/(1+x)$ . Aquesta desigualtat es comprova de la següent manera: per a  $x = 0$ , tenim  $1-x = e^{-x}$ , i prenent derivades tenim que  $(1-x)' = -1 < (e^{-x})' = -e^{-x}$  per a  $x > 0$ , cosa que implica  $1-x < e^{-x}$  per a  $x > 0$ .

Similarment comprovem la segona part de la desigualtat, que és equivalent a  $1+x < e^x$ : per a  $x = 0$  les dues bandes valen 1, i les derivades  $(1+x)' = 1 < (e^x)' = e^x$  per a  $x > 0$ .

Fent la substitució  $x = \sin t$ , resulta

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^n \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt.$$

De les fórmules de reducció estudiades al capítol anterior:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1},$$

que és igual, iterant, a  $\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ . On  $m!!$  representa el producte  $m(m-2)(m-4)\dots$  fins arribar a 1 o 2, segons que  $m$  sigui senar o parell.

Per altra banda, fent  $x = \operatorname{tg} t$  tenim

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-(2n-2)} t dt,$$



i utilitzant les fórmules de reducció queda igual a  $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$ .

Tenim, doncs, que

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < I < \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Si ara elevem al quadrat i utilitzem la *fórmula de Wallis*, resulta que  $\forall n \exists \theta \in (0, 1)$  tal, que

$$\frac{\pi}{2} = \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+\theta},$$

que deduirem tot seguit, resulta

$$\frac{\pi}{2} \frac{n}{(2n+1)^2} (2n+\theta) < I^2 < \frac{\pi}{2} \frac{n}{2(2n-1)+\theta}.$$

Fent tendir  $n$  a  $\infty$ , queda

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

és a dir,  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1$ .

## 2. La fórmula de Wallis

La fórmula de Wallis s'obté d'observar que per a  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , tenim que  $0 < \sin x < 1$ , i per tant  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}$ .

Utilitzant les fórmules de reducció tal com ho hem fet una mica més amunt, resulta

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Per tant

$$\left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n},$$

d'on la fórmula que cerquem surt immediatament.

Com dèiem en la introducció d'aquest capítol, *Wallis* va obtenir aquesta fórmula per mètodes d'interpolació força heterodoxos, però va constituir un pas important en la gestació del càlcul infinitesimal: a més de ser encertada, va servir d'inspiració a *Newton* per a obtenir la forma general de la fórmula del binomi, que al seu torn va ser bàsica per a calcular metòdicament les primeres derivades i primitives.

## 3. La funció gamma

La *funció gamma* d'Euler ve definida per

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x \in (0, \infty).$$

Que la integral impròpia està ben definida per a tots els valors positius de  $x$  se segueix del fet que, per una banda,

$$\int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_1^{\infty} e^{-t} t^n dt \quad \text{per a alguna } n \in \mathbb{N},$$

i integrant per parts iteradament es veu que la darrera integral convergeix, i per tant la nostra, ja que el seu integrand és sempre positiu.

Per l'altra banda, si  $x \geq 1$ , llavors  $e^{-t} t^{x-1}$  és contínua a  $[0, \infty)$ , i per tant la seva integral a l'interval  $[0, 1]$  existeix. Si  $0 < x < 1$ , resulta que l'integrand, també positiu, no està acotat a cap entorn del 0, però  $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dx < \int_0^1 t^{x-1} dt$ , que convergeix per a tota  $x$  positiva.

Notem que la funció gamma és positiva per a tots els valors de  $x \in (0, \infty)$ , ja que l'integrand ho és per a cada  $x$  i  $t$  positives.

La derivada de la funció  $\Gamma$  es pot calcular derivant respecte de  $x$  sota el signe d'integració, és a dir, considerant l'integrand una funció de  $x$  per cada  $t$ , i derivant-lo.

S'obté així

$$\Gamma^{(r)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^r dt, \quad r \geq 1,$$

que comprovem d'una manera semblant a com ho hem fet abans, que convergeix (exercici).

El perquè podem derivar l'integrand i després integrar es justificarà més endavant, en tractar de funcions de diverses variables.

Integrant per parts tenim, per a  $x > 1$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = -[e^{-t} t^{x-1}]_0^{\infty} + (x-1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-2} dt \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t} t^{x-1}) + \lim_{t \rightarrow 0^+} (e^{-t} t^{x-1}) + (x-1)\Gamma(x-1) \\ &= (x-1)\Gamma(x-1). \end{aligned}$$

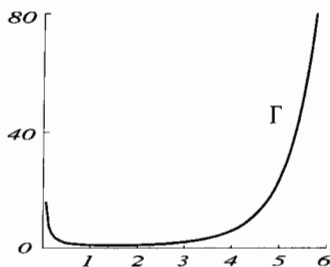
A més, com que  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ , tenim  $\Gamma(n) = (n-1)!$  si  $n \in \mathbb{N}$ , i  $\Gamma$  resulta ser una funció interpoladora del factorial, és a dir, és una funció regular a  $(0, \infty)$  amb la propietat  $n! = \Gamma(n+1)$ .

Per altra banda  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ , utilitzant el resultat de la secció anterior.

També

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1 \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \cdot \frac{2n}{2n} (2n-1) \frac{2n-2}{2n-2} (2n-3) \cdots 3 \cdot \frac{2}{2} \cdot 1 = \frac{(2n)!}{n! 2^{2n}} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

La gràfica de la funció  $\Gamma$  té l'aspecte il·lustrat a la figura següent:



Curiosament la funció gamma entra en l'expressió del volum de la bola de radi 1 en l'espai euclidià de dimensió  $n$ , tal com veurem més endavant.

També tenim una altra curiositat, i és que

$$\Gamma'(1) = -\gamma,$$

essent  $\gamma$  el *número d'Euler* que hem definit en la secció 5 d'aquest capítol. La demostració d'aquesta igualtat, la farem en l'apèndix del capítol 8.

#### 4. Comportament asimptòtic de la funció gamma i fórmula de Stirling

Estudiem ara el comportament asimptòtic de la funció  $\Gamma$ . Per una banda tenim  $x\Gamma(x) \rightarrow 1$  quan  $x \rightarrow 0^+$ , ja que  $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$  i això tendeix a 1 quan  $x$  tendeix a zero per la dreta.

Per l'altra banda tenim  $\Gamma(x+1)/e^{-x}x^x\sqrt{2\pi x} \rightarrow 1$  quan  $x \rightarrow \infty$ , o, escrit d'altra manera  $\Gamma(x) \sim e^{-x}x^x\sqrt{2\pi x}$  quan  $x \rightarrow \infty$ .

Aquesta fórmula dóna una estimació de  $n!$  que resulta útil a molts càlculs:

$$n! \sim e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n} \quad \text{quan } n \rightarrow \infty,$$

que és coneguda com a *fórmula de Stirling*, ja que va ser descoberta per aquest matemàtic al segle XVIII.

La demostració de la fórmula anterior és la següent:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x dt.$$

Fem  $t = x + \sqrt{x}s$ , i queda

$$\frac{\Gamma(x+1)}{e^{-x}x^x\sqrt{x}} = \int_{-\sqrt{x}}^\infty \exp\left(-s\sqrt{x} + x \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right)\right) ds.$$

Aquesta integral tendeix a  $\sqrt{2\pi}$  quan  $x \rightarrow \infty$ , la qual cosa es veu perquè l'integrand tendeix a  $e^{-s^2/2}$ : utilitzant la regla de l'Hôpital a l'exponent de  $e$  a l'integrand, es veu que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{s}{\sqrt{x}} - \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right)}{1/x} = s^2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{s}{\sqrt{x}} - \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right)}{s^2/x}$$

$$= s^2 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r - \ln(1+r)}{r^2} = s^2 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+r)} = \frac{s^2}{2}.$$

Per tal d'assegurar que la integral del límit és el mateix que el límit de la integral no n'hi ha prou amb això: a més hem de veure que aquest límit  $e^{-s^2/2}$  s'ateny uniformement sobre intervals acotats de  $s$ . El significat d'això i la demostració que en el nostre cas això passa es deixa per al capítol següent.

Suposant que és cert, ens queda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{e^{-x} x^x \sqrt{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{2\pi},$$

i ja tenim la fórmula de Stirling.

## 5. Funcions logaritme-integral i exponencial-integral

Com que la integració i la resolució d'equacions diferencials engendraren funcions que transcendien el camp de les funcions elementals, durant el desenvolupament, diguem-ne clàssic, del càlcul infinitesimal al segle XVIII, es va intentar estructurar aquests transcendents. Es prenen com a bàsiques certes funcions i a partir d'elles s'intenta expressar les altres mitjançant fórmules que les combinin. És així com hi ha la família de les *funcions el·líptiques*, les *funcions eulerianes* (entre les quals es troba la *funció gamma*), les funcions relacionades amb la *funció error*, etc. Moltes vegades apareixien relacions insospitades entre les funcions de diferents famílies, cosa que no ha d'estranyar gaire, perquè al cap i a la fi totes es definien en termes de les funcions elementals.

Ja hem vist com la funció gamma i la integral de Poisson, que és el límit de la funció error quan l'argument tendeix a infinit, estan relacionades d'alguna manera. Ara donarem un exemple d'una funció definida fent servir el valor principal de Cauchy d'una integral, i que mostra relacions amb la funció gamma i la constant  $\gamma$  d'Euler i que té a veure amb la distribució dels números primers. És la *funció logaritme-integral*, definida per

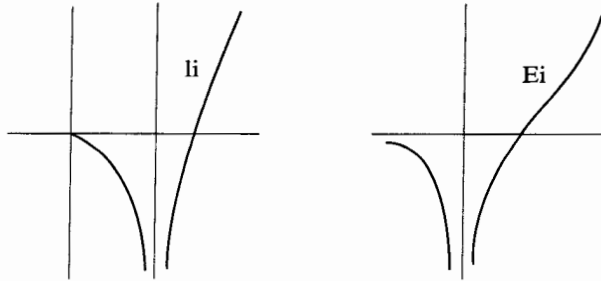
$$\text{li } x = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Associada a ella també es té la funció de  $y$  que s'obté en prendre  $x = e^y$ . Queda llavors

$$\text{li}(e^y) = \int_{-\infty}^y \frac{e^t dt}{t} =: \text{Ei}(y),$$

on Ei és la *funció exponencial-integral*.

Les gràfiques de les funcions són



Les integrals que defineixen aquestes dues funcions són impròpies, ja que  $1/\ln x$  no és acotada a cap entorn d'1, mentre que  $1/x$  no ho és a cap entorn de 0. No només això, sinó que les integrals impròpies no són convergents, i per donar-los sentit es fa servir el valor principal de Cauchy, que sí que existeix.

Fent servir les eines que desenvoluparem al capítol següent, es pot demostrar que per  $y \in (-\infty, 0)$ ,

$$\text{li}(e^y) = \gamma + \ln(-y) + \int_0^y \frac{e^t - 1}{t} dt,$$

on  $\gamma$  és la *constant d'Euler* que ja ens hem trobat tant al comportament asimptòtic de la sèrie harmònica com a la fórmula  $\Gamma'(1) = -\gamma$ .

## 6. Els números i polinomis de Bernoulli

Els *números de Bernoulli* apareixen per primera vegada al llibre de teoria de probabilitats de *Jakob Bernoulli*, *Ars Conjectandi*, publicat el 1713. Els obté en expressar la suma de les potències dels primers números naturals. De fet dona la suma explícitament fins a la potència 10. La seva fórmula, generalitzada i escrita en notació moderna és, per a  $p > 1$ ,

$$\sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1}n^{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \frac{p}{2}B_2n^{p-1} + \frac{p(p-1)(p-2)}{4!}B_4n^{p-3} + \dots$$

Notem que coneixent els números de Bernoulli, es pot calcular  $\int_a^b x^n dx$  a partir de les subdivisions de la integral com ho hem fet al capítol 3 quan  $n = 2$ . Va ser *Euler* qui va batejar aquests números amb el nom de Bernoulli, i també va donar-ne una caracterització que deixarem per al capítol següent, ja que requereix el desenvolupament de Taylor.

Els números de Bernoulli apareixen a molts llocs de l'Anàlisi, però resulten singularment importants en la *fórmula d'Euler-Maclaurin* que estudiarem a la secció següent i que és força utilitzada per a l'avaluació d'integrals definides. Per tal de determinar-los utilitzarem un procediment recursiu que permet anar definint-los a partir dels anomenats polinomis de Bernoulli.

Els *polinomis de Bernoulli* es defineixen recursivament de la següent manera:  $\phi_0(x) = 1$  i  $\phi'_k = k\phi_{k-1}$ . A més, per tal de fixar la constant additiva que

queda a cada integració, demanem que  $\phi_{2k+1}(0) = \phi_{2k+1}(1) = 0$  per a  $k \geq 0$ . Això els determina completament, ja que si

$$\phi_{2k-1}(x) = x^{2k-1} + a_{2k-2}x^{2k-2} + \dots + a_0$$

(notem que tots tenen el coeficient del terme de màxim grau igual a 1), integrant dues vegades obtenim

$$\phi_{2k+1}(x) = x^{2k+1} + \frac{2k+1}{2k-1}a_{2k-2}x^{2k-1} + \dots + c_1x + c_2.$$

Si  $\phi_{2k+1}(0) = 0$ , això dóna  $c_2 = 0$  i el valor de  $c_1$  queda determinat per  $\phi_{2k+1}(1) = 0$ .

Els *números de Bernoulli* ens defineixen ara els termes de grau zero dels polinomis de Bernoulli, és a dir,

$$B_k := \phi_k(0).$$

Es comprova (exercici) que

$$\phi_k(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_{k-j} x^j.$$

Els polinomis de Bernoulli de grau més baix resulten ser:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= 1, \\ \phi_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ \phi_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ \phi_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\ \phi_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \dots, \end{aligned}$$

i els números de Bernoulli:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

Fem notar que tots els números de Bernoulli d'ordre senar més gran que 1 són 0.

La propietat de simetria

$$(-1)^k \phi_k(1-x) = \phi_k(x)$$

es dedueix, per exemple, del fet que les dues bandes de la igualtat satisfan la mateixa fórmula recursiva  $\phi'_k = k\phi_{k-1}$  i a més s'anul·len a  $x = 0$  i a  $x = 1$  si  $k$  és senar.

Per tant, per a tota  $k > 1$ , es té  $\phi_k(0) = \phi_k(1) = B_k$ , i d'aquí que

$$\int_0^1 \phi_k = \frac{1}{k+1}(\phi_{k+1}(1) - \phi_{k+1}(0)) = 0.$$

Resulta que  $\phi_{2m}(x) - B_{2m}$  no canvia de signe a  $(0, 1)$ , la qual cosa resultarà important per a l'aplicació de la fórmula d'Euler-Maclaurin.

En fem una demostració per inducció, una mica indirecta.

Primer veurem que  $(-1)^k \phi_{2k-1}(x) > 0$  per a  $x \in (0, \frac{1}{2})$ . Això és cert per a  $k = 1$ . Suposem-ho ara cert per a  $k \geq 1$  i obtenim, fent servir la definició recursiva de  $\phi_k$

$$\frac{(-1)^k}{2k}(\phi_{2k}(x) - B_{2k}) = (-1)^k \int_0^x \phi_{2k-1} > 0 \quad \text{per a } x \in (0, 1/2].$$

Per la propietat de simetria de  $\phi_{2k}$  esmentada abans, resulta que aquesta propietat és certa per a tota  $x \in (0, 1)$ . Ara, com que  $\int_0^1 \phi_{2k} = 0$ , resulta de la desigualtat anterior que

$$(-1)^{k+1} B_{2k} = (-1)^k \int_0^1 (\phi_{2k} - B_{2k}) > 0,$$

és a dir, les  $B_{2k}$  són positives per a  $k$  senar i negatives per a  $k$  parell.

Tenim que  $\phi_{2k+1}(x)$  s'anulla per a  $x = 0$  i  $x = \frac{1}{2}$ , a causa de la propietat de simetria  $\phi_{2k+1}(1-x) = -\phi_{2k+1}(x)$ , i no pot canviar de signe a  $(0, \frac{1}{2})$ , perquè si ho fes tindriem un punt d'inflexió, és a dir un punt on la segona derivada s'anullaria a  $(0, \frac{1}{2})$ , cosa que implica, d'acord amb la definició recursiva de les  $\phi_k$ , que  $\phi_{2k-1}$  s'anullaria en aquest punt, en contra de la hipòtesi d'inducció.

Per tant,  $\phi_{2k+1}$  té a  $(0, \frac{1}{2})$  el signe de la seva derivada a 0, que val  $(2k+1)B_{2k}$ , i que té el signe de  $(-1)^{k+1}$  segons hem vist més amunt.

Repetint ara el primer pas de la demostració, obtenim el resultat desitjat:

$$(-1)^k(\phi_{2k}(x) - B_{2k}) > 0 \quad \text{per a } x \in (0, 1),$$

és a dir, que  $\phi_{2k}$  no canvia de signe a  $(0, 1)$ .

## 7. La fórmula d'Euler-Maclaurin

A l'apèndix 2 hem obtingut la fórmula de Wallis, que dona  $\pi$  amb una aproximació tan gran com vulguem. Aquesta fórmula, la va obtenir *Wallis* en calcular la quarta part de l'àrea del cercle unitari amb la integral  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ . Fa aquest càlcul amb un procediment d'interpolació enginyós i poc fonamentat, a partir de les integrals  $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$  ja conegudes. Ja hem comentat que Newton, inspirat pel procediment de Wallis, generalitza la fórmula del binomi a qualsevol exponent real. Els intents de calcular integrals són perseguits durant els segles XVII i XVIII per *Gregory*, *De Moivre*, *Taylor*, *Stirling* i d'altres, reduint-ho a la suma de sèries. Són, però, *Maclaurin* i *Euler* els que a mitjan

segle XVIII donen la fórmula que estudiarem a continuació, que permet calcular amb tanta precisió com es vulgui la integral d'una funció derivable, i calcular-ne el grau d'aproximació.

La fórmula d'Euler-Maclaurin diu que si  $f$  és una funció amb derivades contínues fins a ordre  $2r + 2$  a l'interval  $[0, n]$ , llavors es compleix,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n f(k) &= \int_0^n f + \frac{1}{2}(f(n) + f(0)) + \frac{B_2}{2!}(f'(n) - f'(0)) + \dots \\ &+ \frac{B_{2r}}{(2r)!}(f^{(2r-1)}(n) - f^{(2r-1)}(0)) + \frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!}nf^{(2r+2)}(\xi), \end{aligned}$$

per a alguna  $\xi \in (0, 1)$ , on les  $B_k$  són els números de Bernoulli.

Primer obtindrem la fórmula per a  $n = 1$ , que diu

$$\int_0^1 f = \frac{f(0)}{2} + \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=1}^r \frac{B_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) + R_r,$$

amb  $R_r = -\frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!}f^{(2r+2)}(\xi)$ , per a alguna  $\xi \in (0, 1)$ .

Recordant la definició del polinomi de Bernoulli  $\phi_k$ , tenim integrant per parts successivament, que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f &= [\phi_1 f]_0^1 - \int_0^1 \phi_1 f', \\ \int_0^1 \phi_1 f' &= \left[ \frac{1}{2} \phi_2 f' \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \phi_2 f'', \\ \int_0^1 \phi_{k-1} f^{(k-1)} &= \left[ \frac{1}{k} \phi_k f^{(k-1)} \right]_0^1 - \frac{1}{k} \int_0^1 \phi_k f^{(k)}. \end{aligned}$$

Del fet que  $\phi_k(0) = \phi_k(1) = B_k$ , tenim

$$\left[ \frac{1}{k} \phi_k f^{(k-1)} \right]_0^1 = \frac{B_k}{k} (f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)),$$

i per tant

$$\begin{aligned} \int_0^1 f &= \frac{f(0)}{2} + \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=1}^r \frac{B_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) \\ &- \frac{1}{(2r+1)!} \int_0^1 \phi_{2r+1} f^{(2r+1)}. \end{aligned}$$

Amb una nova integració per parts tenim

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_{2r+1} f^{(2r+1)} &= \frac{1}{2r+2} [(\phi_{2r+2} - B_{2r+2})f^{(2r+1)}]_0^1 \\ &- \frac{1}{2r+2} \int_0^1 (\phi_{2r+2} - B_{2r+2})f^{(2r+2)}, \end{aligned}$$



i com que  $\phi_k(0) = \phi_k(1) = B_k$ , resulta que el primer terme de la banda dreta s'anulla.

Per altra banda ja hem vist a la secció anterior que  $\phi_{2r+2} - B_{2r+2}$  no canvia de signe a  $(0, 1)$  i que, de fet  $(-1)^{r+1}(\phi_{2r+2}(x) - B_{2r+2}) > 0$  per a  $x \in (0, 1)$ . Per tant podem aplicar el teorema del valor mitjà per a la integral i queda que per a alguna  $\xi \in (0, 1)$

$$\int_0^1 \phi_{2r+1} f^{(2r+1)} = -\frac{f^{(2r+2)}(\xi)}{(2r+2)} \int_0^1 (\phi_{2r+2} - B_{2r+2}).$$

Com que  $\int_0^1 \phi_{2r+2} = 0$ , queda finalment

$$\int_0^1 \phi_{2r+1} f^{(2r+1)} = -\frac{B_{2r+2}}{(2r+2)} f^{(2r+2)}(\xi), \quad \xi \in (0, 1),$$

cosa que, substituït en l'expressió obtinguda més amunt per a  $\int_0^1 f$ , ens dóna la fórmula buscada per a  $n = 1$ .

El pas d'aquesta fórmula per a  $n = 1$  a la fórmula per a  $n$  arbitrària, s'obté sumant  $\int_0^1 + \int_1^2 + \dots + \int_{n-1}^n$ . La deixem com a exercici, el mateix que la deducció a partir d'ella de la fórmula de Bernoulli escrita al principi de l'apèndix 6 per a la suma de la potència  $p$  (natural) dels primers  $n$  naturals.

## 8. Les sèries asimptòtiques

L'aplicació de la fórmula d'Euler-Maclaurin proporciona desenvolupaments en sèries infinites per al càlcul d'integrals. Resulta, però, que moltes vegades aquestes sèries resulten divergents.

Prenem, per exemple, l'aplicació de la fórmula a la funció  $f = \ln$ . Resulta que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln k &= \int_1^n \ln + \frac{1}{2}(\ln n + \ln 1) + \frac{B_2}{2!}(\ln'(n) - \ln'(1)) \\ &+ \frac{B_4}{4!}(\ln'''(n) - \ln'''(1)) + \dots, \end{aligned}$$

o sigui, després de calcular les derivades i substituir:

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + 1 + \frac{B_2}{2!} \left(\frac{1}{n} - 1\right) \\ &+ \frac{2B_4}{4!} \left(\frac{1}{n^3} - 1\right) + \frac{4!B_6}{6!} \left(\frac{1}{n^5} - 1\right) \\ &+ \dots + \frac{(2k-2)!B_{2k}}{(2k)!} \left(\frac{1}{n^{2k-1}} - 1\right) + \dots \end{aligned}$$

Aquesta suma infinita no convergeix. De fet els termes tendeixen a infinit quan  $k$  ho fa, ja que veurem al capítol vinent que per un nombre infinit de

valors de  $n$ ,  $B_n$  és proper a  $n!/(2\pi)^n$ . Tot això es pot aprofitar per a calcular  $n!$  amb molta precisió si  $n$  és gran. Per veure-ho, escrivim l'expressió anterior en la forma

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \left(1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \dots + \frac{B_{2k}}{(2k-2)2k}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} + \dots + \frac{B_{2k}}{(2k-2)2kn^{2k-1}}\right) + \text{un residu.} \end{aligned}$$

Se sap per les fórmules de Binet, que no demostrarem en aquest llibre, que  $\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n$  tendeix a  $\frac{1}{2} \ln 2\pi$  quan  $n \rightarrow \infty$ . Tenim, per altra banda, que la suma dels termes del darrer parèntesi tendeix a 0 quan  $n$  tendeix a  $\infty$  (per una  $n$  fixada, és clar). Per tant la suma del penúltim parèntesi (que és una constant que depèn de  $k$  però no de  $n$ ), més el residu, tendeix a  $\frac{1}{2} \ln 2\pi$ . Per tant, si escrivim  $\ln(n!)$  com

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \left(\frac{1}{12n} - \dots + \frac{B_{2k}}{(2k-2)2kn^{2k-1}}\right)$$

més un residu, resulta que aquest tendeix a 0, el mateix que el parèntesi, quan  $n \rightarrow \infty$ .

D'aquí, prenent-ne l'exponencial, obtenim la *fórmula de Stirling*

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \exp\left(-n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \dots\right),$$

on estronquem l'expressió entre parèntesi en el nombre de termes que ens resulti més convenient, que és quan seran més petits, puix que la sèrie és alternant.

Stirling, que va obtenir la fórmula al 1730 per mètodes no gaire rigorosos, va fer-la servir per calcular  $\ln_{10}(1000!)$  amb 10 xifres decimals exactes.

Les sèries com les anteriors, que divergeixen, però que donen una bona aproximació per a valors grans de la variable, són conegudes amb el nom de *sèries o desenvolupaments asimptòtics*.

D'una manera més general, diem que una sèrie divergent

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{x^i} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$$

és un *desenvolupament asimptòtic* de la funció  $f$  si

$$R_n(x) = x^n(f(x) - s_n(x))$$

tendeix a 0 quan  $|x| \rightarrow \infty$ , per a  $n$  fixada (encara que pot ser que no convergeixi quan  $n \rightarrow \infty$  per a  $x$  fixada).

Resulta, doncs, que podem fer  $R_n(x)$  tan petit com vulguem prenent  $|x|$  prou gran.

Un altre exemple de sèrie asimptòtica és el següent:

Considerem  $f(x) = \int_x^\infty t^{-1} e^{x-t} dt$ ,  $x \in (0, \infty)$ .

Integrant per parts iteradament obtenim

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} + (-1)^{n+1} (n+1)! \int_x^\infty \frac{e^{x-t} dt}{t^{n+2}}.$$

Si  $a_n = (-1)^n n! / x^{n+1}$ , observem que  $|a_{n+1}/a_n| = (n+1)/x$ , que tendeix a  $\infty$  quan  $n$  tendeix a  $\infty$  amb una  $x$  fixa. Per tant la sèrie divergeix per a qualsevol  $x$ .

Notem, però, que

$$(n+1)! \int_x^\infty \frac{e^{x-t} dt}{t^{n+2}} < (n+1)! \int_x^\infty \frac{dt}{t^{n+2}} = \frac{n!}{x^{n+1}},$$

ja que  $0 < e^{x-t} \leq 1$ .

Aquest terme, i per tant l'error comès en prendre  $n$  termes, es fa tan petit com vulguem prenent  $x$  prou gran.



## Capítol 6

# Convergència de successions i sèries de funcions

### 6.1 Introducció

Abans que el concepte abstracte de funció quedés conformat tal com l'acceptem ara, les funcions i les seves representacions s'identificaven. Una tal representació és una fórmula algebraica, una integral indefinida, un símbol especial. Per als matemàtics del segle XVII era també una *sèrie de potències*, és a dir una suma infinita de funcions polinomials de la forma  $ax^n$ . Aquestes sèries de potències eren molt útils perquè amb elles es podia integrar qualsevol funció: n'hi havia prou amb expressar-la com a sèrie de potències i obtenir una nova sèrie de potències, és a dir una nova funció, integrant cada terme i sumant-los. No només això, també es podien obtenir les solucions de les equacions diferencials, que al cap i a la fi eren una de les principals raons de ser del càlcul, en forma de sèries de potències. Al segle XVII no es preocupaven gaire per la convergència, i la identificació de la funció amb la sèrie es feia tant si aquesta tendia a la funció com si no hi tendia: la sèrie era la funció.

Passa, però, que pot ser que la sèrie de potències no convergeixi per a tots els valors de  $x$ , i només ho faci a un interval, i això encara que la funció sigui molt regular. Pitjor encara, hi ha funcions amb derivades de tots els ordres que no es poden expressar com a límit d'una sèrie de potències a cap entorn d'algun punt. Tanmateix les sèries de potències constitueixen una de les eines més importants del càlcul, i les funcions que són límits d'aquestes sèries en algun interval hi tenen un paper preponderant: són les anomenades *funcions analítiques*. D'aquest tipus ho són la majoria de les funcions que hem definit fins ara, almenys fora d'uns quants punts especials, que constitueixen el que s'anomena *singularitat*.

Les sèries de potències constitueixen, doncs, per a les funcions analítiques, no solament una representació formal, sinó una manera d'obtenir el valor de la funció amb tanta aproximació com vulguem a l'interval on convergeixen.

Hi ha altres maneres d'obtenir funcions mitjançant una successió de funcions que convergeixin. Per exemple resulta que tota funció contínua en un interval finit és límit (per a cada valor de  $x$ ) d'una successió de polinomis d'ordre creixent (Teorema de Weierstrass). També es pot intentar aproximar funcions mitjançant un procés d'*interpolació polinomial*: es cerca un polinomi que prengui en un cert nombre de punts els mateixos valors de la funció. Si aquests punts es van espessint, es té l'esperança que els polinomis s'aproximaran més i més a la funció. Aquesta esperança no sempre és justificada (vegeu el fenomen de Runge a l'apèndix del capítol 7), però, tot i això, la interpolació és un mètode pràctic important per a aproximar funcions.

També des del segle XVII s'estudià la manera d'aproximar funcions periòdiques mitjançant les funcions trigonomètriques. De fet hi va haver una gran discussió sobre si tota funció contínua en un interval finit es podia aproximar tant com volguéssim amb sèries trigonomètriques: és a dir, sumes infinites de sinus i cosinus de múltiples de  $x$ , afectats per coeficients constants. Els matemàtics de l'època tenien la intuïció (falsa) que les funcions trigonomètriques, essent tan especials, no servien tant com les sèries de potències. Daniel Bernoulli, creia el contrari, i tenia raó. Va ser Fourier, però, qui va consagrar la utilització d'aquestes sèries a l'anàlisi. D'una manera intuïtiva podem pensar en la funció definida en un interval com una restricció a aquest interval d'una funció periòdica en el temps representant un so, i en els diferents sumands sinusoidals de la sèrie com els harmònics d'aquest so.

En aquest capítol establim les tècniques que ens manquen per estudiar aquestes qüestions, que són fonamentalment el Teorema de Taylor i els teoremes de Weierstrass sobre convergència uniforme, i amb elles estudiarem l'aproximació de funcions mitjançant successions i sèries de funcions més elementals. Deixarem la interpolació pel capítol vinent.

## 6.2 Fórmula de Taylor

Mitjançant les derivades podem intentar aproximar-nos als valors d'una funció en un entorn d'un punt. De fet és bàsic en el càlcul infinitesimal considerar que en un interval prou petit una funció és aproximadament lineal, amb pendent igual a la derivada.

Tenim així que en la proximitat d'un punt  $x$ , una funció derivable és donada aproximadament per

$$f(x+h) \cong f(x) + f'(x)h.$$

El teorema del valor mitjà per a la derivada ens dóna una expressió exacta,

$$f(x+h) = f(x) + f'(\xi)h,$$

on  $\xi \in (0, h)$ . La fórmula, però, no ens diu quin és el número  $\xi$  que hem de prendre. Això sí, si  $h$  tendeix a 0, llavors  $\xi$  tendeix a  $x$ , i si la derivada  $f'$  és contínua,  $f'(\xi)$  tendeix a  $f'(x)$ .

Si volem avaluar quin és l'error que cometem en prendre  $f(x) + f'(x)h$  en lloc de  $f(x+h)$ , podem escriure, basant-nos en el teorema fonamental del càlcul,

$$f(x+h) = f(x) + \int_0^h f'(x+t) dt.$$

Integrant per parts prenent

$$((t+c)f'(x+t))' = f'(x+t) + (t+c)f''(x+t),$$

obtenim

$$f(x+h) = f(x) + [(t+c)f'(x+t)]_0^h - \int_0^h (t+c)f''(x+t) dt.$$

Com que volem que el segon terme del costat dret valgui  $hf'(x)$ , hem de prendre  $c = -h$ , i queda

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \int_0^h (h-t)f''(x+t) dt.$$

El terme amb la integral ens dóna, doncs, la desviació del valor de la funció respecte del valor donat per la funció lineal. Mitjançant el teorema del valor mitjà per a la integral, aquest terme es pot expressar com

$$f''(\xi) \int_0^h (h-t) dt = f''(\xi) \left[ \frac{(h-t)^2}{-2} \right]_0^h = \frac{h^2}{2} f''(\xi),$$

on  $\xi$  és un punt entre  $x$  i  $x+h$ .

Si  $f''$  és contínua, quan  $h \rightarrow 0$ , resulta que  $f''(\xi)$  tendeix a  $f''(x)$ , i un valor aproximat de la funció ens ve donat per

$$f(x+h) \cong f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x).$$

Si volem conèixer l'error comès podem repetir el procés anterior, integrant per parts, suposant  $f''$  contínua, i obtenim

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \int_0^h \frac{(h-t)^2}{2} f'''(x+t) dt,$$

d'on  $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi)$ , amb  $\xi$  entre  $x$  i  $x+h$ .

Iterant el procés i suposant  $f^{(n+1)}$  contínua demostrem que

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \\ &+ \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x+t) dt, \end{aligned}$$

essent l'últim terme, d'acord amb el teorema del valor mitjà per a la integral, igual a

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x, x+h).$$

Per facilitat de notació, designem l'interval per  $(x, x+h)$ , encara que  $h$  sigui negatiu.

Notem que d'aquesta manera aconseguim expressar la funció com la suma d'un polinomi de grau  $n$  en  $h$ , que és la diferència entre el punt on volem avaluar la funció i  $x$ , més una expressió que depèn de la derivada d'ordre  $(n+1)$  en un punt  $\xi$  entre  $x$  i  $x+h$ .

Aquest resultat és anomenat *Teorema de Taylor* o *Fórmula de Taylor*.

El polinomi

$$P(h) = f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

d'ordre  $n$ , és anomenat *polinomi de Taylor* d'ordre  $n$  de la funció  $f$  al punt  $x$  o centrada a  $x$ . El terme

$$r_n = \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x+t) dt,$$

que dona la diferència entre el valor de la funció i el polinomi de Taylor, és conegut com a *residu* o *romanent*.

### 6.3 Sèries de potències

Una sèrie de potències és una expressió de la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , on  $a_n \in \mathbb{R}$ . Per estalviar notació escriurem de vegades  $\sum a_n x^n$ . Diem que convergeix per a una  $x$  determinada si la successió de les sumes parcials  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  convergeix.

Pot ser que una sèrie de potències convergeixi per a alguns valors de  $x$  i no per a altres. Per exemple, ja sabem que  $\sum x^n/n$  divergeix per a  $|x| \geq 1$ , mentre que convergeix per a  $|x| < 1$ . La sèrie  $\sum x^n/n^2$  en canvi convergeix per a  $|x| \leq 1$  i divergeix per a  $|x| > 1$ .

Tenim que  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ , i per tant, aplicant el criteri de l'arrel, la sèrie convergirà absolutament si  $|x| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$  i divergirà si aquest número és més gran que 1. Si definim el *radi de convergència* de la sèrie,  $\rho$ , com

$$\frac{1}{\rho} := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|},$$

resulta, doncs, que la sèrie convergeix absolutament per a  $|x| < \rho$  i divergeix per a  $|x| > \rho$ . El criteri no ens diu res per a  $|x| = \rho$ . De fet els dos exemples que acabem de donar corresponen a dues sèries de potències amb radi de convergència 1, i mentre que una divergeix per a  $x = 1$ , l'altra convergeix.



Fent servir el criteri del quocient de D'Alembert, obtenim també que

$$\frac{1}{\rho} = \overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Aquesta fórmula és més convenient quan  $a_n$  conté factorials.

Pot ser que una sèrie de potències no convergeixi a cap interval, és a dir, que el seu radi de convergència sigui 0. Tal és el cas amb la sèrie  $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ . Efectivament, aplicant el criteri de D'Alembert queda que el quocient dels termes de grau  $n+1$  i  $n$  val

$$\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} = (n+1)x,$$

i això tendeix a  $\pm\infty$  quan  $n$  tendeix a  $\infty$  per qualsevol valor no nul de  $x$ . També se segueix que el radi és 0 quan  $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$  quan  $n \rightarrow \infty$ .

## 6.4 Sèries de Taylor

Tornant a la fórmula de Taylor, tenim que si  $f$  no té derivades contínues més que fins a un ordre finit, diguem  $n+1$ , ens hem de quedar amb una aproximació de  $f$  donada pel polinomi de Taylor, amb una desviació donada pel romanent. En canvi si  $f$  té derivades de tots els ordres obtenim una sèrie de potències de  $h$  en anar calculant més i més termes del polinomi de Taylor.

Aquesta sèrie és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n, \quad \text{entenent } f^{(0)}(x) = f(x),$$

i l'anomenem *sèrie de Taylor* de la funció  $f$  centrada a  $x$ .

D'acord amb el resultat de la secció anterior, aquesta sèrie té un radi de convergència  $\rho$  que dependrà del comportament amb  $n$  de la derivada d'ordre  $n$  a  $x$ ,  $f^{(n)}(x)$ . Quan el valor absolut de  $h$  sigui més petit que  $\rho$  tindrem que la sèrie convergirà, mentre que si és més gran divergirà.

Certament, si divergeix no tendirà al valor  $f(x+h)$  de la funció original, la qual cosa vol dir que el romanent no tendeix a 0 quan  $n$  tendeix a  $\infty$ . Resulta, però, que quan convergeix tampoc no ho ha de fer necessàriament a  $f(x+h)$ , és a dir, encara que convergeixi podria ser que el romanent no tendís a 0. Això darrer passa per exemple amb la funció

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{per a } x > 0 \\ 0, & \text{per a } x \leq 0. \end{cases}$$

Aquesta funció té derivades de tots els ordres arreu, i en particular ja hem vist a la secció 5.16 que  $f^{(n)}(0) = 0$  per a tota  $n \in \mathbb{N}$ . Per tant la seva sèrie de Taylor centrada al 0 és la sèrie de potències amb tots els coeficients nuls, que certament tendeix a 0 per a tots els valors de  $h$ . Per altra banda  $f(h) = e^{-1/h^2} > 0$  per a qualsevol  $h > 0$ . Això vol dir que el romanent és precisament igual a  $e^{-1/h^2}$  per a tota  $h > 0$ , independentment de  $n$ .

## 6.5 Funcions analítiques

Quan resulta que  $\rho > 0$  i que la sèrie de Taylor convergeix al valor de  $f(x+h)$  per a  $|h| < \rho$ , és a dir, quan el romanent tendeix a 0 per a  $|h| < \rho$  i  $n$  tendint a  $\infty$ , diem que  $f$  és una *funció analítica* a un entorn de  $x$ .

Resulta que la majoria de les funcions que hem definit, és a dir, que hem obtingut amb les operacions algebraïques i amb integració indefinida, són analítiques almenys a l'entorn dels seus punts regulars, és a dir als punts on tenen derivades de tots els ordres.

Mirem-nos uns quants exemples de funcions analítiques.

Els polinomis són analítics, de fet coincideixen amb la sèrie de Taylor, ja que les derivades d'ordre suficientment gran d'un polinomi s'anul·len. En aquest cas el radi de convergència és  $\infty$ .

Un altre cas de radi de convergència  $\infty$ , ens el proveeix la funció exponencial.

La fórmula de Taylor centrada al 0 de  $f$  és

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (0, x)$$

(aquí s'entén que si  $x$  és negativa  $(0, x)$  representa  $(x, 0)$ ).

Aplicant aquesta fórmula a l'exponencial resulta

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi.$$

I, per tant la sèrie de Taylor corresponent és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

El radi de convergència d'aquesta sèrie de potències és, segons hem vist a la secció 3, l'invers de  $\lim \sqrt[n]{1/n!}$ , que val 0 (vegeu el capítol anterior). Per tant  $\rho = \infty$ , tal com volíem provar.

També ho hauríem pogut comprovar més fàcilment veient que  $\lim |a_n/a_{n+1}| = \lim n!/(n+1)! = \infty$ .

A més, la funció exponencial és analítica, és a dir, no solament la seva sèrie de Taylor convergeix a algun interval, sinó que convergeix a la funció per a cada  $x$  fixada. Això és equivalent a dir que el romanent tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ , per a cada  $x$ .

Efectivament,  $e^\xi < e^{|x|}$  i a més ja sabem del capítol anterior que  $x^{n+1}/(n+1)! \rightarrow 0$  quan  $n \rightarrow \infty$  per a qualsevol  $x$ .

Resulta, doncs, que la funció exponencial és analítica, amb radi de convergència  $\infty$ . D'una funció amb aquesta propietat, se'n diu *funció entera*.

D'una manera anàloga podem provar que la sèrie de Taylor d'exp centrada a qualsevol punt de  $\mathbb{R}$  convergeix a la funció per a qualsevol  $x$ . També podem provar que les funcions sin i cos són funcions enteres (exercici).

Hi ha altres funcions analítiques que no són enteres. Considerem per exemple el logaritme natural.

Aquí hauríem de centrar la sèrie de Taylor en un punt diferent de 0, ja que el logaritme de 0 no està definit. Centrant-nos en 1, obtenim

$$\begin{aligned}\ln(1+h) &= \ln 1 + h \ln'(1) + \frac{h^2}{2} \ln''(1) + \dots \\ &= 0 + h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{h^n}{n} + \dots,\end{aligned}$$

que és coneguda amb el nom de *sèrie de Leibniz*.

Calculem-ne el radi de convergència. Tenim  $\lim \sqrt[n]{1/n} = \lim n^{-1/n}$ . Prenent logaritmes:  $\ln(\lim n^{-1/n}) = \lim(-\ln/n) = 0$  (aplicant el teorema de l'Hôpital), i per tant  $\rho = 1/\lim \sqrt[n]{1/n} = 1$ . Que també es troba més fàcilment prenent  $\lim |a_{n+1}/a_n| = \lim n/(n+1) = 1$ .

Una altra manera de trobar el radi de convergència és fixar-se que per a  $h$  positiva, la sèrie és alternant, amb termes tendint a 0 per a  $|h| < 1$  i tendint a  $\infty$  per a  $|h| > 1$ .

Per veure que la funció és analítica cal comprovar encara que el residu tendeix a 0, però això és immediat ja que el seu valor absolut és  $\xi^{n+1}/(n+1)$  que tendeix a 0 si  $|\xi| < 1$ .

Observem que per a  $h = 1$  tenim convergència, però que per a  $h = -1$ , tenim la sèrie harmònica, divergent com ha de ser, ja que  $\ln$  no és acotat a un entorn de 0.

També observem, si calculem una mica, que si centrem la sèrie del logaritme en el punt  $a > 0$ , llavors el radi de convergència de la sèrie de Taylor és precisament  $a$ .

El mateix que hem observat pel logaritme, és a dir que la sèrie de Taylor té un interval de convergència amb centre en un determinat punt limitat pels punts en què la funció no està definida, s'observa a les funcions tg, ctg, sec i cosec, que també són analítiques (exercici).

Hi ha casos, però, en què no es veu a què es deuen les limitacions en el radi de convergència, almenys no es veu directament a partir de l'existència de punts on la funció no està acotada, i que impedeixen que l'interval de convergència sigui més gran.

Tal és el cas, per exemple, amb  $f(x) = 1/(1+x^2)$ .

Si en calculem la sèrie de Taylor centrada al 0 obtenim (exercici)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Això és una sèrie alternant amb els termes tendint monòtonament a 0 en valor absolut per a  $|x| < 1$ , mentre que divergeix per a  $|x| > 1$ . Per tant el radi de convergència  $\rho$  val 1. També la resta,  $\xi^{2n}$ , tendeix a 0 si  $|x| < 1$ . Per tant tenim una funció analítica. Resulta, però, que per a  $x = \pm 1$  no passa res d'estrany: la funció és tan regular com al 0. És més, si calculem el radi de

convergència per a la sèrie centrada en aquests punts trobem el valor  $\sqrt{2}$ . I en general si centrem la sèrie a  $a$ , el radi de convergència resulta  $\sqrt{1+a^2}$  (exercici). Aquest misteri s'aclareix quan es considera (vegeu apèndix)  $1/(1+x^2)$  com una funció definida per a  $x$  complexa.

Quan centrem les sèries de Taylor en dos punts diferents i els intervals de convergència se sobreposen (s'intersequen), llavors, encara que les sèries són diferents, convergeixen al mateix valor per a cada punt  $x$  del domini comú. És a dir si centrem la sèrie a  $a$  tenim

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots,$$

mentre que si ho fem a  $b$ , resulta

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{2}(x-b)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n + \dots,$$

essent els valors dels límits els mateixos, encara que, certament, els coeficients són generalment diferents.

Si els intervals de convergència de les dues sèries de Taylor s'intersequen, semblaria que una reordenació dels termes d'una de les sèries ens permetria obtenir l'altra. Això no és així, ja que en general les dues sèries convergeixen en intervals diferents. Això podria semblar que contradiu la convergència absoluta de les sèries de Taylor a l'interior del seu interval de convergència; pensem, però, que per posar en condicions una de les sèries per obtenir l'altra, hem de desfer termes de la forma  $(x-a)^n$ , i llavors podem perdre la convergència absoluta, que és la que ens permet canviar els termes d'ordre.

## 6.6 Convergència uniforme

A la secció anterior hem definit com a funcions analítiques aquelles que tenen la seva sèrie de Taylor convergint-hi algun interval. Podem considerar la qüestió inversa: una sèrie de potències convergent en un interval defineix una funció analítica, és a dir, convergeix a una funció que té derivades de tots els ordres i que té per sèrie de Taylor la sèrie donada? La resposta és afirmativa, però per atènyer-la ens cal el concepte de convergència uniforme de funcions, que, a més, ens serà útil en molts altres casos.

Donada una successió de funcions  $\{f_n\}$ , i una funció  $f$ , cada una d'elles definides en un mateix interval  $I$ , finit o infinit, direm que  $\{f_n\}$  convergeix uniformement a  $f$  a l'interval  $I$ , si per a cada  $\varepsilon > 0$  existeix  $n_0$ , tal que si  $n > n_0$ , llavors  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ , per a tota  $x \in I$ . (Notem que  $n_0$  no depèn de  $x$ ).

Utilitzarem la notació  $\{f_n\} \Rightarrow f$  o senzillament  $f_n \Rightarrow f$  per indicar que la successió  $\{f_n\}$  tendeix uniformement a  $f$ .

Donem diversos exemples de funcions que convergeixen uniformement.

1. La successió  $f_n$  amb  $f_n(x) = x^n$ , considerades a l'interval  $I = [0, a]$ , amb  $0 < a < 1$ .

Certament, per a cada  $n$ ,  $f_n$  és una funció positiva (excepte per a  $x = 0$ , que val 0), i creixent, per la qual cosa  $x^n \leq a^n$  per a  $x \in I$ . Ara, la successió  $\{a^n\}$  és certament convergent i tendeix a 0, és a dir, donada  $\varepsilon > 0$ , podem trobar  $n_0$  tal, que si  $n > n_0$ , llavors  $0 < a^n < \varepsilon$ , i per tant  $x^n < \varepsilon$  per a tota  $x \in I$ . És a dir, hi ha convergència uniforme a la funció idènticament nul·la.

2. Si prenem  $f_n(x) = \sin nx/n$ , tenim una successió de funcions que tendeixen uniformement a 0 a tot  $\mathbb{R}$ .

3. La successió de funcions  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n (x^k/k!)$  convergeix uniformement a  $e^x$  a l'interval  $(-\infty, a]$ , per a qualsevol  $a \in \mathbb{R}$ . Efectivament, tant  $f_n$  com  $f$  són positives i creixents, per tant

$$|e^x - f_n(x)| < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a,$$

segons la fórmula que hem establert pel romanent de la sèrie de Taylor.

Com que aquesta darrera expressió no depèn de  $x$ , i tendeix a 0 quan  $n$  tendeix a  $\infty$ , tenim que  $e^x - f_n(x)$  tendeix uniformement a 0 a  $(-\infty, a]$ .

4. La successió de funcions  $f_n(x) = (1+x/n)^n$  també tendeix uniformement a  $\exp x$  a l'interval  $(-\infty, a]$ , per a qualsevol  $a \in \mathbb{R}$ . De fet, tal com passa en l'exemple 1 de la secció 2.12, veiem que per a  $x \geq 0$  i per a qualsevol  $m$ , podem trobar  $n_0$  tal, que si  $n > n_0$ , llavors

$$\sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Per tant, com que segons l'exemple anterior, tant la banda esquerra com la dreta d'aquesta desigualtat tendeixen uniformement a  $\exp x$ , el terme del mig també ho ha de fer.

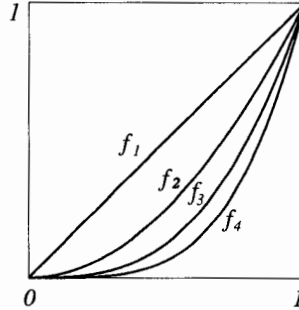
Com que  $\exp(-x) = 1/\exp x$ , podem deduir d'aquí que la convergència uniforme també val per a l'interval  $(-\infty, a]$  (exercici).

La convergència uniforme de funcions a un interval  $I$ , certament implica la convergència dels valors de les funcions per a cada  $x \in I$ . D'això, se'n diu la *convergència puntual*. Ens preguntem si tenir convergència puntual, és a dir que per a cada  $x$ ,  $f_n(x)$  convergeixi, diguem a  $f(x)$ , no comporta que la convergència sigui uniforme. Els següents exemples mostren que això no és així

1. La successió de funcions  $f_n(x) = x^n$ , a l'interval  $I = [0, 1]$ , convergeix per a cada valor de  $x$ : si  $x < 1$ ,  $x^n \rightarrow 0$ , i si  $x = 1$ ,  $x^n = 1$  per a tota  $x$ . Per tant  $f_n(x)$  tendeix puntualment a la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Ara bé, la convergència no és uniforme, puix que en ser  $x^n$  contínua a  $I$  per tota  $n$ , i valent 0 per a  $x = 0$  i 1 per a  $x = 1$ , llavors per a tota  $n$  hi ha algun valor  $\xi$ , que depèn de  $n$ , amb  $\xi^n = 1/2$ . Per tant, si prenem  $\varepsilon < 1/2$ , no podem trobar cap  $n_0$  que garanteixi  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  per a  $n > n_0$ .

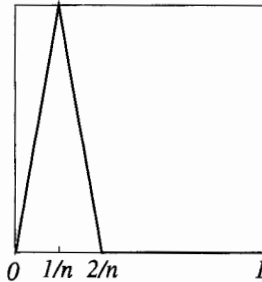


Observem que en aquest exemple la funció límit  $f$  no és contínua. El següent exemple mostra que encara que  $f$  sigui contínua, no es garanteix la convergència uniforme.

2. Considerem

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 2 - nx, & \text{si } x \in [1/n, 2/n] \\ 0, & \text{si } x \in [2/n, 1]. \end{cases}$$

Tenim que per a cada  $x$ ,  $f_n(x)$  tendeix a 0, ja que  $f_n(0) = 0$ , i si  $x > 0$ , per a  $2/n < x$ ,  $f_n(x) = 0$ . Per altra banda  $f_x(1/n) = 1$  per a tota  $n$ .

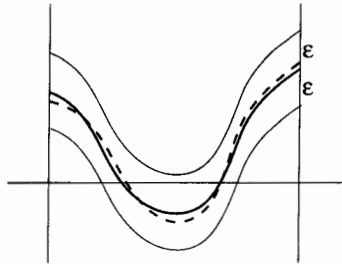


3. L'exemple anterior es pot modificar de manera que puntualment  $f_n(x) \rightarrow 0$ , per a tota  $x \in [0, 1]$ , però per altra banda que  $\sup\{f_n(x)\} \rightarrow \infty$  quan  $n \rightarrow \infty$ . N'hi ha prou amb prendre

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 2n - n^2x, & \text{si } x \in [1/n, 2/n] \\ 0, & \text{si } x \in [2/n, 1]. \end{cases}$$

Una altra manera de caracteritzar la convergència uniforme és la següent:  $f_n$  convergeix uniformement a  $f$  a  $I$ , si  $\sup_{x \in I} |f(x) - f_n(x)|$  tendeix a 0 quan  $n$

tendeix a infinit, és a dir, més intuïtivament, si donada  $\varepsilon > 0$ , les gràfiques de  $f_n$  es troben dins d'una "faixa" d'amplitud  $\varepsilon$  al voltant de la gràfica de  $f$  per a tota  $n$  suficientment gran.



Fent servir el criteri de Cauchy per a la convergència de successions, també queda caracteritzada la convergència uniforme per l'existència per a qualsevol  $\varepsilon > 0$ , d'una  $n_0$  tal, que si  $m$  i  $n > n_0$ , llavors  $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  per a tota  $x$ .

## 6.7 Convergència uniforme de funcions contínues

Una propietat fonamental de la convergència uniforme que s'utilitza força sovint, és que si una successió de funcions contínues convergeix uniformement a un interval  $I$ , llavors la funció límit és contínua.

Per fer veure que això és cert, suposem que tenim una successió de funcions contínues definides a un interval  $I$ ,  $\{f_n\}$ , que convergeixen uniformement a  $f$  a  $I$ .

Per veure que  $f$  és contínua, cal veure que, si  $h \rightarrow 0$ , llavors  $|f(x+h) - f(x)|$  també ho fa. Utilitzant la desigualtat del triangle tenim que

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h) - f_n(x+h)| + |f_n(x+h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|.$$

Cada un dels termes del segon membre el podem fer més petit que qualsevol  $\varepsilon > 0$ ; el primer i tercer prenent  $n$  prou gran, a causa de la convergència uniforme de  $f_n$  cap a  $f$ , i el del mig prenent  $h$  prou petit, per la continuïtat de cada  $f_n$ . Per tant, com que la desigualtat val per a qualsevol  $n$ , tenim que per a  $h$  prou petita,  $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$ , és a dir,  $f$  és contínua.

## 6.8 Convergència uniforme i integració

També és força utilitzada en l'anàlisi la propietat que la convergència uniforme commuta amb la integració, és a dir, que si  $f$  és el límit uniforme de  $\{f_n\}$  a un interval  $I = [a, b]$  acotat, llavors  $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$ .

En particular això passarà quan les funcions  $f_n$  siguin contínues, perquè llavors, segons el que hem vist a la secció anterior,  $f$  també ho és, i a més, com

que per a tota  $\varepsilon > 0$  podem fer  $\sup_{x \in I} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  prenent  $n$  més gran que una certa  $n_0$ , resulta

$$\left| \int f - \int f_n \right| = \left| \int (f - f_n) \right| \leq \int |f - f_n| \leq \varepsilon(b - a),$$

cosa que prova que  $\left\{ \int f_n \right\} \rightarrow \int f$ .

Un exemple del fet que no podem commutar la integració amb la convergència puntual de funcions, el constitueix l'exemple 3 de la secció anterior. Efectivament, tenim que  $f_n(x) \rightarrow 0$  per a cada  $x$  quan  $n \rightarrow \infty$ , mentre que  $\int_0^1 f_n = 1$  per a tota  $n$ .

Com a exemple, utilitzarem aquesta propietat per a veure que

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma,$$

on, tal com hem vist al capítol anterior, la integral és el valor de  $\Gamma'(1)$  i  $\gamma$  és la constant d'Euler.

Tenim que

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right),$$

i això ho podem escriure en termes d'integrals:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x} \, dx - \int_1^n \frac{dx}{x} \right),$$

on hem utilitzat que  $(1 - x^n)/(1 - x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$  i la seva integral entre 0 i 1 és  $[x]_0^1 + [x^2/2]_0^1 + \dots + [x^n/n]_0^1$ , que val precisament  $1 + 1/2 + \dots + 1/n$ .

Si a la primera integral fem la substitució  $x = 1 - (\xi/n)$ , ens queda

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^n \left( 1 - \left( 1 - \frac{\xi}{n} \right)^n \right) \frac{d\xi}{\xi} - \int_1^n \frac{dx}{x} \right),$$

i ara, passant part de la primera integral a la segona:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 \left( 1 - \left( 1 - \frac{x}{n} \right)^n \right) \frac{dx}{x} - \int_1^n \left( 1 - \frac{x}{n} \right)^n \frac{dx}{x} \right),$$

on hem tornat a escriure  $x$  per la variable muda  $\xi$ .

I ara utilitzem que, tal com hem vist a l'exemple 4 de la secció 6,  $(1 - x/n)^n \Rightarrow \exp(-x)$  a  $[0, n]$ , de manera que podem commutar el límit amb la integració, i obtenim

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} \, dx - \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \, dx,$$

on hem utilitzat també que  $\int_1^{\infty} (e^{-x}/x) \, dx$  convergeix.



La primera integral val

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} - \int_{\varepsilon}^1 \frac{e^{-x}}{x} dx \right),$$

i per tant

$$\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\ln \varepsilon - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \right) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x} \ln x dx,$$

utilitzant la integració per parts al darrer pas.

La darrera integral ja sabem que convergeix quan  $\varepsilon \rightarrow 0$ , i per tant

$$\gamma = -\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx,$$

tal com havíem dit.

També podem fer servir la integració terme a terme per a expressar les funcions definides mitjançant una integral indefinida d'una funció analítica en sèries de potències; n'hi ha prou amb expressar l'integrand com a sèrie de potències, i com que aquesta convergeix uniformement al seu interval de convergència, podem integrar terme a terme.

Així, per exemple, per a la *funció error*, és a dir, la funció que ens dona quina és la probabilitat que una certa variable aleatòria amb distribució normal valgui menys que  $x$ , i que ve expressada per la funció

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

ens queda, tenint en compte que  $e^{-t^2}$  és una funció entera de  $t$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x) &= \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} dt \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Aquesta també és una sèrie que convergeix per a tota  $x \in \mathbb{R}$ , i ho fa, com l'exponencial, uniformement a tot interval finit.

## 6.9 Convergència uniforme de funcions derivables

Respecte de la derivació, tenim que si una successió  $\{f_n\}$  de funcions derivables convergeix uniformement a  $f$ , pot ser que  $f$  no sigui derivable, o bé que  $\{f'_n\}$  no convergeixi. Ens trobem en el primer cas si considerem

$$f_n(x) = \frac{n}{n+1} |x|^{\frac{n+1}{n}} + \frac{1}{n+1}, \quad \text{per a } x \in [-1, 1],$$

que convergeix uniformement a  $f(x) = |x|$ , que no és derivable, encara que  $f'_n(x) = |x|^{1/n} \text{signe}(x)$ , on

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En el segon cas ens trobem amb funcions com  $f_n(x) = \sin n^2 x/n$ , que convergeixen uniformement a 0, mentre que  $f'_n(x) = n \cos n^2 x$  no convergeix enlloc.

Per tal de tenir que una successió de funcions derivables que convergeix ho faci a una funció derivable, hem de demanar que les derivades corresponents siguin contínues i convergeixin uniformement. Llavors la successió de les derivades tendeix a la derivada del límit.

D'una manera més formal enunciem aquest teorema:

Si  $\{f_n\} \rightarrow f$  a  $I$ ,  $f'_n$  existeix i és contínua per a tota  $n$  a  $I$ , i  $\{f'_n\} \rightarrow g$  a  $I$ , llavors  $f$  és derivable i  $f' = g$ .

Aquest teorema es demostra així:

Si  $f'_n \Rightarrow g$  resulta que  $g$  és contínua ja que  $f'_n$  és contínua per a cada  $n$ , i podem aplicar el teorema de la secció anterior. Resulta, doncs, que podem commutar la integral amb el límit,  $\int_a^x g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a)$ .

Derivant obtenim el que volem:  $g = f'$ .

## 6.10 La prova $M$ de Weierstrass

És un criteri de convergència que s'utilitza força, i en particular el farem servir a les properes seccions.

Si tenim una successió de funcions  $f_n$  definides en un interval  $I$ , i una successió  $\{M_n\}$  de números positius tals que la sèrie  $\sum M_n$  és convergent i

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \text{per a tota } x \in I,$$

llavors la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

convergeix absolutament per a tota  $x \in I$ , diguem a  $f(x)$ , i

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$$

convergeix uniformement a l'interval  $I$ .

Que  $\sum |f_n(x)|$  convergeix se segueix immediatament del criteri de comparació que hem estudiat al capítol anterior.

Per veure la convergència uniforme, observem que per cada  $x$  fixada a  $I$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^m f_n(x) + \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x),$$

de manera que, aplicant la desigualtat del triangle

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^m f_n(x) \right| \leq \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} M_n.$$

Ara, fent tendir  $m$  a  $\infty$ , podem fer  $\sum_{n=m+1}^{\infty} M_n$  més petit que qualsevol  $\varepsilon > 0$  que ens fixem. Com que és la mateixa  $\varepsilon$  per a totes les  $x$  tenim, doncs, la convergència uniforme de  $\sum f_n$  a  $f$ .

Per exemple, una sèrie com  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) \sin nx$  convergeix uniformement, puix que cada terme és majorat per  $1/n^2$ , i  $\sum 1/n^2$  és convergent.

Aquest teorema serveix, en particular, per a mostrar que existeixen funcions contínues que no són derivables a cap punt. D'això Weierstrass donà com a exemple la funció  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n x)$ , amb  $a$  enter senar,  $b \in (0, 1)$  i  $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ .

Un exemple més senzill és

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \{2^n x\},$$

on  $\{x\}$  vol dir la mínima distància de  $x$  a un número enter.

En els dos casos és clar, pel criteri  $M$  de Weierstrass, que tenim convergència uniforme cap a una funció contínua a tot  $\mathbb{R}$ .

## 6.11 Funcions definides per sèries de potències

Ens preguntem en aquesta secció per les propietats de les funcions definides per una sèrie de potències quan el seu radi de convergència  $\rho$  no és nul.

Ens trobem que per a qualsevol interval  $[-\alpha, \alpha]$  amb  $\alpha < \rho$ , la sèrie de potències convergeix uniformement i absolutament.

Efectivament, si  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  convergeix per a un cert valor, llavors  $a_n \alpha^n \rightarrow 0$  quan  $n \rightarrow \infty$ . Per tant  $|a_n \alpha^n| = |a_n| |\alpha^n| < M$  per a tota  $n$ , essent  $M$  algun número positiu.

Si  $x \in (-\alpha, \alpha)$  resulta que

$$|a_n x^n| = |a_n| |\alpha^n| \left| \frac{x}{\alpha} \right|^n < M \left| \frac{x}{\alpha} \right|^n.$$

Per tant, essent  $\sum_{n=0}^{\infty} M|x/\alpha|^n$  una sèrie geomètrica de raó menor que 1, les sumes parcials  $M_n := \sum_{k=0}^n M|x/\alpha|^k$  convergeixen.

Per tant, com que  $\sum_{k=0}^n n|a_k x^k| < M_n$ , la prova  $M$  de Weierstrass ens diu que  $\sum a_n x^n$  convergeix uniformement a  $[-\alpha, \alpha]$ . Que convergeix absolutament surt d'això mateix, encara que ja ho sabem del criteri del quocient que hem utilitzat per a trobar el radi de convergència.

Com que  $\sum_{k=0}^n a_n x^n$  és contínua, resulta que la funció límit,  $f(x)$ , és contínua a  $(-\alpha, \alpha)$ .

Considerem ara la sèrie de potències que obtenim derivant terme a terme la sèrie original,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Calculem-ne el radi de convergència, que és l'invers de

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|},$$

que resulta ser igual a  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/\rho$ , ja que  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ . Això vol dir que la sèrie derivada té el mateix radi de convergència que l'original, i per tant convergeix uniformement a  $[-\alpha, \alpha]$  si  $\alpha < \rho$ .

Per altra banda, tenim que la funció  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_n x^n$  té per derivada  $s'_n(x) = \sum_{k=1}^n n a_n x^{n-1}$ , i, per tant, aplicant el teorema segons el qual si una successió de funcions i les seves derivades convergeixen uniformement, llavors la funció és derivable i la successió de derivades hi tendeix, resulta que la funció definida per la sèrie original és derivable i la sèrie derivada convergeix a la derivada d'aquesta funció:

En poques paraules, que a  $[-\alpha, \alpha]$ , tenim que si  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , llavors  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ .

Això ens diu, doncs, que en l'interval  $(-\rho, \rho)$  de convergència una sèrie de potències defineix una funció derivable, i que la sèrie de potències de la derivada s'obté derivant terme a terme la sèrie de potències. Com que això es pot iterar indefinidament resulta que la funció definida per una sèrie de potències té derivades de tots els ordres a  $(-\rho, \rho)$  i que són el límit de les sèries de potències que s'obtenen derivant successivament terme a terme.

En fer aquestes derivades s'obté que

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)a_k x^{k-n},$$

cosa que vol dir que  $f^{(n)}(0) = n!a_n$ , o sigui  $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ .

Però aquests són precisament els coeficients de la sèrie de Taylor de  $f$ . Com que la sèrie de potències tendeix a  $f$ , resulta que el romanent tendeix a 0, i concloem que  $f$  és una funció analítica.

Tenim, doncs, com a resultat final important que tota sèrie de potències amb radi de convergència positiu defineix una funció analítica. Això ens dona una nova manera de definir funcions a més de les operacions algebraïques i

les integrals indefinides. L'anàlisi matemàtica del segle XIX està plena de funcions que resolen problemes, per exemple solucions d'equacions diferencials, expressant-les com a sèries de potències.

Pel que fa a la integració terme a terme, no es presenta cap problema, ja que la primitiva d'una funció analítica és una funció analítica.

Tenim així que per a  $x$  a l'interval de convergència

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Aquesta propietat resulta útil per a calcular sèries de potències d'algunes funcions analítiques.

Per exemple, a la secció 5 hem calculat la sèrie de Taylor de  $f(x) = \ln(1+x)$  calculant les derivades successives. És molt més senzill posar

$$\ln(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{dt}{t} = \int_0^x \frac{dt}{1+t},$$

i ara, ja sigui fent directament la divisió de polinomis  $1/(1+t)$ , ja sigui aplicant la fórmula del binomi a  $(1+t)^{-1}$ , obtenim  $1/(1+t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots$

I ara, integrant terme a terme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots,$$

que és la mateixa sèrie de Leibniz que havíem obtingut abans. Això val mentre les sèries convergeixin, és a dir, per a  $|x| < 1$ .

En el cas del logaritme no havia costat gaire obtenir les derivades successives, però si el que volem és la sèrie de Taylor de  $\arctg$ , el procés és força més laboriós.

És més senzill recordar que

$$\arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2},$$

i llavors, ja sigui amb el teorema del binomi, o, més senzill encara, dividint directament, resulta

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots,$$

de manera que, integrant terme a terme

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,$$

que és la coneguda *sèrie de Gregory*. Com abans, això només val per a  $|x| < 1$ , que és l'interval de convergència de la sèrie de potències.

## 6.12 Continuació analítica

Si tenim una sèrie de potències amb  $\rho > 0$ , convergeix a una funció  $f(x) = \sum a_n x^n$  definida a  $(-\rho, \rho)$ . Ens preguntem si podem estendre el domini de definició de la funció de manera que la funció resultant sigui analítica, és a dir, que centrada a cada punt del domini posseeixi una sèrie de Taylor que hi convergeixi en un interval.

La manera de fer-ho és prendre un punt  $a$  a  $(-\rho, \rho)$  i calcular  $f^{(n)}(a)$  a partir de la sèrie  $\sum a_n x^n$  derivant terme a terme. Llavors escrivim la sèrie  $\sum_{n=0}^{\infty} (f^{(n)}(a)/n!)(x-a)^n$ , que pot tenir un interval de convergència, centrat a  $a$ , que contingui punts que no estiguin a  $[-\rho, \rho]$ . D'aquesta manera hem aconseguit una funció analítica a un interval més gran que  $(-\rho, \rho)$ . Repetint el procés podem anar estenent la funció  $f$  a una funció analítica a un màxim interval de definició. Aquest procés és conegut com a *continuació analítica*.

Per exemple  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$  convergeix a  $f(x) = 1/(1+x^2)$  per a  $x \in (-1, 1)$ . La funció  $1/(1+x^2)$  està definida i és analítica per a tota  $x \in \mathbb{R}$ . Si efectuem la continuació analítica a partir de la sèrie de potències original, obtenim la funció a tots els punts de  $\mathbb{R}$ .

Hi ha casos en què la continuació analítica no eixampla el domini de definició de la sèrie. Tal és el cas, per exemple, amb

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n},$$

que té 1 per radi de convergència, però que no convergeix per a  $x = 1$ , ja que els termes de la sèrie no tendeixen a 0. I també tenim que si  $x^2$  tendeix a 1 per l'esquerra, llavors  $f(x^2)$  tendeix a  $\infty$ , i com que  $f(x) = 1 + x^2 f(x)$ , resulta que  $f(x)$  tendeix a  $\infty$ , tant si  $x \rightarrow -1$  com si  $x \rightarrow +1$ .

La continuació analítica s'entén més clarament quan es consideren funcions de variable complexa, i a l'apèndix en diem alguna cosa que explica també el significat geomètric del radi de convergència.

## 6.13 El teorema de Weierstrass d'aproximació amb polinomis

Al segle passat, Weierstrass va demostrar que qualsevol funció contínua en un interval tancat finit  $I = [a, b]$  pot ser aproximada uniformement per una successió de polinomis.

L'enunciat més precís del teorema és que si  $f$  és contínua a  $I = [a, b]$ , llavors existeix una successió de polinomis  $\{P_n\}$  que convergeix uniformement a  $f$  sobre  $I$ , és a dir, que per a cada  $\varepsilon > 0$ , existeix  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal, que si  $n > n_0$ , llavors  $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$  per a tota  $x \in I$ .

Donarem la demostració d'aquest teorema per al cas en què  $x \in [0, 1]$ . Si volem obtenir-lo per a  $\xi \in [a, b]$  només cal prendre  $\xi = a + (b-a)x$ , tant a la

funció  $f$  com als polinomis  $P_n$ , cosa que no canviarà ni el caràcter polinomial ni la convergència uniforme, i ens redueix el cas de l'interval  $[a, b]$  al de l'interval  $[0, 1]$ .

També podem suposar que  $f(0) = f(1) = 0$ , puix que la funció  $f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))$  difereix de  $f$  en un polinomi i s'anulla als extrems de  $[0, 1]$ .

Definim  $P_n(x) = \int_0^1 f(t)\phi_n(t-x) dt$ , on  $\phi_n(x) = a_n(1-x^2)^n$ , amb  $a_n$  escollida de manera que  $\int_0^1 \phi_n = \frac{1}{2}$ , i això per a tota  $n \in \mathbb{N}$ . Resulta que les funcions  $P_n$  són polinomis ja que les  $\phi_n$  ho són.

Per a veure que convergeixen uniformement a  $f$ , notem que  $(1-x^2)^n \geq 1-nx^2$  a  $[0, 1/\sqrt{n}]$ , ja que les dues bandes de la desigualtat valen 1 per a  $x = 0$ , i la derivada de l'esquerra,  $-2nx(1-x^2)^{n-1}$ , és més gran (més petita en valor absolut) que la de la dreta, que val  $-2nx$ , per a  $x \in [0, 1]$ . Com que  $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-nx^2) dx = \frac{2}{3\sqrt{n}}$ , tenim les desigualtats

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx > \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-x^2)^n dx > \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-nx^2) dx = \frac{2}{3\sqrt{n}},$$

d'on deduem que  $a_n < \sqrt{n}$ .

Per tant, si  $x \in [\delta, 1]$ , amb  $\delta \in (0, 1)$ , es compleix  $\phi_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n$ , i resulta que  $\phi_n$  tendeix uniformement a 0 a l'interval  $[\delta, 1]$ , ja que  $1-\delta^2 \in (0, 1)$ . (Que  $c^n\sqrt{n}$  per a  $c \in (0, 1)$  tendeix a 0 quan  $n$  tendeix a  $\infty$  se segueix, per exemple, aplicant el teorema de l'Hôpital, considerant  $n$  com a variable contínua i derivant respecte d'ella:  $c^n\sqrt{n} = \sqrt{n}/a^n$  amb  $a = 1/c > 1$ . Elevant al quadrat queda  $n/a^{2n}$ , i derivant respecte de  $n$  numerador i denominador, tenim que el seu límit és el mateix que el de  $1/2a^{2n} \ln a$ , que certament tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ ).

Ara escrivim l'expressió per a  $P_n$  fent el canvi de variables  $t-x = \xi$  a la integral que els defineix.

$$P_n(x) = \int_0^1 f(t)\phi_n(t-x) dt = \int_{-x}^{1-x} f(x+\xi)\phi_n(\xi) d\xi, \quad x \in [0, 1].$$

D'aquí tenim que la desviació entre  $f$  i  $P_n$  ve donada per

$$f(x) - P_n(x) = \int_{-1}^1 (f(x) - f(x+t))\phi_n(t) dt,$$

on hem tingut en compte que  $\int_{-1}^1 \phi_n = 1$  i hem estès  $f$  a una funció contínua a  $\mathbb{R}$ , fent  $f(x) = 0$  per a  $x \notin [0, 1]$ .

Pel fet que  $f$  és contínua a  $[-1, 1]$ , existeix  $M$  tal que  $|f(x)| < M$  per a tota  $x$ , i a més per a cada  $\varepsilon > 0$ , existeix  $\delta > 0$  tal que si  $|t| < \delta$ , llavors  $|f(x) - f(x+t)| < \varepsilon$ , ja que  $f$  és uniformement contínua.

Obtenim, doncs, la següent cota per a la desviació:

$$|f(x) - P_n(x)| < 2M \int_{-1}^{-\delta} \phi_n + \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \phi_n + 2M \int_{\delta}^1 \phi_n,$$

on hem aplicat que  $|f f| < f |f|$  i que  $|f(x) - f(x+t)| < 2M$  per la desigualtat del triangle.

I ara, fent servir que  $\phi_n(x) \leq \sqrt{n}(1 - \delta^2)^n$  i que  $\int_{-1}^1 \phi_n = 1$ ,

$$|f(x) - P_n(x)| < 4M\sqrt{n}(1 - \delta^2)^n + \varepsilon, \text{ que és } < 2\varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1],$$

prenent  $n$  prou gran. Amb això queda demostrat el teorema.

Treballant una mica més podríem donar una aproximació uniforme amb polinomis més fàcil de calcular, ja que ens estalviem el càlcul de la integral. Aquests són els *polinomis de Bernstein*, que es defineixen per

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Com que la demostració d'aquesta convergència, tot i que no és gaire complicada, és una mica llarga, remetem el lector a la bibliografia.

Observem que, a diferència del que farem quan aproximem amb interpolació polinomial, aquestes aproximacions no demanen que els polinomis prenguin el mateix valor que la funció a cap punt determinat.

## 6.14 Sèries de Fourier

A la introducció d'aquest capítol esmentàvem la discussió que hi havia al segle XVIII sobre la possibilitat o no d'aproximar qualsevol funció a un cert interval, mitjançant sumes de funcions trigonomètriques de la forma

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

on els coeficients  $a_k$  i  $b_k$  són constants que depenen de la funció que es vol aproximar.

Aquesta aproximació, a més de proporcionar un desdoblament de les funcions periòdiques en sumes de sinus i cosinus de freqüències creixents (harmòniques), ha estat de gran utilitat per a resoldre alguns problemes d'equacions en derivades parcials, com l'equació de la corda vibrant o la de la transmissió de la calor.

Certament, cada una de les sumes  $s_n(x)$  és periòdica de període  $2\pi$  (direm *2 $\pi$ -periòdica*, és a dir  $s_n(x + 2k\pi) = s_n(x)$ , per a qualsevol valor de  $k \in \mathbb{Z}$ ). Per tant el límit de  $s_n(x)$  quan  $n \rightarrow \infty$  haurà de ser també  $2\pi$ -periòdica. Així, si parlem d'aproximar d'aquesta manera una funció arbitrària definida a un cert interval finit  $[a, b]$ , és que suposem que  $b - a$  és més petit que  $2\pi$ .

Les funcions trigonomètriques de la forma  $\sin kx$  i  $\cos kx$  per a  $k \in \mathbb{N}$  tenen la propietat, dita d'*ortogonalitat* (per similitud amb vectors, vegeu la secció



7.9), que consisteix en el fet que la integral sobre l'interval de longitud igual a un període de dues diferents d'elles és igual a 0. Més explícitament tenim:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi, \quad (6.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx \quad (6.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin kx \, dx = 0,$$

per a tota  $k \in \mathbb{N}$ . I el mateix si en lloc de l'interval d'integració  $[-\pi, \pi]$  se'n pren qualsevol altre de longitud  $2\pi$ .

Tenim, doncs, que si multipliquem  $s_n(x)$  per  $\sin kx$  o per  $\cos kx$  i integrem en un interval de longitud  $2\pi$  ens queda

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) \sin kx \, dx = \pi a_k, \quad \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) \cos kx \, dx = \pi b_k.$$

Ara, si suposem que  $s_n(x)$  tendeix uniformement a la funció  $f$  (que llavors haurà de ser contínua), obtenim una sèrie uniformement convergent

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

La convergència uniforme quedarà respectada si multipliquem per  $\sin kx$  i  $\cos kx$ , i per tant

$$f(x) \cos lx = \frac{a_0}{2} \cos lx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx \cos lx + b_k \sin kx \cos lx),$$

i simillarment multiplicant per  $\sin lx$ .

Integrant terme a terme, que és vàlid, resulta que

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

És a dir, els coeficients  $a_k$  i  $b_k$  són determinats unívocament per aquestes integrals que depenen només de  $f$ .

Ens preguntem ara si, inversament, donada una funció  $f$ ,  $2\pi$ -periòdica, que sigui integrable a  $[-\pi, \pi]$  (o equivalentment a qualsevol interval de longitud  $2\pi$ ), la sèrie  $a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ , amb els coeficients donats per les integrals anteriors, convergeix a la funció  $f$ .

Aquesta sèrie és coneguda amb el nom de *sèrie de Fourier* de la funció  $f$ .

A les seccions següents veurem que si  $f$ ,  $2\pi$ -periòdica, és *contínua a trossos* i amb *derivada contínua a trossos* (és a dir que té un número finit de discontinuïtats on els límits per la dreta i per l'esquerra de  $f$  existeixen, encara

que no coincideixin, i la derivada també té límits per la dreta i per l'esquerra en aquests punts, i és contínua a tots els altres punts), llavors  $s_n(x) \rightarrow f(x)$  als punts  $x$  on  $f$  és contínua, mentre que tendeix a la mitjana dels límits per l'esquerra i per la dreta als punts de discontinuïtat.

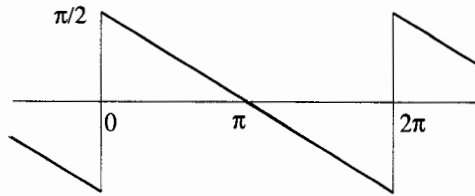
A l'apèndix demostrarem que la convergència és uniforme als intervals tancats continguts en intervals oberts on  $f$  és contínua i derivable, i que no ho és en intervals que continguin una discontinuïtat a la seva clausura.

Abans d'això, però, donem uns quants exemples paradigmàtics.

## 6.15 Exemples de sèries de Fourier

1. La funció  $2\pi$ -periòdica definida per  $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ , té per sèrie de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

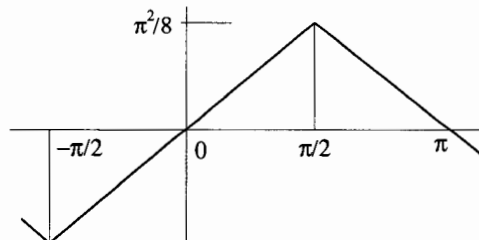


2. La funció  $2\pi$ -periòdica

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}\pi(\pi + x), & \text{per a } x \in [-\pi, -\pi/2] \\ \frac{1}{4}\pi x & , \text{ per a } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ \frac{1}{4}\pi(\pi - x), & \text{per a } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

té la sèrie de Fourier

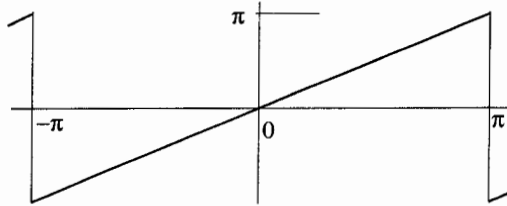
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)x$$



3. La funció  $2\pi$ -periòdica  $f(x) = x$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$  té per sèrie de Fourier

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

Es coneix com una *funció en dent de serra*.

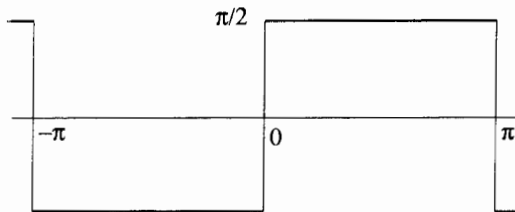


4. La funció  $2\pi$ -periòdica

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\pi, & \text{per a } x \in (-\pi, 0) \\ \frac{1}{2}\pi, & \text{per a } x \in (0, \pi), \end{cases}$$

coneguda com a *funció d'ona quadrada*, té per sèrie de Fourier

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$



## 6.16 Sèries de Fourier amb període diferent de $2\pi$

Si la funció  $f$  és de període  $2l$  en lloc de  $2\pi$ , la sèrie de Fourier es modifica de manera que

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$

i llavors la sèrie queda

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right).$$

D'ara endavant farem servir el període  $2\pi$ , per simplicitat de notació, però tenint present que pot ser qualsevol número real.

## 6.17 La integral de Dirichlet

Per a estudiar la convergència de les sèries de Fourier de les funcions contínues a trossos amb derivada contínua a trossos, ens és molt convenient la *forma integral de Dirichlet* per a  $s_n(x)$ .

Substituint les expressions integrals de  $a_k$  i  $b_k$  a  $s_n(x)$ , obtenim

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \cos kx \, dt \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \cos kx \, dt. \end{aligned}$$

Essent les sumes finites, podem commutar-les amb la integració i ens queda

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right) dt,$$

on hem utilitzat la fórmula del cosinus de la diferència de dos arcs.

Com que la integral d'una funció  $2\pi$ -periòdica és la mateixa sobre qualsevol interval de longitud  $2\pi$ , en fer el canvi de variables  $t-x = s$ , i tornant a escriure  $t$  com a variable d'integració, queda

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt.$$

Com que  $\cos kt = (\sin(k+1/2)t - \sin(k-1/2)t)/2 \sin(t/2)$ , resulta

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t}.$$

Aquesta funció és coneguda amb el nom de *nucli de Dirichlet*, i denotada per  $D_n$ . Substituída en l'expressió de  $s_n$  tenim

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt.$$

## 6.18 Convergència puntual de la sèrie de Fourier

Considerem, doncs, que  $f$  és contínua a trossos amb derivada contínua a trossos, i a més  $2\pi$ -periòdica.

Volem calcular  $f(x) - s_n(x)$  per veure si tendeix a 0 o no quan  $n \rightarrow \infty$ .

Com que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} 1/2 dt + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt dt \right) = 1,$$

ja que  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt dt = 0$ , resulta que

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt.$$

Això es pot escriure

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_x(t) \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt,$$

amb  $\phi_x(t) = (f(x+t) - f(x))/\sin(t/2)$ .

Si la funció  $\phi_x$  fos contínua a trossos a l'interval  $[-\pi, \pi]$  resultaria que  $s_n(x) - f(x)$  tendiria a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ .

Efectivament, si  $\psi$  és una funció contínua a trossos, llavors aplicant la desigualtat de Bessel (vegeu l'apèndix 4 d'aquest capítol) obtenim

$$\frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi,$$

que implica que la sèrie dels quadrats dels coeficients és convergent, la qual cosa, al seu torn, implica que tant  $\alpha_n$  com  $\beta_n$  tendeixen a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ .

Si per a  $\psi(t)$  prenem  $\frac{1}{2}f(t) \sin \frac{1}{2}t$  o  $\frac{1}{2}f(t) \cos \frac{1}{2}t$  resulta que  $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t) \cos nt dt$  com  $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t) \sin nt dt$  tendeixen a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ , ja que aquestes funcions  $\psi$  són contínues a trossos.

Sumant aquestes integrals obtenim que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \cos nt \sin \frac{1}{2}t + \sin nt \cos \frac{1}{2}t \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt,$$

que tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ .

La funció  $\phi_x$  considerada abans és contínua a trossos als intervals  $[-\pi, -\delta]$  i  $[\delta, \pi]$  per a qualsevol  $\delta \in (0, \pi)$ , ja que  $\sin \frac{1}{2}t$  no s'hi anul·la. Per tant, les integrals de  $\phi_x(t) \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t$  sobre aquests dos intervals tendeixen a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ .

L'estudi de la convergència de  $s_n(x)$  a  $f(x)$  ha quedat, doncs, reduït a l'avaluació de  $\int_{-\delta}^{\delta} \phi_x(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt$ , per a  $\delta$  prou petita.

És aquí on ens convé que  $f$  sigui derivable als seus punts de continuïtat. Si aquest és el cas, llavors la integral anterior tendeix a 0 quan  $\delta$  ho fa.

Efectivament, tenim

$$\phi_x(t) = \frac{t}{\sin \frac{1}{2}t} \cdot \frac{f(x+t) - f(x)}{t}.$$

El primer terme de la dreta tendeix a 2 quan  $t \rightarrow 0$  (aplicant la regla de l'Hôpital), i el segon terme ho fa a  $f'(x)$ . Per tant hi ha una  $\delta$  positiva prou petita perquè si  $|t| < \delta$ , llavors  $|\phi_x(t) - 2f'(x)| < 1$ , i aplicant la desigualtat del triangle

$$|\phi_x(t)| \leq |\phi(t) - 2f'(x)| + |2f'(x)| < 1 + |f'(x)| =: M.$$

D'aquí deduïm

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} \phi_x(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt \right| \leq \int_{-\delta}^{\delta} |\phi_x(t)| dt < 2\delta M,$$

i això tendeix a 0 quan  $\delta \rightarrow 0$ .

Resulta, doncs, que per cada  $\varepsilon > 0$  donada podem fer aquesta integral més petita que  $\varepsilon/3$  prenent  $\delta$  prou petita, i per a aquesta  $\delta$  podem fer cada una de les integrals sobre  $[-\pi, -\delta]$  i  $[\delta, \pi]$  més petita que  $\varepsilon/3$  prenent  $n$  prou gran. Per tant  $s_n(x) \rightarrow f(x)$  si al punt  $x$ ,  $f$  és derivable.

Així, tenim el teorema:

Si  $f$  és  $2\pi$ -periòdica i contínua a trossos amb derivada contínua a trossos, llavors per a tota  $x$  en què  $f$  sigui derivable tenim que  $s_n(x)$  tendeix a  $f(x)$ .

L'argument utilitzat per a demostrar la convergència de la integral a  $[-\delta, \delta]$  també es pot fer servir si  $f$  satisfà una *condició de Lipschitz* al punt  $x$ , és a dir, si existeix una constant  $L > 0$  tal que  $|f(x+t) - f(x)| < L|t|$  per a  $t$  en algun entorn de 0.

Efectivament, en tal cas  $|\phi_x(t)| < 2L =: M$ , i el raonament segueix igual que abans, i això ens permet relaxar les condicions sobre  $f$  que satisfaci una condició de Lipschitz en lloc de ser derivable, mantenint-se la convergència puntual de  $s_n(x)$  a  $f(x)$ . Per exemple la funció de l'exemple 2 de la secció 15 no és derivable però satisfà una condició de Lipschitz a tots els punts, i, per tant,  $s_n(x) \rightarrow f(x)$  a tots els punts de  $\mathbb{R}$ .

Per cert que una funció que satisfà una condició de Lipschitz a  $x$  és contínua a  $x$ , i tota funció derivable a  $x$  satisfà una condició de Lipschitz, amb constant tan propera al màxim valor absolut de  $f'(x)$  com vulguem (exercici).

## 6.19 Convergència de la sèrie de Fourier als punts de discontinuïtat

Amb els mateixos supòsits sobre la funció  $f$  que en la secció anterior, estudiarem ara la convergència de la sèrie de Fourier als punts  $x$  on  $f$  té una discontinuïtat de salt. Resulta que  $\lim s_n(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ , on hem designat per  $f(x^+)$ ,  $\lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$ , i per  $f(x^-)$ ,  $\lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$ .

La demostració va així:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_n(t) dt - \frac{1}{2} f(x^-) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x^-)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt,$$

ja que  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n = \frac{1}{2}$ .

Tenim ara que si apliquem la regla de l'Hôpital a  $\phi_x^-(t) := (f(x+t) - f(x^-))/2 \sin(t/2)$ , resulta que  $\phi_x^-(t) \rightarrow 2f'(x^-)$  quan  $t \rightarrow 0^-$ , i per tant  $|\phi_x^-(t)| < 1 + 2f'(x^-) =: M$ , si  $t$  és prou a prop de 0 per l'esquerra, on  $f'(x^-)$  designa la derivada per l'esquerra de  $f$  al punt  $x$ .

Partint, anàlogament a com ho hem fet en la secció anterior, la integral a  $[-\pi, 0)$  en els intervals  $[-\pi, -\delta]$  i  $[-\delta, 0)$  i prenent  $\delta$  prou petita perquè la segona integral sigui acotada en valor absolut per  $2\delta M < \varepsilon$ , i prenent  $n$  prou gran perquè amb aquesta  $\delta$  la primera integral estigui acotada per  $\varepsilon/2$ , resulta que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_n(t) dt \rightarrow \frac{1}{2} f(x^-) \quad \text{quan } n \rightarrow \infty.$$

De manera semblant

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt \rightarrow \frac{1}{2} f(x^+) \quad \text{quan } n \rightarrow \infty.$$

Sumant obtenim el resultat esperat.

## Exercicis i problemes

1. A quina funció, donada en termes de funcions elementals, convergeix la sèrie de potències

$$1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots \quad ?$$

2. Calculeu la sèrie de Taylor centrada a 0 de les següents funcions, procurant utilitzar el mètode que menys feina porti. Doneu-ne els radis de convergència.

$\ln((1+x)/(1-x))$ ,  $x/(1-x)^2$ ,  $(1+x)^\alpha$ , amb  $\alpha \in \mathbb{R}$ , (i a partir d'ella la de  $\sqrt{1+x}$ ),  $1/\sqrt{1+x}$ ,  $\sqrt{1+x^2}$ ,  $\sqrt{1-x^2}$ ,  $\arcsin x$ ,  $1/\sqrt{1-x^4}$ ,  $\sqrt{\sin x}$ .

3. Calculeu les sèries de Taylor i els respectius radis de convergència, de les funcions

- (a)  $\sqrt{x}$ , centrada a 1.
- (b)  $\ln x$ , centrada a 2.
- (c)  $\operatorname{arctg} x$ , centrada a 1.
- (d)  $\sqrt[3]{x}$ , centrada a 1.

4. Trobeu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \arcsin x}.$$

5. Calculeu els límits de  $n \sin(x/n)$  i de  $\cos(x/n)$  quan  $n \rightarrow \infty$ .

6. Demostreu la convergència per a tota  $x \in \mathbb{R}$  de les sèries

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx/n^2$ .
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(x/3^n)$ .
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} e^{nx}$ ,  $|c| < 1$ .

En quins casos és uniforme aquesta convergència?

7. Demostreu que  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(1/3^n x)$  convergeix per a tota  $x$ , excepte per a  $x = 0$ , i que la convergència no és uniforme prop de  $x = 0$ .
8. Estudieu la convergència uniforme de  $\sin(n^p x)/n^m$  quan  $n \rightarrow \infty$ .
9. Estudieu la convergència uniforme de  $\sum_{n=1}^{\infty} x/n(1+nx^2)$  i de  $\sum_{n=1}^{\infty} nx/(1+n^4 x^2)$ .



10. Doneu el desenvolupament en sèrie de

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx, \\ & \int_0^1 x^{ax} dx, \\ & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-ax}}{1 + \cos^2 x} dx, \\ & \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} dx, \quad \text{i} \\ & \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad \text{per a } k^2 < 1. \end{aligned}$$

11. Demostreu que  $\int_0^x \sin t/t dt$  és una funció analítica entera, i doneu-ne la sèrie de potències.

12. Demostreu que  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx/n^2 = ((\pi - x)/2)^2 - \frac{\pi^2}{12}$  a  $[0, 2\pi]$ , i que  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos nx/n^2 = x^2/4 - \pi^2/12$  a  $[-\pi, \pi]$ .

A partir d'això es dedueix

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6 \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^2 = -\pi^2/12.$$

13. A la demostració de la fórmula de Stirling, a l'apèndix del capítol 5, es fa servir que  $-s\sqrt{x} + x \ln(1 + s/\sqrt{x})$  tendeix uniformement a  $-s^2/2$  quan  $x \rightarrow \infty$ . Demostreu-ho.

14. Trobeu el centre del cercle tangent a la gràfica de la funció  $f$  al punt  $x$  que millor approximi aquesta gràfica en un entorn de  $x$ . El radi d'aquest cercle s'anomena *radi de curvatura* de la gràfica de  $f$  a  $x$ . Sobre quina corba es troben aquests centres si  $f$  té per gràfica una cicloide?

## Apèndixs

### 1. Les funcions analítiques de variable complexa

Ja hem vist a l'apèndix del capítol 4 com les funcions polinomial, exponencial, sinus i cosinus es poden estendre a tot el pla complex. I les funcions racionals es poden estendre a tot el pla complex excepte els punts singulars on el denominador s'anul·la.

La convergència uniforme d'una successió de funcions de variable complexa sobre un conjunt  $A$  de  $\mathbb{C}$  es defineix d'una manera anàloga a com ho hem fet per a funcions de variable real: diem que la successió  $\{f_n\}$  de funcions definides en un conjunt  $A$  de  $\mathbb{C}$  (per exemple un disc), convergeix uniformement a  $f$ , també amb domini  $A$ , si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0$ , independent de  $z \in A$  tal, que si  $n > n_0$ , llavors  $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$  per a tota  $z \in A$ . Ho denotem per  $f_n \Rightarrow f$  a  $A$ .

Deixem com a exercici la reproducció de les demostracions que ja hem fet per a les funcions de variable real de les propietats següents:

i) Si les  $f_n$  són contínues i  $f_n \Rightarrow f$  a  $A$ , llavors  $f$  és contínua a  $A$ .

ii) Si  $f_n(z) \rightarrow f(z)$ ,  $\forall z \in A$ , i  $f'_n \Rightarrow g$  a  $A$ , llavors  $g = f'$ , on  $f'$  denota la derivada de  $f$  respecte a  $z$  complex.

iii) Val el criteri  $M$  de Weierstrass.

També podem definir les sèries de potències de números complexos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C},$$

per a les quals, d'una manera semblant al cas real, demostrem que el radi de convergència  $r$  ve donat per

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

El radi de convergència és el radi del màxim disc obert centrat a 0 on la sèrie de potències convergeix. Resulta, com en el cas real, que la sèrie convergeix uniformement en tot disc més petit que  $r$  centrat a 0.

Fixem-nos en el fet que si les  $a_n$  són reals, llavors la sèrie de potències real té un radi de convergència igual al de la complexa, és a dir, l'interval de convergència de la primera és un diàmetre del disc de convergència de la segona. Això ens permet estendre tota funció analítica real al domini complex.

Donada una sèrie de potències complexa podem derivar-la terme a terme i obtenim, com en el cas real, una sèrie de potències amb el mateix radi de convergència. És a dir, les funcions complexes  $f$  que són límits de sèries de potències tenen derivades de tots els ordres i són analítiques, en el sentit que les sèries de Taylor centrades en punts interiors del disc de convergència convergeixen a la mateixa funció a la intersecció del nou disc de convergència amb l'original.

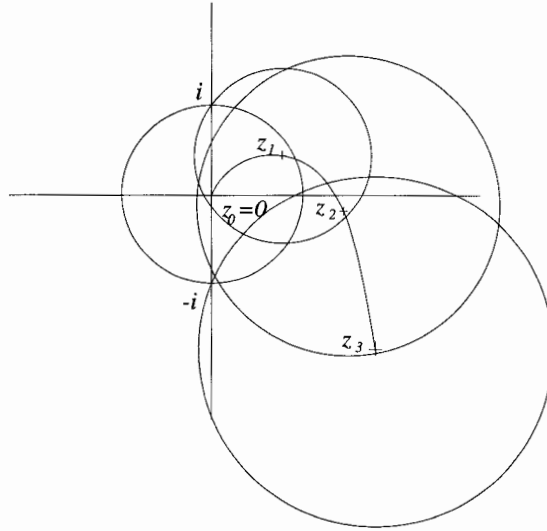
Si tenim una sèrie de potències que convergeix a una funció  $f$  en un disc  $D_0$  centrat a  $z_0$ , és a dir, si

$$f(z_0 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n,$$

llavors prenent un punt  $z_1 \in D_0$  podem trobar la sèrie de Taylor centrada a  $z_1$ , que tindrà un disc de convergència  $D_1$  que pot tenir punts no continguts a  $D_0$ . Si  $z_2$  és un d'aquests punts, determinem la sèrie de Taylor centrada a  $z_2$ , que convergirà a  $D_2$ , que pot tenir punts que no estan ni a  $D_0$  ni a  $D_1$ . D'aquesta manera anem obtenint una funció, que podem encara continuar denotant per  $f$ , que va engrandint el seu domini en anar afegint els trossos de discs de convergència que no estaven continguts als discs anteriors. Aquest procés és conegut com a *continuació analítica*.

Els punts de  $\mathbb{C}$  que no es poden cobrir d'aquesta manera s'anomenen *singularitats* de  $f$ . Tenim que si  $z_0$  és al domini de  $f$ , el disc de convergència de la sèrie de Taylor que hi és centrada resulta ser el més gran que no contingui cap singularitat al seu interior.

Per exemple considerem la sèrie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} z^{2n}$ , que convergeix a la funció  $f(z) = 1/(1+z^2)$  al disc de radi 1 centrat a 0. Mitjançant la continuació analítica podem anar recobrint tot el pla complex excepte els punts  $\pm i$  on la funció  $f$  no està definida i no és acotada a cap dels seus entorns. La manera de fer-ho seria anar col·locant els centres dels discs de convergència al llarg d'una corba  $\Gamma$  que anés espiralant cap a l' $\infty$ .



Si considerem la funció  $f(z) = \sqrt{z}$ , i calculem la sèrie de Taylor centrada a 1, utilitzant la funció real  $+\sqrt{x}$ , obtenim un cercle de convergència igual a 1. Per continuació analítica, com en el cas anterior, podem anar cobrint tot  $\mathbb{C}$ , menys l'origen, on hi ha una singularitat:  $\sqrt{z}$  no hi és analítica. Resulta que si fem una continuació al llarg de punts situats al cercle  $\Gamma$  de radi 1 centrat a 0,  $|z| = 1$ , en donar una volta i tornar a  $z = 1$ , ens surt que  $f(1) = -1$  en lloc d'1.

En donar una altra volta a  $\Gamma$  en el mateix sentit, tornem al valor  $f(1) = 1$ . És a dir, ens trobem amb el fenomen que els discs de la continuació recobreixen dues vegades el pla complex.

Si prenem la funció real  $f(x) = \ln(1+x)$ , i calculem la seva sèrie de Taylor centrada a 0, obtenim la sèrie de Leibniz  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n/n$ , que val 0 per a  $x = 0$  i que té un radi de convergència igual a 1.

Si ara l'estenem a valors complexos obtenim la mateixa sèrie convergint al disc de radi 1 centrat a 1. Si fem la continuació analítica al llarg del cercle unitari en sentit directe, és a dir en sentit contrari al moviment de les busques del rellotge, resulta que quan tornem a 1, ja no obtenim 0, sinó  $2\pi i$ , i en cada nova volta que donem en aquest sentit, incrementem  $2\pi i$  més. Si anem en sentit contrari anem disminuint aquesta quantitat en cada volta. Amb aquesta continuació analítica recobrim  $\mathbb{C}$  sense l'origen una infinitat de vegades, no dues com abans, amb els discs que van definint la funció.

Notem que a diferència de la funció  $1/(1+z^2)$ , les funcions  $\sqrt{z}$  i  $\ln z$  no estan definides de manera única a tot el pla complex (exceptuant 0). Fins i tot si ens limitem als reals positius, hem d'especificar la  *branca*  de la funció. Així hem de distingir entre  $+\sqrt{x}$  i  $-\sqrt{x}$ , i ja sabem que el logaritme d'un número complex està determinat excepte per l'addició d'un múltiple enter de  $2\pi i$ , ja que  $\exp(z + 2k\pi i)$  té el mateix valor per a tota  $k \in \mathbb{Z}$ .

Començant amb altres funcions analítiques podem obtenir altres maneres d'anar recobrint  $\mathbb{C}$ . Aquestes menes de vànoves de pedaços on les funcions com  $\sqrt{z}$  o  $\ln z$  estan definides de manera unívoca s'anomenen *superfícies de Riemann*.

Una funció analítica, tant en el cas real com en el complex, està determinada pels valors de les seves derivades en un punt, ja que això dóna la sèrie de Taylor corresponent, i per continuació analítica podem obtenir-la arreu del seu domini.

També queda determinada pels seus valors en un conjunt infinit de punts  $\{z_k\}$  que s'acumulin a  $z_0$ , diguem, puix que en tal cas tenim que si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{i} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

són les respectives sèries de potències de dues funcions que prenen els mateixos valors a  $\{z_k\}$ , llavors prenent  $z = z_0$  deduïm que  $a_0 = b_0$ . Prenent ara  $z = z_1$ , i dividint per  $z_1 - z_0$ , resulta que  $a_1 = b_1$ , i, inductivament, tenim que suposant  $a_k = b_k$  per a  $k < n$ , posant  $z = z_n$  i dividint per  $(z_n - z_0)^n$ , ens queda  $a_n = b_n$ . Per tant  $a_n = b_n, \forall n$ , i les sèries coincideixen, la qual cosa implica que les funcions respectives ho fan.

Una diferència fonamental entre les funcions de variable real i les de variable complexa és que les primeres poden ser derivables en un interval sense ser analítiques, mentre que les segones, si són derivables (és a dir *holomorfes*) en algun disc, resulten analítiques. Això no ho exposarem aquí, ja que depèn de tècniques d'integració de funcions de variable complexa sobre corbes, que s'escapa de les intencions d'aquest llibre. D'aquestes mateixes tècniques depèn el resultat que diu que si provem que una funció és analítica en un disc llevat d'al seu centre, però és contínua a tot el disc, llavors és analítica també incloent-ne el centre.

## 2. La funció binomial

Considerarem aquí la funció  $f(x) = (1+x)^\alpha$ , en què  $\alpha$  és qualsevol número real. La seva sèrie de Taylor, obtinguda calculant les derivades successives, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Al capítol anterior ja hem vist, utilitzant el criteri de convergència del quocient, que aquesta sèrie convergeix per a  $|x| < 1$ .

Per a veure que  $f$  és analítica falta només comprovar que la sèrie convergeix a  $(1+x)^\alpha$ , és a dir, que el romanent de la fórmula de Taylor tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ .

La comprovació demana una mica de treball sense cap gran complicació, i ens servirà per a practicar una mica.

El romanent després del terme de grau  $n$  val

$$r_n(x) = \int_0^x \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+t)^{\alpha-n-1}}{n!} (x-t)^n dt.$$

Utilitzant el teorema del valor mitjà per a la integral ho podem escriure com

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} (1+\xi)^{\alpha-n-1} (x-\xi)^n \int_0^x dt \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} (1+\xi)^{\alpha-n-1} (x-\xi)^n x, \end{aligned}$$

amb  $\xi \in (0, x)$  (forma de Cauchy).

També ho podem escriure com

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} (1+\xi)^{\alpha-n-1} \int_0^x (x-t)^n dt \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1}, \end{aligned}$$

també amb  $\xi \in (0, x)$ , però diferent de l'anterior (forma de Lagrange). Recordem que  $(0, x)$  és  $(x, 0)$  si  $x < 0$ .

Per a demostrar la convergència a 0 d'aquests romanents, farem servir l'un o l'altre segons que  $x$  sigui positiva o negativa.

Per a  $x \in [0, 1)$  farem servir la forma de Lagrange, observant que en aquest cas  $\xi \in [0, x)$  és positiva i més petita que 1, i que per tant  $(1+\xi)^{\alpha-n-1} < 1$  si  $n+1 > \alpha$ , cosa que certament és així si  $n$  és prou gran.

En aquest cas, doncs,

$$\begin{aligned} |r_n(x)| &< \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{m(m+1)\dots(m+n)}{(n+1)!} x^{n+1} = \\ &\frac{(n+2)\dots(n+m)}{(m-1)!} x^{n+1} < \frac{(n+m)^{m-1}}{(m-1)!} x^{n+1}, \end{aligned}$$

si  $m$  és un enter més gran que  $|\alpha|$  i que 1.

Això tendeix a 0 quan  $n$  tendeix a  $\infty$ , com es desprèn de

$$\frac{(n+m)^{m-1}}{(m-1)!} x^{n+1} < \frac{2^{m-1} n^m}{(m-1)! y y^n}, \quad \text{amb } y = \frac{1}{x} > 1,$$

si  $n > m$ , i  $n^m/y^n \rightarrow 0$  quan  $n \rightarrow \infty$ , tal com hem vist al capítol 5, secció 4, o bé iterant la regla de l'Hôpital, tot derivant numerador i denominador respecte de  $n$ .

Quan  $x \in (-1, 0)$  utilitzarem la forma de Cauchy del romanent. Queda

$$\begin{aligned} |r_n(x)| &= \left| (n+1) \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} x (1+\xi)^{\alpha-1} \left( \frac{x-\xi}{1+\xi} \right)^n \right| \\ &< K \frac{(n+m)^{m-1}}{(m-1)!} (n+1) \left( \frac{x-\xi}{1+\xi} \right)^n, \end{aligned} \quad (6.4)$$

on  $K$  és la constant  $x(1 + \xi)^{\alpha-1}$  i hem utilitzat la cota del cas anterior per al terme  $\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n)/(n + 1)!$ .

Ara, com que  $\xi \in (x, 0)$ , tenim  $x - \xi < 0$  i  $|x - \xi| < 1 + \xi$ , de manera que  $|(x - \xi)/(1 + \xi)| = 1/y < 1$ . Resulta, doncs, que

$$|r_n(x)| < K \frac{(n + m)^{m-1}}{(m - 1)!} \cdot \frac{1}{y^n}, \quad \text{amb } y > 1,$$

que tendeix a 0, tal com hem vist en el cas anterior.

La funció  $f(x) = (a + x)^\alpha$  és analítica amb sèrie de Taylor convergent per a  $|x| < |a|$ , tal com es veu posant  $(a + x)^\alpha = (1 + x/a)^\alpha a^\alpha$ .

La funció binomial també es pot considerar una funció de variable complexa  $f(z) = (a + z)^\alpha$ , que tindrà una sèrie de Taylor que convergirà al disc de radi  $|a|$  centrat a  $a$ , puix que  $z = -a$  és l'única singularitat d'aquesta funció.

### 3. Números de Bernoulli i sèries de potències

Els números de Bernoulli han estat definits a l'apèndix del capítol 5 en tractar de la fórmula d'Euler-Maclaurin. Aquests números apareixen també com a valors de les derivades successives de la funció  $f(x) = x/(e^x - 1)$  a 0.

Notem que el denominador  $e^x - 1$  s'anulla per a  $x = 0$ . Malgrat això la funció  $f$  és analítica a un entorn de 0, com es dedueix de la caracterització de les funcions analítiques com a derivables com a funcions de variable complexa, i a més el radi de convergència de la seva sèrie de Taylor centrada a 0 és  $2\pi$  perquè els valors complexos més propers a 0 en els quals  $f$  té singularitats són  $\pm 2\pi i$ .

La sèrie de Taylor centrada a 0 de  $f$  és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

on  $B_n = f^{(n)}(0)$  és precisament el número de Bernoulli d'ordre  $n$ .

Això es pot comprovar directament de

$$x = (e^x - 1)f(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right),$$

i igualant els coeficients dels termes del mateix grau en  $x$ . Així (exercici),

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0 \text{ per a tota } n > 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Com que aquesta és la mateixa fórmula recursiva que ja hem vist que satisfan els números de Bernoulli, i a més  $B_0$  i  $B_1$  coincideixen, deduïm que les  $B_n$  són els mateixos per a tota  $n$ .

Els números de Bernoulli comencen decreixent en valor absolut fins a  $B_6$ , i després creixen sense límit. De fet la fórmula que ens dóna el radi de convergència de la sèrie de Taylor de  $f$  a l'origen, que ja sabem que és  $2\pi$ , ens diu

$$\frac{1}{2\pi} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|B_n|}{n!}},$$

és a dir, que existeix una infinitat de valors de  $n$  pels quals

$$\sqrt[n]{\frac{|B_n|}{n!}} > \frac{1}{2\pi} - \varepsilon,$$

on  $\varepsilon > 0$  té un valor arbitrari. Per tant

$$\frac{|B_n|}{n!} > \left(\frac{1}{2\pi} - \varepsilon\right)^n = \frac{1}{(2\pi)^n} - O(\varepsilon),$$

o sigui

$$|B_n| > \left(\frac{1}{(2\pi)^n} - O(\varepsilon)\right) n!.$$

Certament això creix sense cota quan  $n \rightarrow \infty$ .

Per altra banda  $\sqrt[n]{|B_n|/n!} < \frac{1}{2\pi} + \varepsilon$  per  $n$  més gran que una  $n_0$  dependent de  $\varepsilon > 0$ , la qual cosa dóna  $|B_n| < \left(\frac{1}{(2\pi)^n} + O(\varepsilon)\right) n!$  per a  $n > n_0$ .

Es poden obtenir altres sèries de potències amb coeficients que involucren els números de Bernoulli. Per exemple, resulta directament de la definició de les funcions hiperbòliques

$$x \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!},$$

que és convergent per a  $|x| < \pi$ .

O bé, canviant  $x$  per  $ix$  i recordant la connexió entre la funció exponencial i les funcions trigonomètriques (apèndix del capítol 4):

$$x \operatorname{ctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}.$$

També

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sin x} &= x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - x \operatorname{ctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2^{2n} - 2)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n} \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}, \end{aligned}$$

que convergeixen per a  $|x| < \pi/2$ .



Si utilitzem aquesta darrera sèrie a  $-\frac{d}{dx} \ln \cos x = \operatorname{tg} x$  i integrem terme a terme, procurant que s'anulli el que queda per a  $x = 0$ , resulta

$$\ln \cos x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!2n} B_{2n} x^{2n}.$$

I si  $\frac{d}{dx} \ln \sin x = \operatorname{cot} x$ , obtenim

$$\ln \sin x = \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!2n} B_{2n} x^{2n}.$$

#### 4. La desigualtat de Bessel

Direm que dues funcions  $f$  i  $g$  són *ortogonals* sobre un interval  $I = [a, b]$  si  $\int_a^b fg = 0$ . També direm que una successió de funcions  $\{\phi_n\}$  forma un *sistema ortogonal* sobre l'interval  $I$  si  $\int_a^b \phi_m \phi_n = 0$  per a  $m \neq n$ , i  $\int_a^b \phi_n^2 \neq 0$  per a tota  $n \in \mathbb{N}$ . Si a més  $\int_a^b \phi_n^2 = 1$  per a tota  $n \in \mathbb{N}$ , direm que tenim un *sistema ortonormal* de funcions a l'interval  $[a, b]$ .

En particular les funcions  $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$  formen un sistema ortogonal a  $[-\pi, \pi]$ . Com que  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi$ , tindrem el sistema ortonormal  $1/\sqrt{2\pi}, \cos x/\sqrt{\pi}, \sin x/\sqrt{\pi}, \dots, \cos nx/\sqrt{\pi}, \sin nx/\sqrt{\pi}, \dots$  (A la secció 7.9 en diem alguna cosa més, referint-nos a espais vectorials).

Si tenim un sistema ortonormal  $\{\phi_n\}$  a l'interval  $[a, b]$  i una funció  $f$  integrable a aquest interval (contínua a trossos, per exemple, si l'interval és finit), podem, com hem fet abans amb les funcions trigonomètriques en la secció 6.14, definir uns *coeficients de Fourier* respecte al sistema  $\{\phi_n\}$  mitjançant

$$c_n = \int_a^b f \phi_n.$$

Si a més suposem que el quadrat de  $f$  és també integrable a  $I = [a, b]$ , cosa que serà certa si  $f$  és contínua a trossos i l'interval  $I$  és finit, llavors es compleix la *desigualtat de Bessel*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leq \int_a^b f^2,$$

on s'està dient implícitament que  $\sum c_n^2$  convergeix.

Per a demostrar-ho fem  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(x)$  i considerem  $\int_a^b (f - s_n)^2 = \int_a^b f^2 - 2 \int_a^b f s_n + \int_a^b s_n^2$ .

Per una banda

$$\int_a^b f s_n = \int_a^b f(x) \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(x) \, dx = \sum_{k=0}^n c_k \int_a^b f \phi_k = \sum_{k=0}^n c_k^2,$$

per l'altra

$$\int_a^b s_n^2 = \int_a^b \left( \sum c_k \phi_k(x) \right)^2 dx = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \left( c_k c_l \int_a^b \phi_k \phi_l \right) = \sum_{k=0}^n c_k^2,$$

i per tant

$$\int_a^b (f - s_n)^2 = \int_a^b f^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2.$$

Com que la integral de la banda esquerra d'aquesta igualtat no és negativa, resulta

$$0 \leq \int_a^b f^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2,$$

que és la desigualtat de Bessel.

## 5. Criteri d'Abel per a la convergència uniforme

El criteri  $M$  de Weierstrass no és suficient per a decidir si certes sèries de Fourier convergeixen uniformement a alguns intervals. Per poder-ho fer, ens és útil el *criteri d'Abel*, que diu que si  $\{f_n\}$  és una successió de funcions, amb  $|f_n(x)| < M$  per a tota  $x$  a un interval  $I = [a, b]$  i per tota  $n \in \mathbb{N}$ , és a dir, uniformement acotades per  $M$  a  $I$ , i tenim una successió  $\{a_n\}$  de números que decreixen monòtonament a 0, llavors  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$  convergeix uniformement a l'interval  $I$ .

Per a demostrar-ho utilitzarem el següent lema tècnic:

Si la successió  $\{a_n\}$  decreix monòtonament tendint a 0 i si  $\{b_n\}$  compleix  $-M < \sum_{k=1}^n b_k < M$  per tota  $n \in \mathbb{N}$ , llavors  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  convergeix.

Efectivament, si posem  $s_n = \sum_{k=1}^n b_k$ , llavors

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k (s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) s_k + a_n s_n,$$

on hem pres  $s_0 = 0$ . Com que  $\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) |s_k| < M \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_n)M$ , (recordem que  $a_k - a_{k+1} \geq 0$ ), tenim quan  $n \rightarrow \infty$ :

$$-a_1 M < \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) |s_k| < a_1 M,$$

ja que  $a_n \rightarrow 0$ . Com que  $a_n s_n$  també tendeix a 0, resulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) s_k,$$

que convergeix, tal com volíem demostrar.

A més, com que  $-M < \sum_{k=1}^{n+m} b_k < M$ , tenim que  $-2M < \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k < 2M$ , resulta que  $|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k| \leq 2Ma_{n+1}$ .

Tornant ara al criteri d'Abel, tenim que si escollim  $x \in [a, b]$  arbitrari, i fem  $b_n = f_n(x)$ , llavors  $\sum b_n$  i  $\{a_n\}$  satisfan les hipòtesis del lema que acabem de provar, i per tant  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n f_n(x)$  convergeix, i a més

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x) - \sum_{k=1}^n a_k f_k(x) \right| < 2Ma_{n+1},$$

independentment de quina  $x$  hàgim escollit a  $I$ .

Com que  $2Ma_{n+1}$  tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ , resulta que  $\sum a_k f_k(x)$  convergeix uniformement a  $I$ .

### 6. Convergència uniforme de la sèrie de Fourier

Si  $f$ ,  $2\pi$ -periòdica és contínua i té derivada a trossos a l'interval  $I = (a, b)$ , llavors la sèrie de Fourier de  $f$  convergeix uniformement a  $f$  a tot l'interval tancat contingut a  $I$ .

Demostrem primer el cas  $I = \mathbb{R}$ .

Tenim que  $|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|$ .

Veurem que  $\sum(|a_n| + |b_n|)$  convergeix i llavors, aplicant el criteri  $M$  de Weierstrass conclourem que la sèrie de Fourier convergeix uniformement a  $f$ .

Efectivament, com que  $f'$  és contínua a trossos, podem calcular-ne els coeficients de Fourier:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f' = \left[ \frac{1}{\pi} f(x) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = nb_n, \end{aligned}$$

on hem tingut en compte la continuïtat de  $f$  i el fet que és  $2\pi$ -periòdica.

D'una manera anàloga obtenim  $\beta_n = -na_n$ .

Ara apliquem les desigualtats de Cauchy (secció 5.22) i Bessel a  $f'_n$  i obtenim

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} |\alpha_k| + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} |\beta_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n |\beta_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f')^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Com que  $\sum \frac{1}{k^2}$  convergeix i  $(f')^2$  té una integral finita ja que és contínua a trossos, resulta que  $\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) < M$  per a alguna  $M > 0$ , i aplicant el criteri  $M$  de Weierstrass, resulta que  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  convergeix uniformement a  $f$  a tot  $\mathbb{R}$ .

Passem ara a la demostració de la convergència uniforme relaxant la condició que  $f$  sigui contínua al fet que ho sigui a trossos, també amb derivada contínua a trossos. En aquestes condicions demostrarem la convergència uniforme de la sèrie de Fourier a tot interval  $[a, b]$  que estigui contingut en un interval obert on  $f$  sigui contínua.

Suposem que les discontinuïtats de salt són a  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  a  $[-\pi, \pi)$ , i que el salt  $[f(x_k)]$  és igual a  $(f(x_k^+) - f(x_k^-)) = c_k$ .

Definim la funció

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{\pi} g(x - x_k),$$

on  $g(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ .

La funció  $g$  té per sèrie de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tenim que  $f - \phi$  és contínua i amb derivada contínua a trossos a tot  $\mathbb{R}$ , i per tant, aplicant el resultat acabat de demostrar, resulta que la sèrie de Fourier de  $f - \phi$  convergeix uniformement a tot  $\mathbb{R}$ . Com que  $f = (f - \phi) + \phi$ , per a demostrar el que volem només ens cal veure que la sèrie de Fourier de  $\phi$  convergeix uniformement sobre tot interval tancat que no contingui cap  $x_k$ .

Per això n'hi ha prou amb comprovar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx/n$  convergeix uniformement a  $[a, b] \subset (0, 2\pi)$ . Per aconseguir-ho aplicarem el criteri d'Abel: provarem que  $\sum \sin nx$  és uniformement acotat i, com que  $1/n$  tendeix a 0, obtindrem el resultat.

Aplicant identitats trigonomètriques tenim

$$\begin{aligned} - \left( \sum_{k=1}^n \sin kx \right) \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right) &= \sum_{k=1}^n \left( \cos \frac{2k+1}{2}x - \cos \frac{2k-1}{2}x \right) \\ &= \cos \frac{2n+1}{2}x - \cos \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Dividint per  $2 \sin(x/2)$ , que és positiu a  $(0, 2\pi)$ , obtenim

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| &= \frac{|\cos \frac{1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x|}{2 \sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \\ &\leq \min \left\{ \frac{1}{\sin \frac{a}{2}}, \frac{1}{\sin \frac{b}{2}} \right\} =: M > 0. \end{aligned}$$

Com que  $M$  és independent de  $n$ , resulta que  $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$  convergeix, i aplicant el criteri d'Abel, resulta que  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx/n$  convergeix uniformement a  $[a, b] \subset (0, 2\pi)$ . Que convergeix a la funció  $g$  es deriva del fet que convergeix puntualment, segons un teorema ja demostrat al text, a tots els punts en què  $g$  és contínua.

## 7. El fenomen de Gibbs

Com a la secció anterior, considerem la funció  $2\pi$ -periòdica definida per  $\phi(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ , que té per sèrie de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Aquesta sèrie convergeix uniformement a  $\phi$  a tot interval  $[a, b]$  contingut a  $(0, 2\pi)$  (o a aquest interval desplaçat un múltiple de  $2\pi$ ). Per altra banda no pot convergir uniformement a cap interval que contingui el 0, puix que  $\phi$  és discontinua a 0, mentre que les sumes parcials de la sèrie són contínues.

Tenim que  $s_n(x) + \frac{1}{2}x = \int_0^x D_n$ , com es dedueix integrant  $\frac{1}{2} + s'_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = D_n(x)$ .

Ara, com que

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x},$$

obtenim

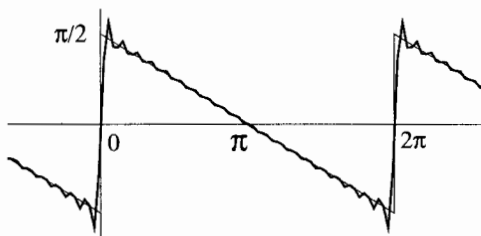
$$\begin{aligned} s_n(x) &= \int_0^x \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} dt \\ &+ \int_0^x \left( \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}t} - \frac{1}{t} \right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt - \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Aplicant dues vegades la regla de l'Hôpital resulta que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} ((1/2 \sin(x/2)) - 1/x) = 0$ , de manera que la segona integral de la banda dreta de la igualtat tendeix a 0, quan  $x \rightarrow 0^+$ . Fent un canvi de variable a la primera queda, doncs, que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal, que si  $x \in (0, \delta)$ ,

$$\left| s_n(x) - \int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin t}{t} dt \right| < \varepsilon.$$

Les integrals de  $\sin t/t dt$  sobre els intervals  $(k\pi, (k+1)\pi)$  són de signes alternants i decreixents, per la qual cosa el valor màxim de la integral s'ateny quan  $(n + \frac{1}{2})x = \pi$ , i val aproximadament  $1.179 \times \pi/2$  (es pot calcular amb sèries de potències com a exercici).

Quan  $(n + \frac{1}{2})x = \pi$  tenim, doncs, que  $s_n(x)$  val aproximadament  $1.179 \times \pi/2$ . Com que quan  $n \rightarrow \infty$  això s'aconsegueix per a valors de  $x$  positives tendint a 0, resulta que tota  $s_n(x)$  pren valors que sobrepassen  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \pi/2$  en la quantitat  $0.179 \times \pi/2$ . Això passa a cada salt de  $f$ , com ho ilustra la figura. Com que el salt és de  $\pi$  unitats, això representa aproximadament 0.089 del valor del salt.



Quan  $n \rightarrow \infty$ , l'ona que sobrepassa es va fent més estreta i acostant-se al punt de discontinuïtat, però sense variar d'amplitud.

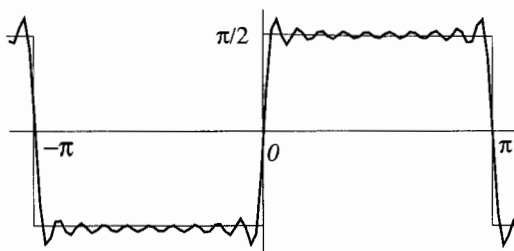
Resulta que aquest fenomen de les aproximacions sobrepassant en un 0.089 del valor del salt a les discontinuïtats es presenta en totes les funcions contínues a trossos amb derivades contínues a trossos, als punts de discontinuïtat de la funció.

Efectivament, la funció  $\phi$  que hem utilitzat per a demostrar la convergència uniforme en la secció anterior, l'obtenim sumant funcions  $g$  com aquesta i com que  $f = (f - \phi) + \phi$ , essent  $f - \phi$  aproximada uniformement per la seva sèrie de Fourier a tot  $\mathbb{R}$ , queda  $\phi(x) = \sum_{k=1}^m c_k g(x - x_k)/\pi$ , en la qual cada  $g$  té la seva  $s_n$  corresponent sobrepassant-la en el 0.089 del salt a cada salt, cosa que prova la veritat de l'afirmació.

En particular, la funció

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{per a } x \in (-\pi, 0) \\ \pi/2 & \text{per a } x \in (0, \pi), \end{cases}$$

corresponent a una ona quadrada, i que té per sèrie de Fourier  $2(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots)$  presenta el fenomen de Gibbs com es mostra a la figura



Aquest fenomen serveix per a explicar algunes observacions físiques a través de la seva modelització matemàtica.

## 8. Forma complexa de la sèrie de Fourier.

Tenint en compte que

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

obtenim, en substituir a l'expressió per  $s_n(x)$  de la secció 6.14

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos nx + b_k \sin nx) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-kx} \right) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \end{aligned}$$

si definim  $c_0 = a_0/2$ ,  $c_k = (a_k - ib_k)/2$ ,  $c_{-k} = (a_k + ib_k)/2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

D'aquesta manera, la sèrie de Fourier ens queda

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

de la qual, naturalment, n'hem de prendre la part real, si volem representar una funció amb valors reals.

En el cas que el període de la funció no sigui  $2\pi$ , sinó  $2a$ , hem d'escriure

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/a}.$$

## 9. Paquets d'ones i transformada de Fourier

Les sèries de Fourier ens diuen com “descompondre” una funció periòdica en una suma infinita d'*harmònics*, tots ells amb *frequències* (inverses dels períodes) múltiples de la *frequència fonamental* (la que correspon al període de la funció periòdica que aproximem). Per altra banda, si sumem funcions periòdiques, ni que siguin en nombre finit, amb períodes que no estan relacionats racionalment (és a dir, que no estan en la proporció de dos números naturals), el que obtenim no és una funció periòdica, sinó *quasiperiòdica*. Per exemple  $f(x) = \sin x + \sin \sqrt{2} x$  no és periòdica de cap període.

Aquestes funcions quasiperiòdiques tenen la propietat que, per qualsevol  $\varepsilon > 0$ , podem trobar  $T_\varepsilon > 0$ , dependent de  $\varepsilon$ , amb la propietat que  $|f(x) - f(x + T_\varepsilon)| < \varepsilon$  per a tota  $x$ .

Anàlogament a com s'estudien les sèries de Fourier es poden estudiar les sèries de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x},$$

on ara  $\lambda_n$  no tenen perquè ser totes múltiples d'un mateix número. Aquestes sèries, quan convergeixen, ho fan a una funció quasiperiòdica. Això mostra que no podem sumar una quantitat numerable de funcions periòdiques per a

obtenir una funció “concentrada” en una part de la recta, és a dir, que tendeixi a zero quan  $x$  tendeix a  $+\infty$  o a  $-\infty$ . En altres paraules, no podem fer *paquets d’ones*, sumant ones en conjunts numerables.

Per aconseguir sumes d’ones que es concentrin a alguna part, el que es fa és recórrer a sumes d’un *continu* de funcions periòdiques.

Així, si definim  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda) e^{2\pi i \lambda x} d\lambda$ , obtenim una funció tal que si  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2$  és finita, llavors també  $\int_{-\infty}^{\infty} f^2$  ho és. (Hem posat  $2\pi$  a l’exponent per conveniència a la notació posterior). Notem que  $\phi$ , el que ens representa, és l’amplitud de l’ona de freqüència  $\lambda$  que “sumem” amb la integral. És com una suma contínua de funcions periòdiques (de període variant contínuament).

El *teorema de Fourier* ens diu que si prenem

$$\phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \lambda x} dx,$$

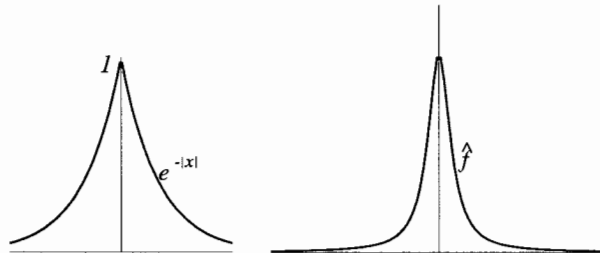
llavors es compleix la igualtat anterior.

A  $\phi$ , se l’anomena la *transformada de Fourier* de  $f$ , i es denota per  $\phi = \hat{f}$ .

La transformada de Fourier resulta útil per a la teoria lineal d’equacions en derivades parcials, per a la teoria de la comunicació, per a la teoria de la probabilitat, i en general per a tota l’anàlisi matemàtica.

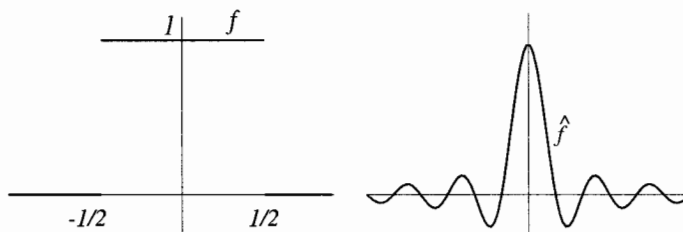
Exemples de transformades de Fourier són:

1. Si  $f(x) = e^{-|x|}$ , llavors  $\hat{f}(x) = \frac{2}{1+4\pi^2 x^2}$



2. Si  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{per a } |x| < 1/2 \\ 0, & \text{per a } |x| > 1/2 \end{cases}$ , llavors

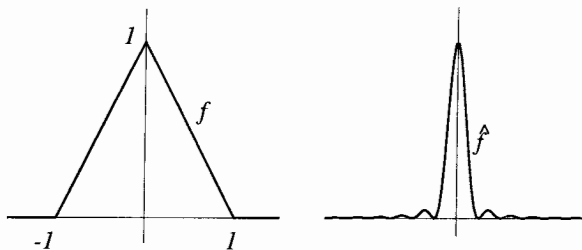
$$\hat{f}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} =: \text{sinc } x$$





3. Si  $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{per a } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{per a } |x| > 1 \end{cases}$ , llavors

$$\hat{f}(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2} = \text{sinc}^2 x$$





## Capítol 7

# Interpolació, aproximació i avaluació numèrica

### 7.1 Introducció

Quan utilitzem el càlcul i els seus mètodes per a obtenir una magnitud o fer una predicció quantitativa, el resultat final és o bé un número, si es tracta d'una quantitat, o bé una col·lecció de números, si es tracta de descriure una funció o un procés. Així tenim que les fórmules matemàtiques, com per exemple  $\int_x^1 \frac{dt}{t}$ , o bé  $x^2$ , o bé  $\sqrt{x}$ , es poden interpretar com l'expressió d'un seguit d'operacions amb números, finita o infinita. Per a l'aplicació pràctica del càlcul cal, doncs, fer aquestes operacions i obtenir-ne com a resultat els números corresponents.

Com que els números reals, els donem en notació decimal, és aquesta notació la que tractem d'obtenir com a resultat dels nostres càlculs. Tenint en compte que només podem donar un nombre finit de xifres si el número no és una fracció decimal, el resultat final no el podem donar més que aproximadament, i tindrem una diferència que anomenem *error d'arrodoniment*. A més d'aquests errors a l'expressió de cada número, ens trobem amb un *error de truncament* quan el que volem calcular és límit d'un procés infinit, cosa que, certament, no podem portar fins al final! Es tractarà que en acabar el procés de càlcul l'error sigui acceptable.

La història del càlcul numèric és tan antiga com la matemàtica mateixa. Ja els càlculs dels mesopotamis de fa dos mil cinc-cents anys, que confegien les seves efemèrides astronòmiques utilitzant processos interpolatius, no eren gens trivials. Més endavant, en utilitzar-se les funcions trigonomètriques per a fer aquests càlculs, els matemàtics hel·lenístics, els àrabs i els renaixentistes desenvolupen diverses tècniques per a obtenir les taules dels seus valors. Ja hem esmentat abans que l'aparició dels logaritmes va ser deguda a la conveniència de facilitar els càlculs numèrics, i també es van haver de desenvolupar mètodes per a poder fer-ne taules i utilitzar-ne. Per exemple, *Briggs* al principi del segle XVII fa servir procediments d'interpolació prou complexos per a fer les primeres

taules de logaritmes decimals. Aquests procediments, més o menys modificats, s'han vingut utilitzant fins als nostres dies per a fer càlculs numèrics.

L'aparició amb el càlcul infinitesimal de funcions que transcendeixen les elementals, ja siguin donades per integrals indefinides, ja siguin donades com a sèries de potències o com a sèries de Fourier, requereixen per a la seva avaluació mètodes numèrics que els matemàtics dels segles XVII, XVIII i XIX s'espavilen per anar fent més eficaços. També el fet que alguns processos naturals són modelats per equacions diferencials, com és el moviment dels planetes, va introduir la necessitat d'avaluar les solucions d'aquestes equacions numèricament. Els descobriments de Neptú i Plutó es van fer, sense ordinador, utilitzant els mètodes numèrics desenvolupats el segle passat per a la resolució de les equacions diferencials. Ha estat enorme el treball i l'enginy esmerçats per a la humanitat per a fer aquests càlculs.

Amb l'aparició dels ordinadors digitals després dels anys quaranta, podria semblar que no caldrien mètodes tan refinats i que no ens hauríem de preocupar tant d'escurçar els càlculs. Ha resultat una mica al revés. Els ordinadors han fet possible prescindir gairebé del tot de les funcions tabulades, ja que es poden calcular al moment mateix. També han fet possible una gran quantitat de càlculs que abans estaven fora de les possibilitats humanes com ara els càlculs que es relacionen amb la resolució numèrica d'equacions en derivades parcials, amb l'optimització, etc. Però per molt ràpids i capaços que siguin els ordinadors actuals no donen l'abast a tots els càlculs que es volen fer avui. Els primers ordinadors electrònics es van construir per a resoldre problemes de meteorologia, i encara avui estem força lluny de tenir la capacitat de resoldre'ls, tot i que estem al nivell de milions d'operacions per segon.

Els antics mètodes s'han hagut de mantenir i perfeccionar per tal d'incloure els nous camps d'aplicació oberts per la nova capacitat de càlcul. A causa del fet que els ordinadors operen essencialment amb els mateixos algorismes que fem servir nosaltres amb el llapis i el paper, els mètodes numèrics s'han pogut adaptar sense gaires problemes. De fet, si ens mirem un llibre modern de càlcul numèric hi trobarem els noms de *Newton*, *Euler*, *Gauss*, i de gran part dels matemàtics més coneguts als segles XVIII i XIX com a autors de mètodes numèrics que avui s'utilitzen.

Fem notar que els esforços realitzats per a calcular amb eficàcia també han estat font de noves maneres de veure alguns aspectes de la matemàtica. Tal és, per exemple, tota la teoria del caos i dels fractals, que no s'havien fet evidents fins que es van poder observar a les pantalles electròniques o als *plotters* dels ordinadors.

En aquest capítol no intentarem fer una descripció ni mitjanament completa dels mètodes numèrics, i molt menys de les subtileses que presenten. Pretenem només donar una idea del tipus de procediments que s'utilitzen a la pràctica per a fer els càlculs. Sembla important aquesta introducció als mètodes numèrics, perquè d'altra manera podria semblar que el càlcul infinitesimal és més lluny de la pràctica del que realment n'és.

El capítol inclou un estudi teòric de la interpolació de funcions, com també

els aspectes pràctics de la seva utilització. Tractem alguna cosa del mètode de mínims quadrats per aproximar funcions. Una altra part, la dediquem als mètodes d'avaluació d'integrals i concloem amb el càlcul de zeros. A l'apèndix, incloem un exemple del fenomen de *Runge*, que mostra una limitació de l'aproximació per interpolació.

En un capítol posterior tractarem dels mètodes numèrics que s'utilitzen per a la solució numèrica d'equacions diferencials ordinàries.

## 7.2 Interpolació de funcions

L'aproximació de funcions amb expressions fàcils d'avaluar, ja sigui per càlculs manuals, o per ordinador, constitueix una necessitat de primer ordre al càlcul pràctic. Ja sigui per a conèixer els valors de les funcions a certs punts, com per a avaluar-ne la integral o resoldre numèricament equacions diferencials, necessitem expressions manipulables, que no seran més que una successió finita d'operacions aritmètiques que ens donaran valors prou aproximats per a fer-los útils.

La sèrie de Taylor presenta alguns inconvenients pel fet que és útil en l'aproximació de funcions. A més que de vegades convergeix molt lentament, resulta que només ho fa a un interval que pot ser massa petit pels nostres interessos. D'altra banda, les derivades successives poden resultar de càlcul onerosos.

Un mètode molt utilitzat és el de la interpolació. Ja des de les primeres taules de funcions trigonomètriques o de logaritmes, que només donaven els valors (aproximat!) de les funcions a un seguit de punts més o menys espaiats, s'havia d'interpol·lar per donar valors aproximats als punts que no apareixien a la taula. Aquesta interpolació sol ser lineal: si  $x$  era entre els punts consecutius  $x_0$  i  $x_1$  amb valors tabulats de la funció, és a dir, si  $x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1$ , amb  $\lambda \in (0, 1)$ , es pren  $f(x) = \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(x_1)$ . També es poden utilitzar mètodes d'interpolació més refinats, com els que estudiarem a continuació, que permeten millors aproximacions amb les mateixes taules, o bé iguals aproximacions amb taules més curtes.

Certament els ordinadors digitals han substituït les taules de valors de funcions, però no deixa de ser cert que també han d'avaluar funcions numèricament, i això ho han de fer per sèries de Taylor, per interpolació, o per qualsevol dels mètodes existents, i que repassarem en aquest capítol. Començarem donant la base teòrica que suporta alguns d'aquests mètodes.

## 7.3 Interpolació polinomial

Un dels mètodes d'aproximació que salta al pensament com a natural és utilitzar un polinomi per a substituir la funció si és que podem fer que ens doni valors prou aproximats. I una manera que sembla natural d'aconseguir-ho és fer que el polinomi prengui els mateixos valors que la funció en un número finit de punts al domini de definició desitjat.

Així, si tenim  $n + 1$  punts diferents  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  a  $\mathbb{R}$ , i una funció  $f$ , podem intentar trobar un polinomi  $P$  tal que  $P(x_i) = f(x_i)$  per a  $i = 0, 1, \dots, n$ , i esperar que als punts d'un interval  $I$  contenint aquests punts, l'aproximació donada pel polinomi sigui satisfactòria. Veiem immediatament que l'aproximació obtinguda dependrà de la distribució d'aquests punts i del grau del polinomi  $P$ . Resulta, però, que el grau de  $P$  ens queda forçat si volem que existeixi i que sigui únic. Efectivament, en general no podrem trobar un polinomi de grau  $< n$  que respecti els valors de la funció a tots els punts, i, per altra banda, n'hi haurà una infinitat de grau  $> n$  que ho facin.

Tenim el següent teorema:

En les condicions anteriors, és a dir, si tenim  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , i els valors  $f(x_i)$ , llavors existeix un únic polinomi de grau  $n$  tal que  $P(x_i) = f(x_i)$ .

D'aquest polinomi, en direm el *polinomi interpolador de la funció  $f$*  als punts  $x_i$ .

La demostració d'això és la següent:

Si  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , llavors els coeficients  $a_i$  han de satisfer el sistema de  $n + 1$  equacions lineals:

$$a_0 + a_1x_i + \dots + a_nx_i^n = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Aquest sistema tindrà solució única si i sols si el determinant de la matriu del sistema

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

és diferent de zero.

Aquest és el conegut *determinant de Vandermonde*, i el següent argument mostra que és diferent de zero, si tal com hem suposat,  $x_i \neq x_j$  per a  $i \neq j$ .

Prenem la funció  $\phi$  de  $x$  definida per

$$\phi(x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x).$$

Certament  $\phi$  és un polinomi de grau  $n$  en  $x$ , i s'anul·la a  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  (ja que el determinant tindrà dues fileres iguals). Per tant

$$\phi(z) = a(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}),$$

amb  $a$  dependent de  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ .

Desenvolupant el determinant  $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x)$  per menors respecte de la darrera filera, tenim que el coeficient de  $x^n$  és precisament  $V(x_0, \dots, x_{n-1})$ , i que, per tant,

$$\phi(x) = V(x_0, \dots, x_{n-1})(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}),$$

o sigui que

$$V(x_0, \dots, x_n) = V(x_0, \dots, x_{n-1})(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

Com que  $V(x_0, x_1) = x_1 - x_0$ , tenim inductivament

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{i>j}^n (x_i - x_j),$$

que és diferent de 0 si  $x_i$  i  $x_j$  són diferents per a  $i$  i  $j$  diferents.

## 7.4 L'error a la interpolació polinomial

Per avaluar l'error comès en prendre el valor del polinomi interpolador en lloc de la funció  $f$ , utilitzarem el teorema de Taylor.

Sigui  $P_n$  el polinomi interpolador de grau  $n$  corresponent als punts  $x_0, \dots, x_n$  amb  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  com abans.

Tenim llavors que l'error comès en prendre el valor de  $P_n(x)$  en lloc de  $f(x)$  al punt  $x$  és 0 si  $x = x_0, \dots, x_n$ , i si no, ve donat per

$$E(x) := f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n),$$

on  $\xi$  és un punt del mínim interval  $I$  que conté els punts  $x_0, x_1, \dots, x_n$  i  $x$ .

Per veure que això és així prenem la funció

$$\phi(y) = f(y) - P_n(y) - (f(x) - P_n(x)) \frac{(y - x_0) \dots (y - x_n)}{(x - x_0) \dots (x - x_n)},$$

on  $x \neq x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  és fixa.

Resulta que  $\phi(x_i) = 0$ ,  $i = 0, \dots, n$ , i també  $\phi(x) = 0$ . En anullar-se a  $n + 2$  punts diferents resulta, pel teorema de Rolle, que la seva derivada  $\phi'$  s'anulla almenys a  $n + 1$  punts diferents, intermedis a valors consecutius dels  $x_i$  i  $x$ . Repetint l'argument, resulta que  $\phi''$  té almenys  $n$  zeros diferents, un almenys a cada un dels  $n$  intervals definits pels zeros de  $\phi'$ . Si repetim l'argument successivament, resulta que existeix almenys un punt  $\xi \in I$  en el qual  $\phi^{(n+1)}(\xi) = 0$ .

Per altra banda, derivant directament  $\phi$  respecte de  $y$ , tenim

$$\phi^{(n+1)}(y) = f^{(n+1)}(y) - (f(x) - P_n(x)) \frac{(n+1)!}{(x - x_0) \dots (x - x_n)},$$

on hem tingut en compte que  $P^{(n+1)}$  és idènticament 0.

D'aquí se segueix, prenent  $y = \xi$ , que

$$(x - x_0) \dots (x - x_n) f^{(n+1)}(\xi) = (n+1)! (f(x) - P_n(x)),$$

i dividint els dos membres per  $(n+1)!$  obtenim l'expressió de l'error cercada.

D'aquí tenim que per a qualsevol  $x \in I$ ,  $|E(x)| \leq \sup_{\xi \in I} |f^{(n+1)}(\xi)| M / (n+1)!$ , on  $M = \sup_{x \in I} |(x-x_0) \dots (x-x_n)|$ .

De la fórmula veiem que dos factors són fonamentals per acotar l'error. L'un és la derivada d'ordre  $n+1$  al punt  $\xi$ , que, com que no sabem on es troba a l'interval  $I$ , hem d'acotar-la pel suprem de  $|f^{(n+1)}(\xi)|$  a  $I$ . Aquest valor pot créixer molt amb  $n$ . L'altre factor,  $M$ , depèn de com escollim els punts  $x_i$  a l'interval  $I$ , i notem que si  $x_n - x_0 < 1$ , tendirà a 0 quan  $n$  tendeixi a  $\infty$ , però no ho farà si  $x_n - x_0 > 1$ .

Si escollim els punts equidistants amb  $I = [a, b]$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ , tenim les fórmules de més fàcil aplicació, però pot passar que  $M$  no tendeixi a 0 quan  $n$  tendeix a  $\infty$ . No només això, sinó que efectivament l'error es vagi fent més gros a mesura que  $n$  augmenta. I això fins i tot en el cas de funcions analítiques no enteres. D'aquest fet, conegut com a *fenomen de Runge*, en donem un exemple a l'apèndix.

## 7.5 Fórmules d'interpolació de Newton i Lagrange

Encara que donada una funció  $f$  i  $n+1$  punts, el polinomi interpolador  $P_n$  de grau  $n$  o menor és únic, la manera d'expressar-lo pot ser diversa. En aquesta secció donarem les *fórmules de Newton i de Lagrange* per aquest polinomi, que ens seran útils per als càlculs que farem per a mostrar el fenomen de Runge i també per als càlculs numèrics.

Una manera de trobar  $P_n$  que interpola  $f$  als punts  $x_0, x_1, \dots, x_n$  és fer-ho recursivament mitjançant l'esquema

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= f(x_0) \\ Q_k(x) &= Q_{k-1}(x) + R_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

on el grau de  $R_k$  és  $k$  (o més petit si es dóna aquesta casualitat): per a determinar  $R_k$  utilitzem les condicions d'interpolació

$$\begin{aligned} Q_k(x_j) &= f(x_j) = Q_{k-1}(x_j), \quad j = 0, \dots, k-1, \quad i, \\ Q_k(x_k) &= f(x_k). \end{aligned}$$

El que anem fent, doncs, és, una vegada donats els punts  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , començar amb  $Q_0$  que és una constant (polinomi de grau 0) igual a  $f(x_0)$ , després  $Q_1$  és un polinomi de grau 1 tal que  $Q_1(x_0) = f(x_0)$  i  $Q_1(x_1) = f(x_1)$ , després  $Q_2$  de grau 2, tal que  $Q_2(x_0) = f(x_0)$ ,  $Q_2(x_1) = f(x_1)$ ,  $Q_2(x_2) = f(x_2)$ , etc., i així fins arribar a  $Q_n$  que serà de grau  $n$  i complirà  $Q_n(x_0) = f(x_0)$ ,  $Q_n(x_1) = f(x_1), \dots, Q_n(x_n) = f(x_n)$ , i que serà, per tant, el polinomi interpolador  $P_n$  buscat.



Tenim que  $R_k$  és de la forma

$$R_k(x) = a_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

ja que s'ha d'anul·lar per a  $x = x_j$ ,  $j = 0, \dots, k-1$ .

Per a trobar els coeficients  $a_k$  fem servir  $f(x_k) = Q_k(x_k)$ , d'on

$$a_k \prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j) = f(x_k) - Q_{k-1}(x_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Utilitzant això recursivament, començant amb  $Q_0(x) = f(x_0) = a_0$ , tenim

$$Q_n(x) = P_n(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + \dots + \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)a_n.$$

El coeficient  $a_k$  s'anomena la *diferència dividida d'ordre k* i se sol denotar per  $a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ . L'expressió obtinguda per a  $P_n$  és la *fórmula d'interpolació per a diferències dividides de Newton*. D'una manera més explícita podem calcular aquestes diferències dividides fent servir la *fórmula d'interpolació de Lagrange*, que surt d'escriure  $P_n$  en la forma  $P_n(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x)f(x_j)$ , amb  $L_j$  polinomis de grau  $n$ . Com que s'ha de complir  $P_n(x_j) = f(x_j)$ , resulta que

$$L_j(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k \\ 0, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

D'aquí que

$$L_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

i, per tant

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Com que el coeficient de  $x^n$  és  $a_n$ , ens queda

$$a_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)}.$$

Notem que qualsevol permutació de les  $x_k$ 's preserva el valor de  $a_n$ .

Es pot comprovar a partir de la definició anterior (exercici) la important igualtat

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] - f[x_1, x_2, \dots, x_k]}{x_0 - x_k},$$

$k = 1, \dots, n$ , cosa que justifica el nom de diferències dividides que es dona a aquests coeficients. Amb aquesta darrera fórmula podem anar calculant aquestes diferències dividides d'una manera recursiva començant amb  $f[x_k] = f(x_k)$ .

També podem obtenir una nova expressió en termes de diferències dividides per a l'error de la interpolació a un punt  $x$ . Per això considerem  $x$  com un punt més d'interpolació,  $x_{n+1}$ , i apliquem les fórmules anteriors.

Si  $R$  és el polinomi de grau màxim  $n + 1$  definit per

$$R(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{k=0}^n (x - x_k),$$

llavors

$$f(x) = P_n(x) + R(x),$$

i per tant

$$f(x) - P_n(x) = R(x),$$

que ens dona la fórmula de l'error buscada.

Comparant amb la fórmula trobada anteriorment queda que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

per a alguna  $\xi$  a l'interval més petit que contingui  $x_0, x_1, \dots, x_n$  i  $x$ .

## 7.6 Interpolació de Txeixev

Suposem que volem trobar la distribució dels punts  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  a l'interval  $I = [-1, 1]$  que minimitzi  $M = \sup_{x \in I} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|$ . Noteu que no demanem que  $x_0 = -1$  ni que  $x_n = 1$ .

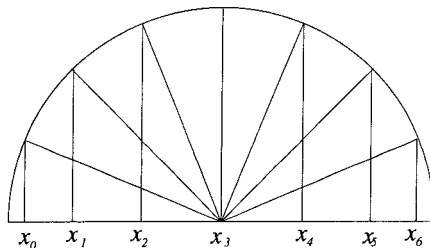
Es tracta, doncs, de trobar un polinomi mònic (és a dir amb el coeficient del terme de grau màxim igual a 1) de grau  $n + 1$  que s'anulli a aquests  $n + 1$  punts, i tal que el màxim del seu valor absolut a  $[-1, 1]$  sigui el més petit d'entre tots els polinomis mòncics de grau  $n + 1$ .

Aquests polinomis són els anomenats *polinomis de Txeixev* multiplicats per una constant per fer-los mòncics.

El polinomi de Txeixev d'ordre  $n$ , que denotem per  $T_n$ , té els seus zeros als punts

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Observem que aquests punts corresponen a la projecció sobre l'interval  $[-1, 1]$  de punts equidistants a la circumferència que té aquest interval per diàmetre. Vegeu la figura, que mostra la situació per a  $n = 7$ .



Aquí l'angle  $\alpha$  entre dos punts consecutius de la circumferència és igual a  $\pi/n$ , i els dels extrems valen la meitat.

Resulta que el polinomi  $T_n$  ve donat per  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ .

Que aquesta funció és un polinomi de grau  $n$  en  $x$  se segueix de la fórmula trigonomètrica

$$\cos(n+1)\phi + \cos(n-1)\phi = 2 \cos \phi \cos n\phi, \quad n \geq 1,$$

d'on obtenim per recurrència  $\cos n\phi$  com a polinomi en  $\cos \phi$ :

$$\cos 2\phi = 2 \cos^2 \phi - 1$$

$$\cos 3\phi = 2 \cos \phi \cos 2\phi - \cos \phi = 4 \cos^3 \phi - 3 \cos \phi, \text{ etc.}$$

I ara, si posem  $\cos \phi = x$ , és a dir  $\phi = \arccos x$ , a l'expressió de  $\cos n\phi$  obtenim el polinomi  $T_n(x)$ .

Que aquest polinomi és el que s'anulla als punts  $x_k$  se segueix de la substitució directa:

$$T_n(x_k) = \cos \left( n \frac{2k+1}{2n} \pi \right) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

De les fórmules trigonomètriques anteriors, tenim que els polinomis de Txebixev es poden obtenir per les fórmules recursives

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

El coeficient del terme de grau  $n$  és  $2^{n-1}$ . Per tant, per a obtenir un polinomi mònic hem de dividir  $T_n$  per  $2^{n-1}$ .

Dèiem en començar la secció que el polinomi  $T_n/2^{n-1}$  és, de tots els polinomis mòncics de grau  $n$ , el que té el valor absolut màxim més petit a l'interval  $[-1, 1]$ . Efectivament,  $T_n$  val 1 o  $-1$  als  $n+1$  punts de  $[-1, 1]$  on  $n \arccos x$  és igual a un múltiple de  $\pi$ . Aquests punts són, diguem,  $-1 = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_n = 1$ , i els valors  $-1$  i  $1$  es van alternant, fins arribar a  $T_n(1) = 1$ . Per tant, si  $P_n$  és un polinomi tal que  $|P_n(x)| < 1/2^{n-1}$  per a  $x \in [-1, 1]$ , resulta que el polinomi  $T_n(x'_k)/2^{n-1} - P_n(x'_k)$  és positiu per a  $k = n$ , i va alternant-se de signe a cada  $x'_k$  a mesura que  $k$  va disminuint fins arribar a 0. Aquest polinomi és de grau menor que  $n$ , perquè els dos termes són mòncics, i resulta que canvia de signe  $n$  vegades, és a dir, s'anulla  $n$  vegades. Això és impossible, i per tant

un polinomi  $P_n$  amb aquestes característiques no existeix, és a dir, no hi ha cap polinomi mònic que sigui més petit que  $1/2^{n-1}$  en valor absolut a tots els punts de  $[-1, 1]$ , i si és més petit o igual, llavors és precisament  $T_n/2^{n-1}$ .

Per fer una interpolació en un interval diferent de  $[-1, 1]$ , diguem a  $[a, b]$ , haurem de prendre els punts d'interpolació  $y_k = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)x_k$ , que correspon a una distribució dels punts  $y_k$  a l'interval  $[a, b]$  proporcional a la dels punts  $x_k$  a l'interval  $[-1, 1]$ . D'aquesta interpolació en direm *interpolació de Txebixev* a l'interval  $[a, b]$ . Resulta (no ho demostrarem), que si la funció  $f$  té derivades de 2on ordre contínues a  $I$ , llavors la interpolació de Txebixev dóna polinomis  $P_n$  que tendeixen uniformement a  $f$  a  $I$  quan  $n \rightarrow \infty$ .

## 7.7 Interpolació polinomial a la pràctica

A la pràctica ens trobem amb dues variants del problema de la interpolació polinomial. Per una banda podem estar interessats a trobar el polinomi interpolador, és a dir, a calcular-ne els coeficients. Per una altra podem estar interessats a calcular el valor de  $P_n(x)$  per a una  $x$  particular, sense ocupar-nos gens d'explicitar quins són els coeficients de  $P_n$ .

Si el que volem és conèixer els coeficients de  $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  que compleix  $P_n(x_k) = f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , podem procedir directament resolent el sistema de  $n+1$  equacions lineals expressades en la darrera igualtat, tal com hem fet per a demostrar l'existència i la unicitat d'aquest polinomi interpolador a la secció 3. Si tenim un ordinador prou potent, no hi haurà cap problema a resoldre aquest sistema si  $n$  no és massa gran.

Una vegada conegut el polinomi, podem avaluar-lo a qualsevol punt  $x$  que ens interessi. Una manera pràctica de fer-ho recursivament és utilitzar *la regla de Horner*, que consisteix a fer les operacions en l'ordre indicat pels parèntesis en la següent fórmula

$$P_n(x) = (\dots((a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots)x + a_0.$$

El *mètode de Lagrange* també s'empra per a calcular els coeficients del polinomi interpolador. Efectivament, recordem que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x)f(x_k), \quad \text{amb}$$

$$L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Per tal de calcular  $P_n$  aquí ens convé tenir un programa de manipulació algebraica al nostre ordinador. Si utilitzem un valor precís per a  $x$ , llavors aquest procediment ens dóna prou fàcilment el valor de  $P_n(x)$ . Calculant amb el mètode de Lagrange estalviem temps d'ordinador, respecte al procediment anterior de resoldre el sistema d'equacions.



Resulta que

$$P_{0,\dots,k-1,k}(x) = \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \det \begin{pmatrix} P_{0,\dots,k-2,k-1}(x) & x_{k-1} - x \\ P_{0,\dots,k-2,k}(x) & x_k - x \end{pmatrix},$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Això es demostra veient per inducció que per a  $k = n$ , l'expressió de la dreta coincideix amb  $f(x)$  als punts d'interpolació  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , i per la unicitat del polinomi interpolador, ha de ser  $P_{0,\dots,n}$ .

Una disposició apropiada en una taula permet organitzar els càlculs de la interpolació d'Aitken:

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & f_0 = P_0 & & & & & x_0 - x \\ x_1 & f_1 = P_1 & \boxed{P_{01}} & & & & \boxed{x_1 - x} \\ x_2 & f_2 = P_2 & P_{02} & P_{012} & & & x_2 - x \\ x_3 & f_3 = P_3 & \boxed{P_{03}} & \boxed{P_{013}} & P_{0123} & & \boxed{x_3 - x} \\ & \vdots & & & & & \end{array}$$

La taula es prepara posant els valors de  $x_k, f(x_k) = f_k$  i  $x_k - x$  en columnes. Els termes de les columnes posteriors es van calculant recursivament segons la fórmula anterior. Per exemple

$$P_{013} = \frac{P_{01}(x_3 - x) - P_{03}(x_1 - x)}{x_3 - x_1}.$$

Aquest mètode té l'avantatge que si cal es poden anar afegint punts d'interpolació  $x_k$  si amb els que hem pres inicialment els valors no s'estabilitzen.

El mètode de Neville s'assembla a l'anterior. La taula corresponent és

$$\begin{array}{ccccccc} x - x_0 & f_0 = P_0 & & & & & \\ & & P_{01} & & & & \\ \boxed{x - x_1} & f_1 = P_1 & & P_{012} & & & \\ & & \boxed{P_{12}} & & & & P_{0123} \\ x - x_2 & f_2 = P_2 & & & \boxed{P_{123}} & & \\ & & \boxed{P_{23}} & & & & \\ \boxed{x - x_3} & f_3 = P_3 & & & & & \end{array}$$

on, per exemple,

$$P_{123} = \frac{P_{23}(x - x_1) - P_{12}(x - x_3)}{x_3 - x_1}.$$

## 7.8 Interpolació amb “splines”

En anglès s'anomena “*spline*” (es pronuncia “*splain*”), un regle deformable que es pot ajustar a les corbes per a poder-les dibuixar. En teoria de la interpolació, donats els valors de  $f$  als punts  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , anomenem *spline* una

funció interpoladora, (és a dir que compleix  $s(x_k) = f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ) que té derivades contínues fins a ordre  $m - 1$  (és a dir, pertany a la classe  $C^{m-1}$ ) a l'interval  $[x_0, x_n]$ , i que a cada interval  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, \dots, n$ , és un polinomi de grau  $m$ . És a dir, el que fem és aproximar la funció  $f$  mitjançant una funció que és polinomial a cada subinterval  $[x_{k-1}, x_k]$  (generalment un polinomi diferent a cada un d'aquests subintervals) i de manera que a cada  $x_k$ , el polinomi de l'esquerra i de la dreta s'acoblen de manera que coincideixen els seus valors i els de totes les seves derivades fins a l'ordre  $m - 1$ .

L'exemple més senzill d'un *spline*, que no sol rebre aquest nom, és la interpolació lineal a trossos que s'ha utilitzat tradicionalment per a interpolar les taules de logaritmes i de funcions trigonomètriques. És un *spline* amb  $m = 1$ , és a dir, tenim a cada subinterval un polinomi de grau 1 (lineal), amb valors coincidint a cada  $x_k$ , encara que les derivades primeres no hi coincideixen.

Per tal que  $s$  quedi definida de manera única hem d'imposar també unes condicions als extrems  $x_0$  i  $x_n$ . De fet, per a cada un dels  $n$  intervals  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ , necessitem determinar els  $m + 1$  coeficients dels polinomis, és a dir,  $n(m + 1)$  números en total. Les condicions que s'han de complir són les  $n + 1$  d'interpolació:  $s(x_k) = f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , i les  $(n - 1)m$  d'acoblament de derivades. En total  $nm - m + n + 1 = n(m + 1) - (m - 1)$ . Per tant ens calen encara  $m - 1$  condicions, que hem de donar als extrems.

Els *splines* més utilitzats són els *splines cúbics*, amb  $m = 3$ , i d'entre aquests els *splines cúbics naturals*, on es pren  $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$ , que són les dues condicions que mancaven per determinar l'*spline* de manera única.

L'error comès en interpolar amb *splines* s'obté mitjançant una fórmula on entren les derivades d'ordre  $m - 1$  (*fórmules de Peano*), que s'escapen a l'abast de la nostra exposició. Resulta que els *splines* cúbics naturals minimitzen les cotes de Peano per als errors.

Per tal d'obtenir els coeficients dels polinomis de  $s$  en un *spline* cúbic s'ha de resoldre un sistema d'equacions lineals amb matriu *tridiagonal*, i això es pot fer amb l'ajut d'un ordinador sense gaire feina. No entrarem en detalls sobre aquests procediments, que es troben especificats als llibres de càlcul numèric.

La interpolació amb *splines* s'utilitza força darrerament, ja que s'ajusta sense perill d'oscil·lacions a les funcions, encara que els punts d'interpolació siguin espaiats uniformement, i perquè es presten al càlcul de solucions d'equacions diferencials ordinàries.

Per acabar, fem notar que també s'utilitzen funcions racionals per interpolar funcions que no són acotades a l'entorn d'algun punt, i que per tant no són aproximables amb polinomis. Per aquesta mateixa raó s'utilitzen funcions exponencials per a interpolar funcions definides a intervals del tipus  $[a, \infty)$ . En fi, direm que el mot *extrapolació* es reserva pel cas que  $x \notin [x_0, \dots, x_n]$ . ( $[x_0, \dots, x_n]$  és el mínim interval tancat que conté  $x_0, \dots, x_n$ ). Els mètodes d'extrapolació són els mateixos que hem estudiat sota el nom d'interpolació. De fet, fixem-nos que no hem demanat gairebé mai que  $x$  sigui a l'interval determinat per  $x_0, \dots, x_n$ .

## 7.9 Combinacions lineals de vectors i de funcions

Dedicarem aquesta secció a algunes nocions d'àlgebra lineal, que necessitem per a la secció següent. De fet, ja pressuposem que el lector en té alguns coneixements, i el que fem realment és posar-nos d'acord sobre la notació i recordar algunes propietats fonamentals. Al capítol 8, on tractem de funcions de diverses variables, ja tractarem de les nocions menys algebraïques dels espais de dimensió  $n$ .

Entenem per *vector (real) de dimensió  $n$*  qualsevol col·lecció ordenada de  $n$  números reals. Així, si  $x_1, \dots, x_n$  pertanyen a  $\mathbb{R}$ , denotem per  $(x_1, \dots, x_n)$  el vector  $\xi$ , i a cada  $x_k$  l'anomenem una *component* de  $\xi$ .

El conjunt dels  $n$ -vectors reals, el denotarem per  $\mathbb{R}^n$ .

Els vectors se sumen component a component; si  $\xi = (x_1, \dots, x_n)$  i  $\eta = (y_1, \dots, y_n)$ , llavors  $\xi + \eta$  es defineix com  $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ . També es multiplica un vector per un número real (en l'àmbit dels vectors, els reals s'acostumen a anomenar *escalars*), multiplicant per aquest número cada component:  $a\xi = (ax_1, \dots, ax_n)$ .

Fent servir aquestes operacions podem parlar de *combinacions lineals de vectors*, que vol dir una suma de diversos vectors multiplicats per escalars. Així, si  $\xi_1, \dots, \xi_m$  són  $m$  vectors de dimensió  $n$  ( *$n$ -vectors*, en direm de vegades), una combinació lineal d'ells és la suma  $a_1\xi_1 + \dots + a_m\xi_m$ .

Es diu que els vectors  $\xi_1, \dots, \xi_m$  són *linealment dependents* si existeixen escalars  $a_1, \dots, a_m$ , no tots zero, tals, que  $a_1\xi_1 + \dots + a_m\xi_m = 0$ . Si no ho són, diem que són *linealment independents*.

Cada  $n$ -vector es pot expressar de manera única com a combinació lineal dels  $n$ -vectors  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ . De fet tenim que  $\xi = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ .

Fem notar que a  $\mathbb{R}^n$  no pot haver-hi més de  $n$  vectors linealment independents, i que qualsevol conjunt de  $n$  vectors linealment independents forma una *base*, és a dir, qualsevol vector de  $\mathbb{R}^n$  és expressable de manera única com a combinació lineal dels vectors que la constitueixen. Els vectors  $e_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  formen una base de  $\mathbb{R}^n$ . Remetem el lector a qualsevol llibre d'àlgebra lineal si vol trobar la prova d'aquestes afirmacions.

L'altre concepte que volem definir és el d'ortogonalitat de vectors. Per això definim el *producte escalar* o *producte intern* dels dos  $n$ -vectors  $\xi$  i  $\eta$  per  $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k$ . I diem que  $\xi$  i  $\eta$  són *ortogonals* si  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ .

Tenim, per exemple, que  $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$ , on  $\delta_{jk}$ , que s'anomena la *delta de Kronecker*, és 0 si  $j \neq k$  i 1 si  $j = k$ .

Si dos vectors  $\xi$ ,  $\eta$  són ortogonals, és a dir  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ , llavors val el *Teorema de Pitàgores*, que diu que  $\langle \xi + \eta, \xi + \eta \rangle = \langle \xi, \xi \rangle + \langle \eta, \eta \rangle$ . (Això també ho escriurem  $|\xi + \eta|^2 = |\xi|^2 + |\eta|^2$ , on a  $|\xi|$  l'anomenem la *norma* de  $\xi$ ).

Efectivament, tenim

$$\langle \xi + \eta, \xi + \eta \rangle = \langle \xi, \xi \rangle + 2\langle \xi, \eta \rangle + \langle \eta, \eta \rangle,$$



com es pot comprovar directament aplicant la definició de producte escalar, o bé fent servir les propietats de linealitat, distributivitat i simetria d'aquest producte. Com que  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ , ens queda la igualtat desitjada.

El concepte de combinació lineal i d'ortogonalitat s'estén a col·leccions de funcions. Si tenim funcions contínues a trossos a l'interval  $[a, b]$ , tenim definida la seva suma i el seu producte per un número real, i per tant podem definir combinacions lineals de funcions:

$$a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n,$$

que també seran contínues a trossos.

D'una manera anàloga a com ho hem fet amb els  $n$ -vectors, diem que  $\phi_1, \dots, \phi_n$  són linealment independents si  $a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n = 0$  (la funció que val 0 a cada punt de  $[a, b]$ ), implica  $a_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

En aquest cas no resulta tan senzill trobar una col·lecció de funcions, on mitjançant les seves combinacions lineals ens donin totes les funcions  $f$ . Al capítol 6 hem vist com utilitzant les funcions  $x^k$  o  $\sin kx$ ,  $\cos kx$ , podem intentar, mitjançant combinacions lineals d'elles, expressar les funcions  $f$  contínues a trossos a un interval. Resulta que hem de prendre combinacions lineals infinites, és a dir de la forma  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ , o bé  $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \sin kx + b_k \cos kx)$ , i encara així resulta que les sèries que en resulten per a cada valor de  $x$ , poden convergir o no a les funcions que volem. Ja hem vist al capítol anterior que les primeres, anomenades sèries de potències, només convergeixen a un interval si  $f$  és una funció analítica, i la segona, als punts on  $f$ ,  $2\pi$ -periòdica, és contínua.

Podem definir el *producte escalar* o *producte intern* entre dues funcions, mitjançant la fórmula

$$(f, g) = \int_a^b fg,$$

i, anàlogament a com ho hem fet amb vectors, diem que  $f$  i  $g$  són *ortogonals* si  $(f, g) = 0$ . Aquesta definició d'ortogonalitat de funcions ja ha estat utilitzada en tractar de sèries de Fourier i de la desigualtat de Bessel al capítol anterior, i la farem servir en aquest capítol per a tractar l'aproximació de mínims quadrats i la integració numèrica de Gauss, amb polinomis ortogonals.

Si tenim funcions  $f$  i  $g$  ortogonals, perquè llavors

$$\int |f + g|^2 = \int f^2 + 2(f, g) + \int g^2 = \int f^2 + \int g^2.$$

Això també ho podem escriure  $|f + g|^2 = |f|^2 + |g|^2$ , i a  $|f|$  l'anomenem la *norma de f*.

## 7.10 Aproximació de mínims quadrats. Cas discret

Suposem que tenim una col·lecció finita de valors reals,  $f(x_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , que correspon o bé a mesures experimentals o bé als valors d'una certa funció

$f$  al conjunt de punts  $\{x_k\}$ . Volem ara obtenir una funció  $\phi$ , que sigui fàcil de calcular, i que als punts  $x_k$  prengui valors que aproximïn convenientment a  $f(x_k)$ . Per exemple podem voler que  $\phi$  sigui un polinomi que no passi de cert grau, diguem  $m$ , o bé un polinomi trigonomètric com els dels desenvolupaments de Fourier, en què els termes en  $\sin kx$  o  $\cos kx$  tinguin  $k \leq m$ .

El criteri d'aproximació podria ser el de trobar  $\phi$  d'entre les funcions permeses, de manera de minimitzar el valor màxim de  $|f(x_k) - \phi(x_k)|$  per a  $k = 1, \dots, n$  o bé de minimitzar  $\sum_{k=1}^m |f(x_k) - \phi(x_k)|$ . Aquests criteris resulten de difícil aplicació matemàtica, i el que se sol fer és trobar  $\phi$  de manera que el que sigui mínim sigui  $\sum_{k=1}^m |f(x_k) - \phi(x_k)|^2$ . Aquesta aproximació es coneix amb el nom d'*aproximació de mínims quadrats*, i el que fa és minimitzar la norma de  $f - \phi$ .

Tot i no essent ben bé equivalent a cap dels dos anteriors, el que és cert és que si la darrera suma és petita, llavors també ho és cada una de les expressions anteriors.

La tècnica matemàtica que fa convenient el criteri de mínims quadrats és la d'utilitzar les combinacions lineals de vectors i el concepte d'ortogonalitat de vectors.

El que fem és prendre una col·lecció  $\{\phi_j\}$ ,  $j = 0, \dots, m$  de funcions amb la propietat que els vectors  $\Phi_j = (\phi_j(x_1), \dots, \phi_j(x_n))$ ,  $j = 0, \dots, m$ , siguin linealment independents. Recordem que això vol dir que si  $\sum_{k=0}^m \alpha_j \Phi_j = 0$ , llavors necessàriament  $\alpha_j = 0$ ,  $j = 0, \dots, m$ . Ara prenem com a col·lecció de funcions permeses per fer l'aproximació dels valors  $f(x_k)$  als punts  $x_k$ , totes les combinacions lineals de les funcions  $\{\phi_j\}$ , és a dir, les funcions  $\phi$  de la forma

$$\phi = \sum_{j=0}^m \lambda_j \phi_j.$$

El que hem d'aconseguir, doncs, és trobar les  $\lambda_j$ ,  $j = 0, \dots, m$  de manera que  $\sum_{k=0}^m |f(x_k) - \phi(x_k)|^2$  sigui mínim. Recordem que, aquesta expressió, la denotem per  $(f(x_k) - \phi(x_k))^2$ .

Primer escollim  $\lambda_j$ ,  $j = 0, \dots, m$  de manera que el  $n$ -vector  $(f(x_k) - \sum_{j=0}^m \lambda_j \phi_j(x_k))$  sigui ortogonal a cada  $n$ -vector  $(\phi_j(x_k))$  (recordem que  $(y_k)$  representa el vector  $(y_1, \dots, y_n)$ ). Això és equivalent a resoldre el sistema d'equacions lineals

$$\langle (f(x_k) - \sum_j \lambda_j \phi_j(x_k)), (\phi_i(x_k)) \rangle = 0, \quad i = 0, \dots, m,$$

on recordem que  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ . Fent ús de la distributivitat i la commutativitat, podem escriure'l com

$$\langle (f(x_k)), (\phi_i(x_k)) \rangle = \sum_{j=0}^m \langle \phi_i(x_k), \phi_j(x_k) \rangle \lambda_j, \quad i = 0, \dots, m.$$

Aquest sistema tindrà solució única si  $\det(\langle (\phi_i(x_k)), (\phi_j(x_k)) \rangle) \neq 0$ .

En el cas que prenguéssim  $\phi_j(x) = x^j$ , ja hem vist a la secció 2 d'aquest capítol que això és així si  $x_k \neq x_l$  per a  $k \neq l$ . Per a altres col·leccions  $\{\phi_j\}$  haurem de comprovar aquesta propietat. Ara bé, si hem escollit  $\phi_j$  de manera que formin un sistema ortogonal, és a dir, que  $\langle(\phi_j(x_k)), (\phi_i(x_k))\rangle = 0$  si  $i \neq j$ , i diferent de 0 si  $i = j$ , llavors el sistema d'equacions se simplifica fins a quedar

$$\langle(f(x_k)), (\phi_j(x_k))\rangle = \langle(\phi_j(x_k)), (\phi_j(x_k))\rangle \lambda_j, \quad j = 0, \dots, m.$$

Una vegada hem determinat les  $\lambda_j$  d'aquesta manera, llavors tenim que per a qualsevol combinació lineal de les  $\phi_j$ , diguem  $\sum_j \alpha_j \phi_j(x_k)$ , es compleix

$$f(x_k) - \sum_j \alpha_j \phi_j(x_k) = \sum_j (\lambda_j - \alpha_j) \phi_j(x_k) + f(x_k) - \sum_j \lambda_j \phi_j(x_k).$$

Aplicant ara el teorema de Pitàgores, resulta

$$(f(x_k) - \sum_j \alpha_j \phi_j(x_k))^2 = (\sum_j (\lambda_j - \alpha_j) \phi_j(x_k))^2 + (f(x_k) - \sum_j \lambda_j \phi_j(x_k))^2.$$

Com que tots els termes són no-negatius, això serà mínim quan  $\alpha_j = \lambda_j$ , per a  $j = 0, \dots, m$ . És a dir, la combinació lineal que ens minimitza és precisament  $\sum_j \lambda_j \phi_j$ , la que fa ortogonal a totes les  $\phi_j$  la seva diferència amb  $f$ .

Fem un exemple, el més senzill, prenent 5 valors per a  $x_k$  i  $f(x_k)$  segons la següent taula

$x_k$	1	3	7	9	11
$f(x_k)$	1.5	3	5.5	5.5	7

Suposem que volem aproximar amb un polinomi de primer grau: és a dir  $\phi_0(x) = 1$ ,  $\phi_1 = x$ , diguem (podríem escollir altres polinomis de grau 0 a 1).

Fent els càlculs resulta:

$$\begin{aligned} \langle(f(x_k)), (\phi_0(x_k))\rangle &= 22.5 \\ \langle(f(x_k)), (\phi_1(x_k))\rangle &= 175.5. \end{aligned}$$

I obtenim el sistema lineal

$$\begin{aligned} 5\lambda_0 + 31\lambda_1 &= 22.5 \\ 31\lambda_0 + 261\lambda_1 &= 175.5, \end{aligned}$$

d'on

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1.25581395\dots, i \\ \lambda_1 &= 0.523255814\dots. \end{aligned}$$

El mètode millora molt si s'utilitza un sistema  $\{\phi_j\}$  de funcions ortogonals. Si els punts  $x_k$  estan espaiats uniformement es fan servir els *polinomis de Gram*, que no estudiarem aquí.

## 7.11 Aproximació de mínims quadrats. Cas cor<sup>4</sup>inu

Ara el que volem és aproximar una funció  $f$  definida en un interval  $I = [a, b]$  mitjançant funcions d'una certa col·lecció, diguem polinomis o polinomis trigonomètrics de grau més petit o igual a  $m$ , com a la secció anterior, però no fixant-nos en un nombre finit de punts, sinó mesurant l'aproximació obtinguda considerant tots els punts de l'interval. Per exemple podem voler minimitzar  $\sup_{x \in I} |f(x) - \phi(x)|$ , o bé  $\int_a^b |f - \phi|$ . De manera semblant al que passa amb el cas discret, resulta que és matemàticament més senzill minimitzar, en lloc de qualsevol de les dues expressions anteriors, l'expressió  $\int_a^b |f - \phi|^2$ . La raó és que podem utilitzar, anàlogament a com ho hem fet en la secció anterior, les nocions de combinació lineal, producte escalar i ortogonalitat, però no ja amb  $n$ -vectors, sinó amb funcions.

Cal fer notar, però, que, de manera diferent al que passa en el cas discret, que  $\int_a^b |f - \phi|^2$  sigui petit no obliga que  $\sup_{x \in I} |f(x) - \phi(x)|$  ho sigui: imaginem-nos una funció que val molt poc fora d'un subinterval molt petit on pren valors molt grans. Per exemple, la funció

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{si } x \in [0, 1/n^2] \\ 0, & \text{si } x \in (1/n^2, 1] \end{cases}$$

té  $\int_0^1 f^2 = 1/n$  i certament això tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ . En canvi  $\sup_{x \in [0,1]} f(x) = \sqrt{n}$ , que tendeix a  $\infty$ .

Per altra banda, el fet que  $\int_a^b f^2$  sigui petit sí que implica que  $\int_a^b |f|$  ho sigui també, si és que  $[a, b]$  és un interval finit. I en aquest cas també és cert que el fet que  $\sup_{x \in [a,b]} |f|$  sigui petit, comporta que  $\int_a^b f^2$  també ho sigui.

Si l'interval  $[a, b]$  és infinit, llavors tenim la possibilitat que qualsevol d'aquestes expressions sigui petita, mentre les altres dues no ho són o simplement no existeixen (vegeu els exercicis al final del capítol 5).

Ja hem definit les combinacions lineals, el producte escalar i l'ortogonalitat de funcions, i hem demostrat el teorema de Pitàgoras per a dues funcions ortogonals. Recordem que  $(f, g) = \int_a^b fg$  i que  $(f)^2 = \int_a^b f^2$ .

Si volem aproximar la funció  $f$  amb combinacions lineals de les funcions  $\phi_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , cercarem, com abans, les condicions que han de complir les constants  $\lambda_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , perquè  $(f - \sum_j \lambda_j \phi_j, \phi_i) = 0$ . L'expressió de l'esquerra, fent servir la distributivitat i la commutativitat del producte escalar, ens dona

$$(f, \varphi_j) = \sum_i (\varphi_i, \varphi_j) \lambda_j, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Això és un sistema de  $m + 1$  equacions lineals, d'on podem obtenir els valors  $\lambda_j$  si el determinant del sistema,  $\det((\varphi_i, \varphi_j))$ , és diferent de 0.

Ara, si  $\sum_j \alpha_j \phi_j$  és qualsevol combinació lineal de les  $\{\phi_j\}$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , el teorema de Pitàgores ens diu que

$$\int |f - \sum_j \alpha_j \phi_j|^2 = (f - \sum_j \alpha_j \phi_j)^2 = (\sum_j (\lambda_j - \alpha_j) \phi_j)^2 + (f - \sum_j \lambda_j \phi_j)^2.$$

Això serà mínim quan  $\alpha_j = \lambda_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , ja que tots els termes són no-negatius, i per tant la funció  $\phi = \sum_j \lambda_j \phi_j$  és la que minimitza  $(f - \phi)^2$ , que és el que volíem.

Notem que si les funcions  $\phi_j$  són mútuament ortogonals, és a dir, si  $(\phi_i, \phi_j) = 0$  per a  $i \neq j$ , llavors el sistema d'equacions lineals que s'ha de resoldre per a trobar les  $\lambda_j$  se simplifica molt, i queda

$$(f, \phi_j) = (\phi_j)^2 \lambda_j.$$

## 7.12 Aproximació de mínims quadrats amb polinomis trigonomètrics

Al capítol 6 hem vist que les funcions  $\phi_j : 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$  formen una col·lecció ortogonal a l'interval  $[0, 2\pi]$ . Podem utilitzar les combinacions lineals d'aquestes funcions formant *polinomis trigonomètrics* (així els anomenem), per tal de fer l'aproximació de mínims quadrats d'una funció  $f$  definida a l'interval  $[0, 2\pi]$ .

D'acord amb el que hem vist en les seccions anteriors, aquesta aproximació d'ordre  $m$  ve donada per  $\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^m (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$ , amb

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos jx \, dx, \quad b_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin jx \, dx.$$

És a dir, l'aproximació de mínims quadrats s'obté fent servir precisament els coeficients de Fourier per a la combinació lineal de les  $\phi_j$  minimitzadora.

En el cas discret també podem fer servir els polinomis trigonomètrics i, aplicant el criteri d'aproximació de mínims quadrats, obtenim els valors dels coeficients del polinomi trigonomètric que aproxima millor. Si vol més informació el lector pot consultar la bibliografia sobre mètodes numèrics (Dahlquist o Isaacson-Keller).

## 7.13 Aproximació uniforme. Economització de sèries de potències

Si el que volem és aproximar  $f$  amb combinacions lineals de les funcions  $1, x, x^2, \dots, x^m$ , i fer-ho de manera que l'error uniforme, és a dir,  $\sup_{x \in I} |f(x) - \phi(x)|$  sigui petit sense haver de prendre  $m$  massa gran, llavors el que podem

fer és utilitzar la  *propietat de minimax*  dels  *polinomis de Txebeixev* , que ja hem estudiat a la secció 6. Aquesta propietat ens diu que la millor aproximació uniforme de  $x^n$  a l'interval  $[-1, 1]$  mitjançant un polinomi de grau més petit o igual que  $n$  és precisament la donada pel polinomi  $x^n - \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ , ja que és de grau  $\leq n-1$  i  $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$  és el polinomi mònic amb suprem més petit a  $[-1, 1]$  (de fet recordem que  $\sup_{x \in [-1, 1]} \frac{1}{2^{n-1}}|T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$ ).

Prenem ara la sèrie de Taylor centrada a 0 d'una funció  $f$  analítica, tal que el radi de convergència de la sèrie sigui igual o més gran que 1. Sabem que a mesura que incrementem el grau del polinomi de Taylor  $P_n$ , és a dir, a mesura que prenem més termes de la sèrie de Taylor, l'error tendeix uniformement a 0 (és a dir,  $\sup_{x \in I} |f(x) - P_n(x)| \rightarrow 0$ ) a qualsevol interval  $I$  tancat contingut a  $(-1, 1)$ . Les fórmules del romanent ens donen una cota de quin és aquest error. Si per fer aquest error suficientment petit hem de prendre molts termes, és a dir,  $n$  molt gran, ens pot convenir substituir el terme de grau més gran, és a dir, el terme en  $x^n$  pel polinomi  $x^n - \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ , que és de grau  $n-1$ .

Per exemple, si volem aproximar  $\cos x$  per a  $x \in [-1, 1]$ , podem prendre el polinomi de Taylor de grau 4 centrat a 0. Tenim així que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Si calculem quin és el màxim error a l'interval  $[-1, 1]$ , resulta ser de 0.042 si ens quedem amb  $1 - \frac{x^2}{2}$ , mentre que es redueix a 0.0014 si prenem  $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ . Ara bé, si volem una aproximació gairebé tan bona amb un polinomi de grau 2, substituïm  $x^4$  per  $x^4 - \frac{1}{8}T_4(x) = x^4 - \frac{1}{8}(8x^4 - 8x^2 + 1) = x^2 - \frac{1}{8}$ , amb un error màxim de  $\frac{1}{8}$ . El valor aproximat de  $\cos x$  queda, doncs,  $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}(x^2 - \frac{1}{8}) = \frac{191}{192} - \frac{11}{24}x^2$ , amb un error màxim de  $\frac{1}{8} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{192} = 0.0052$  respecte del polinomi de quart grau. Per tant el nostre error total no passa de  $0.0052 + 0.0014 = 0.0076$ , que és millor que 0.042, i només necessitem elevar  $x$  al quadrat.

Certament, a l'exemple posat sembla que l'economització no val gaire la pena. Perquè ho valgui hem de tenir que la sèrie convergeixi lentament, i llavors hem d'expressar no solament el terme de grau més gran, sinó tots aquells termes de grau gran tals que en restar-los els polinomis de Txebeixev no incrementem gaire l'error. Cal fer notar també que això es refereix a l'error uniforme, i que si volguéssim disminuir l'error en un punt particular ens podria convenir algun altre mètode.

## 7.14 Integració numèrica. Regles del rectangle i del trapezi

Una manera d'obtenir el valor aproximat d'una integral definida, diguem  $\int_a^b f$ , és aplicar directament la definició de la integral que hem donat al capítol 3, dividint la integral  $I = [a, b]$  en  $n$  subintervalls iguals mitjançant els punts

$x_k, k = 0, 1, \dots, n$ , on  $x_k = a + kh, h = \frac{b-a}{n}$ . Llavors la integral és  $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} h \sum_{k=1}^n f(x_k)$ . Prenent  $n$  prou gran podem tenir una aproximació tan gran com vulguem, però en general aquest procediment necessitarà moltes avaluacions de  $f(x_k)$ , la qual cosa pot portar un treball excessiu.

L'objecte dels mètodes numèrics d'integració consisteix a escurçar, al més possible, els càlculs per avaluar les integrals.

Una manera de millorar l'aproximació del càlcul de la integral consisteix a no prendre el valor  $f(x_k)$  als punts  $x_k$  extrems dels subintervalls en què dividim  $I$ , sinó avaluar-la als seus punts mitjans  $x_k - h/2, k = 1, \dots, n$ , perquè d'aquesta manera es compensa parcialment el que es guanya en àrea en un extrem amb el que es perd a l'altre, si la funció no té un màxim o un mínim a l'interval corresponent. Si fem això el valor de la integral queda aproximat per

$$R(h) = h \sum_{k=1}^n f\left(x_k - \frac{h}{2}\right).$$

Aquesta expressió es coneix amb el nom de *regla del rectangle*. De la fórmula de Taylor deduïm que l'error comès amb la fórmula del rectangle, si la funció  $f$  té la segona derivada contínua, val

$$\int_a^b f - R(h) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)h^2,$$

on  $\xi$  és un punt de  $(a, b)$ .

Utilitzant aquesta fórmula, per exemple, resulta que

$$\int_{-1}^1 x^2 dx - R(h) = \frac{2}{3n^2}.$$

(Notem que aquí  $f''(\xi) = 2$  per a tota  $\xi \in [a, b]$ ).

Si volguéssim una aproximació de  $10^{-5}$  hauríem de prendre  $n$  més gran de 250.

Una altra fórmula molt utilitzada és la *regla de trapezi*, que consisteix a prendre la suma de les àrees dels trapezis determinats pels punts  $x_k, x_{k+1}$  a l'eix de les abscisses i els punts de la gràfica de  $f$  corresponents a aquests punts. Això ens dona la fórmula

$$T(h) = h \left( \sum_{k=0}^n f(x_k) - \frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_n)) \right).$$

Com que en cada subinterval  $[x_{k-1}, x_k]$  el que fem és una interpolació lineal, podem utilitzar la fórmula per l'error d'interpolació que hem deduït a la secció 4 per a calcular l'error comès en cada un dels subintervalls. Resulta

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{h}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k)) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_{k-1})(x - x_k) dx,$$

on  $\xi \in [x_{k-1}, x_k]$ .

Fent servir una forma del teorema del valor mitjà del càlcul resulta que aquest error val

$$\frac{1}{2}f''(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})(x - x_k) dx, \quad \text{per a alguna } \xi_k \in (x_{k-1}, x_k),$$

i això és igual a  $f''(\xi_k)h^3/12$ .

Si ara sumem aquests errors per a tots els subintervalls, obtindrem l'error total:

$$\int_a^b f - T(h) = \frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^n f''(\xi_k) = \frac{f''(\xi)}{12} nh^3 = \frac{f''(\xi)}{12} (b-a)h^2,$$

per a alguna  $\xi \in (a, b)$ .

Observem que l'error obtingut utilitzant la regla del trapezi és més gran que l'obtingut amb la regla del rectangle. L'interès del mètode de trapezi rau en el fet que és el punt inicial de les *fórmules de Romberg*, que estudiarem a les següents seccions i que proveeixen un dels millors mètodes per a obtenir integrals definides amb gran precisió.

## 7.15 Integració numèrica. Fórmula de Newton-Cotes

Per a calcular la integral  $\int_a^b f$  es pot utilitzar directament la interpolació polinomial. Si dividim l'interval  $[a, b]$  en els  $n$  subintervalls definits pels  $n + 1$  punts  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  i trobem el polinomi interpolador de grau  $n$  corresponent,  $P_n$ , podem esperar que  $\int_a^b P_n$  sigui una bona aproximació de  $\int_a^b f$ .

Fent servir el mètode d'interpolació de Lagrange tenim

$$P_n = \sum_{k=0}^n L_k f(x_k),$$

on cada polinomi  $L_k$  ve donat per

$$L_k(x) = \prod_{j=0; j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Si integrem ens queda

$$\int_a^b P_n = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k.$$



Com que  $L_k$  no depèn de  $f$ , i només de les  $x_k$ , els números  $a_k = \int_a^b L_k$  es poden calcular d'antuvi i tenir-los tabulats, de manera que queda

$$\int_a^b P_n = \sum_{k=0}^n a_k f(x_k).$$

Si ara prenem  $h = \frac{b-a}{n}$  i  $x_k = a + kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , és a dir, dividim l'interval  $[a, b]$  en  $n$  subintervalls de la mateixa longitud  $h$ , les fórmules anteriors queden  $L_k(x) = \Lambda_k(\xi) = \prod_{\substack{j=0; j \neq k \\ j \neq n}}^n \frac{\xi - j}{k - j}$  on  $\xi = \frac{x-a}{h}$ , i si  $\int_0^n \Lambda_k = \lambda_k$ ,  $\int_a^b P_n = h \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_0^n \Lambda_k = h \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k)$ .

Els coeficients  $\lambda_k$  ara, a més de no dependre de la funció  $f$ , només depenen de  $n$ , independentment de l'interval  $[a, b]$ , i apareixen tabulats a molts llibres de mètodes numèrics. La fórmula obtinguda rep el nom de *fórmula de Newton-Cotes*.

En particular, per a  $n = 2$ , tenim la coneguda *fórmula de Simpson*, que resulta ser

$$\int_a^b f \doteq h \left( \frac{1}{3} f(a) + \frac{4}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3} f(b) \right),$$

on amb  $\doteq$  indiquem que no és una igualtat, sinó una aproximació.

A partir de la fórmula per a l'error a la interpolació obtenim una expressió per a l'error a les fórmules d'integració.

Tenim que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} U_n(x),$$

on  $\xi \in (a, b)$  i  $U_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ .

D'aquí es pot deduir, però no ho farem aquí (vegeu el llibre d'Isaacson i Keller), que

$$\int_a^b (f - P_n) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b U_n, & \text{si } n \text{ és senar, i} \\ \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x U_n(x) dx, & \text{si } n \text{ és parell.} \end{cases}$$

Aquí  $\xi \in [a, b]$  i  $f^{(n+2)}$  ha de ser contínua per a la segona fórmula.

Per a la fórmula de Simpson l'error ve expressat per

$$\int_a^b (f - P_2) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880} (b-a)^5, \quad \text{per a alguna } \xi \in (a, b).$$

De la mateixa manera que la interpolació amb punts igualment espaiats no sempre convergeix a  $f$  quan  $n$  tendeix a  $\infty$  (fenomen de Runge), la integració de Newton-Cotes és tal que  $\int P_n$  no tendeix necessàriament a  $\int f$  quan  $n \rightarrow$

$\infty$ . Més precisament, hi ha funcions contínues  $f$  per a les quals no hi ha convergència. Si  $P_n$  tendeix uniformement a  $f$ , llavors, en canvi, és clar que n'hi ha, de convergència.

En fer els càlculs per a calcular la integral definida, s'ha de tenir en compte que si hi ha moltes operacions i no s'utilitza una gran precisió en tots els números, l'acumulació dels errors d'arrodoniment dels números pot fer que l'error final sigui massa gran. Sobretot això esdevé perillós quan hi ha diferències de quantitats molt properes (cancel·lació). El fet que les fórmules de Newton-Cotes tinguin coeficients  $\lambda_k$  negatius quan  $n$  és gran, contribueix al fet que hi hagi aquestes cancel·lacions. Per totes aquestes raons no convé utilitzar aquestes fórmules amb  $n$  molt gran.

D'una manera anàloga a com hem fet amb el mètode dels trapezis a la secció 14 d'aquest capítol, el mètode de Simpson es pot iterar. És a dir, es pot dividir l'interval  $[a, b]$  d'integració en un nombre  $2n$  d'interval·ls d'integració,  $x_0, a = x_0, \dots, x_{2n} = b$ , de manera que  $x_j - x_{j-1} = h = (b - a)/2n$ . A cada subinterval de la forma  $[x_{2j}, x_{2j+2}]$  apliquem la fórmula de Simpson, és a dir, trobem l'àrea sota una paràbola que coincideixi amb la gràfica de la funció als punts  $x_{2j}, x_{2j+1}$  i  $x_{2j+2}$ , i sumem aquestes àrees per tots els subinterval·ls de  $[a, b]$ . És a dir, prenent  $I = \frac{n}{3}(f(a) + f(b) + 2(f(a + 2h) + \dots + f(a(n - 2)h) + 4(f(a) + h + \dots + f(a) + (n - 1)h))$ .

L'error que es comet  $E = \int_a^n f - I$  està acotat per la suma de les cotes que la fórmula de Simpson dóna per a cada subinterval  $[x_{2j}, x_{2j+2}]$  de longitud  $2h = \frac{b-a}{n}$ , amb la qual cosa queda

$$\begin{aligned} |E| &\leq \frac{M_4}{2880} \left(\frac{b-a}{n}\right)^5 n \\ &= \frac{(b-a)^5 M_4}{2880n^4}, \end{aligned}$$

on  $M_4 = \sup_{\zeta \in [a, b]} f^{iv}(\zeta)$ .

Això ens permet determinar  $n$  si volem que l'error sigui més petit que una certa quantitat, sempre que tinguem una cota per a la quarta derivada.

Amb aquest mètode s'obtenen aproximacions millors amb la mateixa feina que amb el mètode dels trapezis, si és que no es fa servir el procediment de Romberg.

## 7.16 Els polinomis ortogonals en un interval i els seus zeros

Un dels mètodes que amb menys operacions dóna una bona aproximació de les integrals en un interval finit és el que consisteix a prendre com a aproximació de la funció que s'integra, el polinomi interpolador, però no en punts  $x_k$  uniformement espaiats, com en les fórmules de Newton-Cotes, sinó prenent

com a punts d'interpolació  $x_k$  els zeros de polinomis pertanyents a una família de polinomis ortogonals a l'interval d'integració.

Una família de polinomis ortogonals consisteix en una successió  $\{\phi_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  de polinomis, amb  $\phi_k$  de grau  $k$ , és a dir, de la forma  $\phi_k = a_k x^k +$  termes de grau més petit que  $k$ , amb  $a_k \neq 0$ , i complint  $\int_a^b \phi_j \phi_k = 0$  si  $j \neq k$ . Òbviament  $\int_a^b \phi_k^2 \neq 0$ .

Observem que, independentment de l'ortogonalitat de la família de polinomis, tot polinomi  $Q_n$  de grau  $n$  es pot expressar com a combinació lineal dels polinomis  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ , i això de manera única.

La demostració d'aquesta propietat es pot fer per inducció:

Per a  $n = 0$  tenim  $Q_0(x) = b_0 = \frac{b_0}{a_0} \phi_0$ . Si ara suposem que  $Q_{n-1}$  es pot expressar com a combinació lineal dels polinomis  $\phi_k$  amb  $k \leq n-1$ , llavors

$$x^n = \frac{1}{a_n} (\phi_n(x) - Q_{n-1}(x)),$$

on  $Q_{n-1}$  és un polinomi de grau  $n-1$ , i per tant tenim

$$x^n = \frac{1}{a_n} \left( \phi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \phi_k(x) \right).$$

Substituint aquesta expressió per a  $x^n$  a un polinomi  $Q_n$  de grau  $n$ , l'obtenim com a combinació lineal de les  $\phi_k$ ,  $k \leq n$  i això de manera única.

A continuació veurem que el fet que les  $\phi_k$  siguin ortogonals, les determina de manera única, si es fixa el coeficient del terme de grau més gran, és a dir, excepte per un factor constant.

Fixem, doncs, d'antuvi els valors de les constants  $a_k$  de manera que  $\phi_k(x) = a_k x^k +$  termes de grau més petit que  $k$ .

La demostració la fem per inducció:

Per a  $n = 0$  és obvi, ja que  $\phi_0(x) = a_0$ , és a dir la constant  $a_0$ .

Si ara ja tenim determinats els polinomis  $\phi_k$  amb  $k < n$ , complint la condició d'ortogonalitat, tenim que  $\phi_n$  ha de complir

$$\phi_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} x \phi_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \phi_k,$$

on hem fet servir que tot polinomi de grau  $\leq n-1$  es pot expressar com a combinació lineal de les  $\phi_k$  amb  $k \leq n-1$ .

La condició d'ortogonalitat ens dóna

$$\int \phi_n \phi_m = \frac{a_n}{a_{n-1}} \int x \phi_{n-1}(x) \phi_m(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \int \phi_k \phi_m = 0,$$

si  $m < n$ . Aquí el signe d'integral s'ha d'entendre entre els límits  $a$  i  $b$ .

Com que  $\int \phi_k \phi_m = 0$  excepte quan  $k = m$ , obtenim

$$b_m \int \phi_m^2 = \frac{a_n}{a_{n-1}} \int x \phi_{n-1}(x) \phi_m(x) dx,$$

igualtat que determina  $b_m$  de manera única.

Ara bé,  $x\phi_m(x)$  és de grau  $m+1$ , i si  $m+1 < n-1$ , resulta que  $x\phi_m$  és ortogonal a  $\phi_{n-1}$ , i de l'expressió anterior obtenim que  $b_m = 0$  per a  $m < n-2$ . L'expressió per a  $\phi_n$  queda doncs

$$\phi_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} x \phi_{n-1} - b_{n-1} \phi_{n-1} - b_{n-2} \phi_{n-2},$$

amb  $b_{n-1}$  i  $b_{n-2}$  donades per l'expressió integral anterior.

Amb aquesta fórmula recursiva anem obtenint els polinomis  $\phi_k$  recursivament de manera única.

En particular si prenem l'interval  $I = [-1, 1]$ , és a dir  $a = -1$  i  $b = 1$ , i les constants  $a_0 = 1$ ,  $a_n = \frac{2n-1}{n} a_{n-1}$ , obtenim una família de polinomis ortogonals coneguts com a *polinomis de Legendre*.

La fórmula recursiva anterior queda en la forma

$$\phi_n(x) = \frac{2n-1}{n} x \phi_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} \phi_{n-2}(x),$$

i es poden anar calculant

$$\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x, \phi_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots$$

Igualment tenim que  $\int_{-1}^1 \phi_n^2 = \frac{2}{2n+1}$ .

Els polinomis de Legendre també es poden definir directament mitjançant la fórmula

$$\phi_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

la demostració de la qual deixem com a exercici.

Dèiem que un mètode d'integració, anomenat *mètode d'integració de Gauss*, consisteix a integrar el polinomi interpolador de la funció prenent com a punts d'interpolació els zeros d'un polinomi d'una família ortogonal. Resulta que  $\phi_n$  té precisament  $n$  zeros a l'interval  $(a, b)$ . És a dir, el polinomi  $\phi_n$ , si pertany a una família ortogonal, no té ni zeros dobles ni complexos: tots són simples i reals.

La demostració és ben senzilla:

Si  $\phi_n$  canviés de signe només  $k$  vegades, amb  $0 \leq k < n$ , a l'interval obert  $(a, b)$ , diguem a  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , llavors el polinomi

$$\phi_n(x) \prod_{j=0}^k (x - x_j)$$

no canvia de signe a l'interval.

Ara bé, el polinomi  $\prod_{j=0}^k (x - x_j) = Q_k(x)$  és expressable com a combinació lineal dels polinomis  $\phi_j$  amb  $j \leq k$ , i per tant  $\int \phi_n Q_k = 0$ , cosa que contradiu que  $\phi_n Q_k$  no canvia de signe a  $(a, b)$ .

Els zeros dels polinomis ortogonals, en particular els de Legendre, s'han de calcular per mètodes numèrics aproximats que estudiarem més endavant en aquest capítol.

## 7.17 Integració numèrica. El mètode de Gauss

Tornant a les fórmules d'integració que utilitzen els polinomis interpoladors, de la secció 15, tenim

$$\int_a^b P_n = \sum_{k=0}^n a_k f(x_k),$$

on

$$a_k = \int_a^b L_k, \quad L_k(x) = \prod_{j=0; j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

on  $P_n$  és el polinomi interpolador amb  $P_n(x_k) = f(x_k)$ .

Aquesta fórmula és certament exacta si  $f$  és un polinomi de grau  $n$ , ja que els seus valors als punts  $x_k$  el determinen de manera única. Resulta, però, que si prenem com a  $x_k$  els zeros dels polinomis ortogonals a l'interval  $I = [a, b]$ , la fórmula resulta automàticament exacta per a tots els polinomis de grau  $\leq 2n + 1$ .

Si  $P$  és un polinomi de grau  $\leq 2n + 1$ , dividint-lo pel polinomi ortogonal  $\phi_{n+1}$ , obtenim els polinomis  $Q$  i  $R$  de graus  $\leq n$ , tals que

$$P = Q\phi_{n+1} + R.$$

Integrant obtenim

$$\int P = \int Q\phi_{n+1} + \int R = \int R,$$

ja que essent  $Q$  de grau més petit que  $n + 1$  és ortogonal a  $\phi_{n+1}$ .

Per altra banda, si  $x_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  són els zeros de  $\phi_{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k P(x_k) &= \sum_{k=0}^n a_k Q(x_k)\phi_{n+1}(x_k) + \sum_{k=0}^n a_k R(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k R(x_k), \end{aligned}$$

on  $a_k = \int_a^b L_k$ .

Per tant

$$\int_a^b P = \int_a^b R = \sum_{k=0}^n a_k R_k(x_k) = \sum_{k=0}^n a_k P(x_k),$$

puix la fórmula és exacta per a  $R$  que és de grau  $\leq n$ .

D'aquí se segueix que tots els coeficients  $a_k$  de la fórmula d'integració són positius: efectivament, essent la fórmula exacta per a  $L_n^2$ , que és un polinomi de grau  $2n$ , resulta

$$\int_a^b L_n^2 = \sum_{k=0}^n a_k L_n^2(x_k) = a_n,$$

ja que  $L_n(x_k) = 0$  si  $k \neq n$ , i  $L_n(x_n) = 1$ .

L'aproximació que s'aconsegueix utilitzant aquest mètode d'integració és molt més bona, fent servir el mateix nombre de punts  $x_k$ , que la que s'obté fent servir el mètode de Newton-Cotes.

L'error que es comet ve donat per

$$\sum_{k=0}^n a_k f(x_k) - \int_a^b f = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b U_{n+1}^2,$$

on  $U_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$ , i  $\xi \in (a, b)$ .

No ho demostrarem, encara que resulta senzill fent servir fórmules d'interpolació que respectin no solament els valors de  $f(x_k)$ , sinó els de  $f'(x_k)$  (*interpolació d'Hermite*). (Vegeu el llibre de Dahlquist).

Amb la integració de Gauss resulta, a diferència del que passa amb la de Newton-Cotes, que quan  $n$  tendeix a  $\infty$ , la fórmula  $\sum_{k=0}^n a_k f(x_k)$  tendeix al valor de la integral  $\int_a^b f$ . (Vegeu el llibre de Stroud).

Hi ha taules que donen els zeros  $x_k$  dels polinomis de Legendre, com també els valors de les constants  $a_k$ . Això permet calcular les integrals de les funcions a l'interval  $[-1, 1]$ . Si volem utilitzar aquestes taules per a integrar a l'interval  $[a, b]$  haurem de canviar els valors tant de  $x_k$  com de  $a_k$ .

Tenim que

$$\int_a^b f = \int_{-1}^1 g$$

amb

$$g(y) = f\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right), \quad \text{i} \quad \int_{-1}^1 g = \sum_{k=1}^n b_k g(y_k),$$

essent  $y_k$  els zeros dels polinomis de Legendre i  $b_k$  els coeficients associats, tots ells donats a les taules (vegeu el llibre de Stroud).

Resulta, doncs, que

$$\int_a^b f \doteq \sum_{k=1}^n b_k f\left(\frac{b-a}{2}y_k + \frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2}.$$

## 7.18 Altres mètodes de quadratura de Gauss

Els mètodes d'integració numèrica aproximada se solen designar amb el nom de *mètodes de quadratura*. A la secció anterior hem presentat el mètode de Gauss, que utilitza el polinomi interpolador en punts d'un interval finit que són zeros d'una família de polinomis ortogonals en aquest interval. També es coneixen com a mètodes o fórmules de Gauss les que s'obtenen amb els polinomis interpoladors fent servir els zeros de polinomis ortogonals quan a la definició d'ortogonalitat s'introdueix el que s'anomena una funció de pes.

Tot el que hem vist sobre polinomis ortogonals es pot repetir *mutatis mutandis* fent servir per definició d'ortogonalitat entre  $\phi_n$  i  $\phi_m$  el que  $\int_a^b w \phi_m \phi_n = 0$ , on  $w$ , la funció de pes, és una funció contínua, positiva i integrable (és a dir amb integral finita, encara que sigui impròpia), a l'interval  $(a, b)$ . Aquest interval també pot ser infinit, ja sigui de la forma  $(a, \infty)$ , o fins i tot  $(-\infty, \infty)$ .

Segons l'interval i la funció de pes que s'esculli s'obtenen diferents famílies de polinomis ortogonals, i les corresponents fórmules d'integració de Gauss.

Així, tenim que si l'interval és  $[-1, 1]$ , i  $w(x) = 1$  per a  $x \in [-1, 1]$ , els polinomis de Legendre són una família ortogonal.

Si al mateix interval  $[-1, 1]$  definim l'ortogonalitat amb la funció de pes  $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ , obtenim com a família de polinomis ortogonals els *polinomis de Tchebixev*  $T_n$  que ja hem estudiat abans (escollint apropiadament els coeficients dels termes de grau més elevat).

Si a tot  $R = (-\infty, \infty)$  prenem  $w(x) = e^{-x^2}$ , obtenim els *polinomis d'Hermite*, i amb  $[0, \infty)$  i  $w(x) = e^{-x}$  tenim els *polinomis de Laguerre*.

Per a cada un d'aquests casos tenim les fórmules de quadratura de Gauss corresponents, que ens donen

$$\int w f = \sum_{k=0}^n a_k f(x_k),$$

on les  $x_k$  són els zeros del polinomi ortogonal de grau  $n$  de la família amb la qual treballem. (El llibre de Stroud dona les taules de zeros i coeficients per aquests mètodes i més, per a diversos valors de  $n$ , com també estimacions pels errors comesos).

## 7.19 El mètode d'integració numèrica de Romberg

La fórmula d'Euler-Maclaurin, que hem obtingut a l'apèndix 7 del capítol 5, ens diu que si la funció  $g$  definida a l'interval  $[a, b]$  té les derivades d'ordre  $2n + 2$  contínues llavors

$$\sum_{j=0}^n g(j) = \int_0^n g + \frac{1}{2}(g(n) + g(0)) + \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{(2k)!} (g^{(2k-1)}(n) - g^{(2k-1)}(0))$$

$$+ \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!} n g^{(2n+2)}(\xi),$$

on  $\xi$  és algun punt de l'interval  $(0, n)$ , i les  $B_{2k}$  són els números de Bernoulli, que també es tracten a l'apèndix.

Prenem ara una funció  $f$  definida a l'interval  $[a, b]$  i considerem els punts  $a = x_0, x_1 = a+h, x_2 = a+2h, \dots, x_n = a+nh = b$ , on  $h = \frac{b-a}{n}$ . Fent el canvi de variable  $x = a + hy$  i definint  $g(y) = f(a + hy)$ , resulta que  $g(j) = f(x_j)$ , que  $g^{(k)}(y) = f^{(k)}(a + hy)h^k$ , i que  $\int_a^b f = h \int_0^n g$ .

Substituint això a la fórmula d'Euler-Maclaurin ens queda

$$\begin{aligned} h \sum_{j=0}^n f(x_j) &= \int_a^b f + \frac{h}{2}(f(b) - f(a)) + \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k} h^{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) \\ &+ \frac{B_{2n+2} h^{2n+2}}{(2n+2)!} (b-a) f^{(2n+2)}(\eta), \end{aligned}$$

on  $\eta = a + h\xi$  és un punt de l'interval  $(a, b)$ .

Fixem-nos ara que si passem el terme  $\frac{h}{2}(f(b) - f(a))$  al primer terme de la igualtat, ens queda precisament la suma de la fórmula del trapezi  $T(h)$  que hem estudiat a la secció 13, i queda, doncs,

$$T(h) = \int_a^b f + \sum_{k=1}^n a_k h^{2k} + a_{n+1}(\eta) h^{2n+2},$$

on  $a_{n+1}(\eta)$ , que pot dependre de  $h$ , està acotada pel màxim de  $B_{2n+2}(b-a)|f^{(2n+2)}(\eta)|/(2n+2)$  amb  $\eta \in [a, b]$ .

Com que això és així per a cada  $n$ , tenim, doncs,  $T(h)$  expressat com una sèrie asimptòtica (vegeu l'apèndix 8 del capítol 5), ja que l'últim terme és  $O(h^{2n+2})$  quan  $h \rightarrow 0$ , és a dir, dividit per  $h^{2n+2}$  és acotat quan  $h \rightarrow 0$ . Per tant quan  $h$  tendeix a 0, per a un valor fixat de  $n$ , la diferència entre  $\int_a^b f$  i  $T(h)$  tendeix a 0. Això, encara que si fixem  $h$  i fem tendir  $n$  a  $\infty$ , la sèrie no convergeix.

Per veure de calcular  $\int_a^b f$ , considerem ara una funció  $\phi$  de la forma

$$\phi(h) = a_0 + a_1 h^j + O(h^k), \quad k > j, \quad k, j \in \mathbb{N}.$$

Si isolem  $a_0$  d'aquesta expressió i de  $\phi(2h) = a_0 + a_1(2h)^j + O(2h)^k$ , obtenim

$$a_0 = \phi(h) + \frac{\phi(h) - \phi(2h)}{2^j - 1} + O(h^k).$$

És a dir, tot i no conèixer  $a_1$ , obtenim una aproximació de  $a_0$  amb un error que és d'ordre  $h^k$  i no  $h^j$  com a l'expressió original.

Aquest procediment per a obtenir  $a_0$  amb més precisió és un cas particular de l'anomenada *extrapolació de Richardson*.





## 7.20 Exemple comparatiu d'integració numèrica

Farem en aquesta secció el càlcul aproximat de  $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ , utilitzant els mètodes de Newton-Cotes, Gauss i Romberg. En els tres casos procurarem mantenir semblant la complexitat dels càlculs i compararem els resultats.

Per al mètode de Newton-Cotes, prendrem  $n = 7$ . A causa del fet que les taules dels coeficients  $a_k$  de la fórmula solen venir donats per a l'interval  $[-1, 1]$  (vegeu el llibre de Stroud), hem de fer un canvi de variable a la integral:

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{1.5 + 0.5\xi}.$$

Si organitzem els nostres càlculs en una taula, obtenim

$k$	$x_k = 1,5 + 0,5\xi_k$	$\frac{1}{x_k}$	$a_k$	$a_k f(x_k)$
0	1	1	751/8640	0.086921296
1	8/7	7/8	3577/8640	0.362254050
2	9/7	7/9	1323/8640	0.119097222
3	10/7	7/10	2989/8640	0.242164351
4	11/7	7/11	2989/8640	0.220149410
5	12/7	7/12	1323/8640	0.089322916
6	13/7	7/13	3577/8640	0.222925569
7	2	1/2	751/8640	0.043460648

Obtenim així  $\ln 2 \doteq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^7 a_k f(x_k) \doteq 0.69313049$ .

D'altres càlculs més precisos sabem que  $\ln 2 = 0.693147180560\dots$ , la qual cosa vol dir que el valor obtingut té un error més petit que dues centmil·lèsimes.

Si ara volem utilitzar el mètode de Gauss amb els zeros dels polinomis de Legendre, tenim, també referint-ho tot a l'interval  $[-1, 1]$  que és on tenim les taules de zeros  $\xi_k$  i coeficients  $a_k$  (vegeu el llibre de Stroud), que per a  $n = 7$ ,

$k$	$\xi_k$	$a_k$
4, 3	$\pm 0.1834346424$	0.3626837833
5, 2	$\pm 0.5255324099$	0.3137066458
6, 1	$\pm 0.7966664774$	0.2223810344
7, 0	$\pm 0.9602898564$	0.1012285362,

D'on obtenim els valors tabulats a continuació per a  $f(x_k) = 1/1.5 + 0.5\xi_k$  i

$a_k f(x_k)$ :

$k$	$1/(1.5 + 0.5\xi_k)$	$a_k f(x_k)$
0	1/1.019855077	0.099257765
1	1/1.101666761	0.201858712
2	1/1.237233795	0.253554863
3	1/1.408282679	0.257536209
4	1/1.591717321	0.227856905
5	1/1.762766205	0.177962707
6	1/1.898333239	0.117145414
7	1/1.980144923	0.051121781

D'on se segueix que

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{1.5 + 0.5\xi} \doteq \frac{1}{2} \sum a_k f(x_k) \\ &\doteq 0.693147179, \end{aligned}$$

que té un error d'aproximadament  $10^{-9}$ , que és molt més petit que el comès anteriorment, i això només amb una mica més de feina (i unes bones taules, és clar!).

El tercer mètode que volem comparar és el de Romberg. Aquest té l'avantatge que no necessitem cap mena de taules de coeficients o de zeros per a utilitzar-lo. Comencem aplicant la fórmula del trapezi de la secció 13, que ens diu que

$$T(h) = h \left( \sum_{k=0}^n f(x_k) - \frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_k)) \right),$$

on  $h = \frac{b-a}{n}$  i  $x_k = a + kh$ .

Prenent  $n = 1, 2, 3$  i  $4$  obtenim els valors de  $T(h)$  per a  $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  i  $\frac{1}{8}$  tabulats a la columna esquerra. Després anem obtenint les següents columnes segons l'algorisme explicat a la secció 18, on ara  $\phi_0 = T$ :

$n$	$T\left(\frac{1}{n}\right) = \phi_0\left(\frac{1}{n}\right)$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$
1	0.75			
2	0.708333333	0.694444444		
4	0.697023809	0.693253968	0.693174602	
8	0.694121850	0.693154530	0.693147901	0.69314748

El darrer número és un valor aproximat de  $\ln 2$ , amb un error d'unes quatre deumilionèsimes:  $4 \times 10^{-7}$ . No és tan precís com l'obtingut amb la fórmula de Gauss, però certament ha utilitzat molts menys mitjans tècnics i menys feina.

Hi ha altres mètodes d'integració numèrica, entre els quals es compta amb la interpolació de l'integrand amb funcions racionals (vegeu el llibre de Stoer i Bulirsch), i la interpolació amb *splines* cúbics (vegeu el llibre de Stroud).

## 7.21 Avaluació numèrica d'integrals impròpies

Per avaluar les integrals impròpies, ja sigui perquè l'integrand no és acotat, ja sigui perquè no ho és l'interval d'integració, és evident que els polinomis no són gaire indicats: són acotats a tot interval acotat, i tendeixen a  $+\infty$  o a  $-\infty$  quan la variable tendeix a  $\infty$  en valor absolut.

En general, el que s'ha de fer si es vol avaluar les integrals impròpies, és avaluar analíticament la integral a l'entorn dels punts on la funció no és acotada, és a dir, a les singularitats, o bé veure que en un interval de la forma  $(-\infty, -a]$  o bé  $[a, \infty)$ , amb  $a$  prou gran, la integral és més petita que l'error que ens està permès.

Presentem a continuació alguns exemples d'avaluació d'aquestes integrals, que en general requereixen una certa dosi d'inventiva, ja que es resisteixen a un tractament metòdic.

i) Si volem calcular  $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ , podem integrar per parts, i obtenim

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} &= [2\sqrt{x}e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{x}e^x dx \\ &= 2e - 2 \left[ \frac{2}{3}x^{3/2}e^x \right]_0^1 + \frac{4}{3} \int_0^1 x^{3/2}e^x dx \\ &= \frac{2}{3}e + \frac{4}{3} \int_0^1 x^{3/2}e^x dx, \end{aligned}$$

que ja no té cap singularitat i que es pot integrar amb un dels mètodes estudiats a les seccions anteriors. Hem repetit la integració per parts perquè encara que  $\sqrt{x}e^x$  ja és una funció acotada, en tenir derivada infinita al 0, és de mal aproximar amb polinomis.

ii) Per integrar  $I = \int_{0,1}^1 x^{-3}e^x dx$ , que té una singularitat al 0, i que per tant és molt gran a 0, 1, es pot procedir expressant-la com a suma de dues integrals, una que es pugui calcular analíticament i l'altra a la qual puguem aplicar els mètodes numèrics que hem estudiat.

Així tenim

$$I = \int_{0,1}^1 \frac{1}{x^3} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \frac{1}{x^3} \left( e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right) dx.$$

La primera s'integra explícitament, mentre que la segona es pot calcular, per exemple, notant que  $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$  no té singularitats, i es pot integrar usant els mètodes de Newton-Cotes, Gauss o Romberg.

iii)  $I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{|x-1|}} dx$  té una singularitat a  $x = 1$ . La podem expressar com a suma d'integrals:

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$= e^{-1} \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx + e^{-1} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

La primera integral, ja l'hem tractada a l'exemple i). La segona, la podem calcular fent el canvi  $x = t^2$ , amb la qual cosa obtenim

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt,$$

que és una integral de valor conegut:  $\sqrt{\pi}$  (vegeu l'apèndix del capítol 5).

iv)  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$  es pot integrar numèricament expressant-la com a  $\int_0^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ , basant-nos en el fet que si  $\varepsilon$  és prou petita  $\sqrt{x} \cong \sqrt{\sin x}$ , i es pot avaluar l'error.

Calculant  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  fent servir la sèrie de potències, obtenim

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

L'error de truncació que s'obté, a causa del fet que la sèrie és de signes alternants i amb termes de valor absolut decreixent monòtonament, és més petit en valor absolut que el del primer terme no sumat.

L'avaluació de funcions utilitzant les sèries de potències, tal com ho hem fet en aquest cas, no és sempre gaire eficaç, encara que la sèrie sigui convergent.

Per exemple ja sabem que  $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$  convergeix a per tots els valors de  $x$ , però la raó de dos termes consecutius de la sèrie val  $-\frac{x^{n+1}}{x^n} \frac{n!}{(n+1)!} = -\frac{x}{n+1}$ , que serà més gran que 1 en valor absolut si  $n+1 < x$ . Per tant, si prenem  $x$  gran, diguem  $x = 20$ , resulta que els termes van creixent fins a  $n = 20$ , i llavors aquest terme val  $\frac{20^{20}}{20!} = 4 \cdot 10^7$ , que és un número enorme comparat amb el valor de  $e^{-20}$ , que és petitíssim. Encara que finalment els termes es faran petits, i en teoria ens aproximarem a  $e^{-20}$ , els errors d'arrodoniment que puguem fer s'acumularen fins a ser molt més grans que el valor mateix que volem calcular. Molt pitjor si volem calcular  $e^{-100}$  amb aquest procediment, els termes arribaran a valer  $\frac{100^{100}}{100!} \doteq 10^{42}$ . Els errors que es cometran en arrodonir i amb les cancel·lacions seran molt més elevats que  $e^{-20}$  si demanem a l'ordinador que ens ho calculi sense prendre cap més precaució. Certament hem de fer servir un altre mètode!

## 7.22 Càlcul numèric de zeros de funcions

El problema clàssic de resolució d'equacions algebraïques consisteix a trobar els valors per als quals s'anul·la un polinomi determinat. Ja des del segle XVI es coneixen fórmules explícites per a trobar aquests zeros o arrels, per a polinomis de grau menor o igual a quatre. Per a graus més grans tal fórmula general

no existeix, i si volem conèixer les arrels hem de recórrer a mètodes numèrics aproximats.

Trobar els punts on s'anul·len els polinomis resulta tant d'interès teòric com d'interès pràctic. A les seccions anteriors ens hem trobat amb l'ús de la interpolació utilitzant els zeros dels polinomis ortogonals, ja sigui per aproximar funcions com per avaluar-ne les integrals pel mètode de Gauss. Més endavant ens trobarem que el comportament de les solucions de les equacions diferencials depèn dels valors de les arrels dels polinomis característics, que moltes vegades seran de grau més gran que quatre.

Els zeros dels polinomis poden no ser reals. En aquesta secció nosaltres ens limitarem als mètodes per a trobar valors aproximats dels zeros reals de funcions, no necessàriament polinomials, i deixem per un apèndix més endavant el càlcul de zeros complexos de polinomis.

### 7.22.1 El mètode de Horner

El mètode més antic per a calcular aproximadament els zeros de polinomis és conegut avui com a *mètode de Horner*, encara que es remunta al principi de la història de Xina. Consisteix en el següent: es pren l'equació, diguem  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 = 0$  i se cerquen dos enters consecutius per als quals el polinomi canviï de signe. En aquest cas observem que  $f(1) > 0$  i  $f(2) < 0$ , per la qual cosa existeix un valor  $x^* \in (1, 2)$  amb  $f(x^*) = 0$ . Aquest és el valor que volem calcular. Si fem el canvi  $x = y + 1$ , l'equació ens queda  $y^3 - 3y + 1 = 0$ , i sabem que té una arrel  $y^*$  amb  $0 < y^* < 1$ . Per tant  $y^{*3} < y$ , i prenem  $y^{*3} \doteq 0$ , per obtenir de l'equació el valor aproximat  $y^* \doteq \frac{1}{3}$ , cosa que ens proporciona el valor aproximat per a l'arrel cercada  $x^* = 1 + \frac{1}{3}$ . Per aproximar-nos-hi més fem el canvi  $z = y - \frac{1}{3}$ , i obtenim  $z^3 + z^2 - \frac{8}{3}z + \frac{1}{27} = 0$ . El polinomi és positiu per a  $z = 0$  i negatiu per a  $z = 1$ , de manera que té un zero  $z^*$  a  $(0, 1)$ . Una altra vegada considerem que  $z^{*3}$  i  $z^{*2}$  són prou petits respecte de  $z^*$  i els prenem iguals a 0. De l'equació obtenim llavors el valor aproximat  $z^* \doteq \frac{1}{72}$ . Això ens dona com a valor aproximat  $x^* = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{72}$ . Si ara féssim el canvi  $u = z - \frac{1}{72}$ , podríem repetir el procediment per anar afinant l'aproximació.

Aquest mètode, d'importància històrica, és poc emprat avui, i no l'analitzarem. Fem notar que en alguns llibres de càlcul numèric apareix sota el nom de *mètode de Horner* un procediment per avaluar polinomis recursivament que consisteix a calcular  $P(x) = a_0x^n + \dots + a_n$  posant-lo en la forma  $P(x) = (((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \dots$ .

### 7.22.2 El mètode de la bisecció

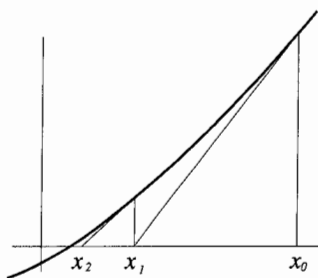
Un mètode senzill, però relativament lent, per a trobar els punts en què una funció  $f$  que canvia de signe en un interval, s'anulla, consisteix a bisecar l'interval, és a dir, dividir-lo en dos intervals, generalment de longitud igual. Si no hem encertat per partir-lo al punt en què  $f$  s'anulla, llavors la funció canviarà de signe almenys en un dels subintervals. Aquest, el tornem a partir en dos, i

així anem repetint el procediment. Com que la longitud dels subintervalls al cap de  $n$  passos serà  $\frac{b-a}{2^n}$ , aquest serà l'error màxim que cometrem en el valor del punt on s'anul·la la funció si ens aturem. Com que aquesta longitud tendeix a 0, podem obtenir el zero amb tanta aproximació com vulguem. De fet observem que anem guanyant un dígit binari més en l'expressió d'aquest zero, en cada pas, si  $b - a = 1$ . És a dir, guanyem un dígit decimal cada 3,3 passos. Notem també que a cada pas hem d'avaluar el signe de la funció una vegada, al punt mitjà de l'interval que partim, per veure amb quina de les dues meitats ens quedem.

### 7.22.3 El mètode de Newton-Raphson

És el mètode més utilitzat per a avaluar els zeros de funcions, perquè encara que requereix el càlcul de la derivada de  $f$  a les diferents aproximacions que es van obtenint, convergeix molt de pressa i calen molt pocs passos per a obtenir una bona aproximació. En general no cal una avaluació numèrica de la derivada diferent de l'avaluació de la funció derivada que coneixem explícitament a través de les fórmules de derivació.

El procediment consisteix a prendre un punt  $x_0$ , que procurarem que no sigui gaire lluny del punt  $x^*$  cercat, que ha de satisfer  $f(x^*) = 0$ , i determinar la intersecció de la tangent a la gràfica de  $f$  a  $x_0$  amb l'eix de les abscisses, i aquest serà el punt  $x_1$ , amb el qual repetirem el procediment. Si tot va bé la successió  $\{x_k\}$  tendeix a  $x^*$ .



D'acord amb el que hem dit, tenim la fórmula recursiva

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}.$$

Acotem l'error que es comet si aturem el procés al cap de  $n$  passos.

Per la fórmula de Taylor tenim, si  $f''$  és contínua,

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x_n)^2,$$

on  $\xi \in (x^*, x_n)$ .

O sigui que

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x^* - x_n = x^* - x_{n+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2.$$

Per tant, si prenem  $\varepsilon_n = x_n - x^*$  com l'error comès prenent  $x_n$  en lloc de  $x^*$  com a zero, resulta

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}\varepsilon_n^2.$$

Si a l'interval que conté els punts  $x^*$  i  $x_n$ , tenim que  $|f''(\xi)/2f'(\eta)| < \alpha$  per  $\xi$  i  $\eta$  arbitraris a aquest interval, la qual cosa obliga que  $f'(x^*) \neq 0$ , llavors resulta que  $\varepsilon_n < \alpha\varepsilon_{n-1}^2$ , i per tant  $\varepsilon_n < \alpha^{1+2+4+\dots+2^{(n-1)}}\varepsilon_0^{2^n} = \alpha^{2^n-1}\varepsilon_0^{2^n}$ . Si  $\varepsilon_0$  és prou petita, és a dir, si prenem  $x_0$  prou a prop de  $x^*$ , l'error tendeix a zero molt ràpidament. Fins i tot amb una calculadora de butxaca podem obtenir els zeros de  $f$  amb gran precisió amb molt pocs passos. Aquesta mena de convergència és anomenada *convergència quadràtica*.

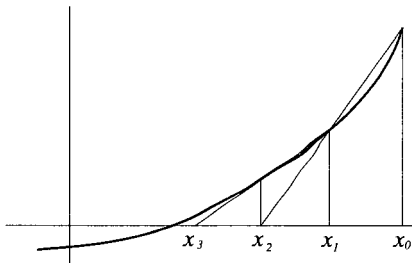
Si  $f'(x^*) = 0$ , la cosa es complica una mica. De fet si s'anul·len les derivades fins a ordre  $m - 1$  però no la d'ordre  $m$ , podem fer servir la fórmula recursiva

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

El problema d'aquest mètode és que hem de conèixer  $m$  a priori, cosa que no sol succeir. Hi ha mètodes, però, que permeten el càlcul sense aquest coneixement (vegeu el llibre de Dahlquist, per exemple).

#### 7.22.4 El mètode de la secant i el mètode de la “regula falsa”

El *mètode de la secant* es pot utilitzar si l'avaluació de la derivada de  $f$  resulta massa onerosa. Consisteix en un algorisme semblant al de Newton-Raphson, substituint la tangent per la secant, d'acord amb el següent esquema:



$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$



Per aplicar-lo hem de començar amb dos punts diferents, procurant que siguin propers a  $x^*$ . L'error, sense arribar a la convergència quadràtica, també és baix, i ve donat recursivament per l'expressió

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi')} \varepsilon_n \cdot \varepsilon_{n-1},$$

on  $\xi$  i  $\xi'$  són punts de l'interval que conté  $x^*$ ,  $x_{n-1}$  i  $x_n$ .

El mètode de *regula falsa* és com el de la secant, però procurant traçar la secant pels punts  $(x_n, f(x_n))$ ,  $(x_m, f(x_m))$ , de manera que  $m$ , essent més petit que  $n$ , és el més gran amb  $f(x_m)$  de signe diferent de  $f(x_n)$ . És un mètode que, com el de la bisecció, sempre convergeix, però no ho fa tan de pressa com els de Newton-Raphson o el de la secant.

Per trobar zeros de polinomis hi ha mètodes especials, que no descriurem aquí per la brevetat que ens hem imposat.

## 7.23 Avaluació del punt fix d'una funció

Suposem que tenim una funció  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua a un interval  $I = [a, b]$  de  $\mathbb{R}$ , i que volem determinar un *punt fix* de  $f$ , és a dir, un número  $x^*$  tal que  $x^* = f(x^*)$ .

Si es dóna el cas que  $f(a) > a$  i que  $f(b) < b$ , llavors existeix almenys un punt  $x^* \in (a, b)$  que compleix  $x^* = f(x^*)$ . Efectivament només cal considerar que la funció contínua  $\phi(x) = f(x) - x$  canvia de signe als extrems de  $[a, b]$ , i que per tant s'anul·la en un punt de  $(a, b)$  segons el teorema de Bolzano. El mateix passarà si  $f(a) < a$  i  $f(b) > b$ .

Si la derivada de  $f$  a l'interval  $[a, b]$  és més petita que 1 en valor absolut, resulta que el punt fix  $x^*$  és únic a l'interval, i que el podem aproximar com a límit d'una successió. Suposem, doncs, que  $|f'(x)| \leq k < 1$  per a tota  $x \in [a, b]$ . Obtenim  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$  per qualsevol  $x, y \in I$ .

En particular si  $y = x^*$ , punt fix de  $f$ , queda

$$|f(x) - x^*| \leq k|x - x^*|.$$

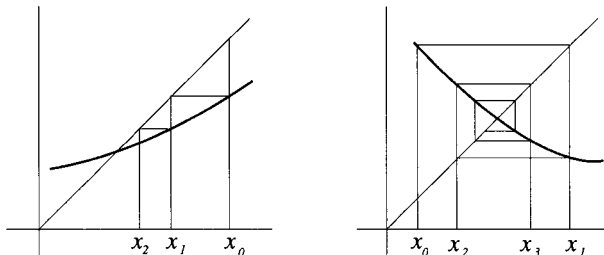
Definint  $x_n = f(x_{n-1})$ , i prenent  $x_0$  un punt arbitrari de  $[a, b]$ , resulta

$$|x_n - x^*| \leq k|x_{n-1} - x^*| \leq \dots \leq k^n|x_0 - x^*|.$$

Com que  $k < 1$ ,  $k^n \rightarrow 0$  quan  $n \rightarrow \infty$ , i per tant necessàriament  $x_n \rightarrow x^*$  quan  $n \rightarrow \infty$ .

Això ens mostra que  $x^*$  és l'únic punt fix de  $f$  a  $I$  (una successió convergent només té un límit), i a més ens dóna una cota per l'error que es comet prenent  $x_n$  en lloc de  $x^*$ , ja que  $|x_0 - x^*|$  està acotat per  $b - a$ .

A la figura que segueix mostrem esquemàticament com és aquest procés d'aproximació, tant quan  $0 < f'(x) < 1$ , com quan  $-1 < f'(x) < 0$ :



Com a exemple considerem trobar els punts fixos de les funcions  $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x^2}\right)$  i  $g(x) = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{5}{x^2}\right)$ .

Les dues funcions tenen com a punt fix  $\sqrt[3]{5}$ , però resulta ben diferent fer el càlcul amb el nostre sistema amb l'una i amb l'altra.

Per a la funció  $g$  tenim que  $g(3/2) = 47/27 > 3/2$ , i  $g(2) = 21/12 < 2$ , i per tant tenim almenys un punt fix a  $I = [3/2, 2]$ . Tenim també  $g'(3/2) = -26/81$  i  $g'(2) = 1/4$ , essent la derivada monòtona a  $I$ , per la qual cosa podem assegurar que  $|g'(x)| < 1/3$  per tota  $x \in I$ . Per tant la successió  $x_n = g(x_{n-1})$ ,  $x_1 = 2$  (a qualsevol altre punt de  $I$ ), convergirà al punt fix  $x^*$ , i l'error comès  $x^* - x_n$  tindrà un valor absolut més petit que la meitat d' $1/3^n$ . Si volem que aquest error sigui més petit que  $10^{-4}$ , prendrem  $n = 9$ . De fet, com que  $g'(\sqrt[3]{5}) = 0$ , hauríem pogut prendre  $k$  tan petit com haguéssim volgut, però per fer-ho hauríem hagut de treballar més per a trobar l'interval  $I$ .

Com que  $x^* = \frac{1}{3}\left(2x^* + \frac{5}{x^{*2}}\right)$ , resulta que  $x^* = \sqrt[3]{5}$ .

Amb la funció  $f$  la cosa resulta ben diferent. Per començar comprovem que si  $x^* = \frac{1}{2}\left(x^* + \frac{5}{x^{*2}}\right)$ , llavors tenim  $x^* = \sqrt[3]{5}$  també. Com que  $f'(x^*) = -\frac{1}{2}$ , ja veiem que si comencem el procés iteratiu amb el mateix error  $x^* - x_1$ , que en el cas de  $g$  l'error decreix molt més lentament ( $1/2^n$  en lloc de  $1/3^n$ ). Però a més tenim una altra dificultat, que és trobar l'interval  $I$  en què  $x - g(x)$  canviï de signe als extrems i que, a més,  $|g'| \leq k < 1$ . Trobem fàcilment que  $f(2) = 13/8 < 2$ ,  $f'(2) = -\frac{1}{8}$ , la qual cosa és satisfactòria, també  $f(3/2) = 67/36 > 3/2$ , però  $f'(3/2) = 063/8 < -1$ , que no serveix. I si prenem  $f(7/4)$  resulta més petit que  $7/4$ , que tampoc serveix. Haurem de buscar, doncs, un número entre  $3/2$  i  $7/4$ , cosa que ja ens comença a complicar la vida. Ho deixem per al lector.

El mètode de Newton per a trobar el zero d'una funció també es pot veure com l'avaluació d'un punt fix.

Prenem  $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ .

Llavors  $x^* = \phi(x^*)$  satisfà  $f(x^*) = 0$ , i  $x_{n+1} = \phi(x_n)$  és precisament la iteració del mètode de Newton:  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .

Demanarem que hi hagi un interval  $I = [a, b]$ , en què  $f/f'$  tingui signes diferents a  $a$  i a  $b$ . També demanarem que  $\phi' = f f'' / f'^2$  tingui valor absolut més petit que  $k$  amb  $k < 1$ .

En aquestes condicions tindrem que hi haurà un únic punt fix de  $\phi$  a l'interval  $I$  (que serà l'únic zero de  $f$ ).

## Exercicis i problemes

- Utilitzant l'ordinador, dibuixeu les gràfiques dels polinomis interpoladors de grau  $n$  de les següents funcions, dividint l'interval indicat en  $n$  parts iguals mitjançant els punts d'interpolació.

$$\begin{aligned} f(x) &= |x|, & x &\in [-1, 1] \\ f(x) &= 1/(1+x^2), & x &\in [-5, 5] \\ f(x) &= e^{-x^2}, & x &\in [-5, 5]. \end{aligned}$$

Observeu el que passa quan aneu prenent  $n$  més gran.

- Feu el mateix utilitzant la interpolació de Txeixev.
- Feu un programa per a interpolar amb "splines" cúbics naturals. Feu-lo servir per a comparar amb la interpolació de Lagrange equidistant i Txeixev per a les funcions  $1/(1+x^2)$  i  $e^{-x^2}$  (problemes 1 i 2).
- Fent servir els esquemes d'interpolació de Newton, Aitken i Neville, calculeu  $f(0)$  si la funció  $f(x)$  pren els valors següents:  $f(1) = 65$ ,  $f(2) = 62$ ,  $f(4) = 56$ ,  $f(8) = 43.5$ .
- Trobeu els coeficients fins a  $n = 11$  de les següents aproximacions, on  $T_n(x) = \cos n\theta$ ,  $\cos \theta = x$ , és el polinomi de Txeixev de grau  $n$ :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), & x &\in [0, 1] \\ \operatorname{arctg} x &= x \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), & x &\in [-1, 1] \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), & x &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

- Trobeu les aproximacions amb mínims quadrats de les funcions indicades a continuació:

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \varepsilon(x), & x &\in [0, \ln 2], \\ \ln x &= a_1 x + a_3 x^3 + \varepsilon(x), & x &\in [1/\sqrt{e}, \sqrt{e}], \\ \frac{\sin x}{x} &= 1 + a x^2 + b x^4 + \varepsilon(x), & x &\in [0, \pi/2], \\ \operatorname{arcsin} x & & & \\ &= \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x^2} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) + \varepsilon(x), & x &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Feu-ho utilitzant 8 punts equidistants pel cas discret, i compareu amb el resultat del cas continu.

7. Aproximeu  $f(x) = \pi^2 - x^2$  mitjançant la suma  $f^*(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos kx$ , de manera de minimitzar  $|f^* - f|_2$  a  $[-\pi, \pi]$ .
8. Feu servir l'economització de Txeixev per a trobar un polinomi de 4<sup>t</sup> grau que doni  $f(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt$ , amb un error més petit que  $2 \times 10^{-4}$  en l'interval  $[-1, 1]$ .
9. La transformació d'Euler serveix per a accelerar la convergència de sèries, i consisteix a expressar la sèrie convergent  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  com a  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Delta^n a_0 / 2^{n+1}$ , on  $\Delta^n a_0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a_{n-k}$ .  
Demostreu la certesa d'aquesta igualtat.
10. Utilitzeu la transformació d'Euler per a avaluar:
- $\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} / k$  amb 7 xifres decimals correctes.
  - $\frac{\pi}{4} = \arctg 1 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} / (2k - 1)$  amb 5 xifres decimals correctes.
11. Calculeu una aproximació de  $\pi^2/6 = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$  fent servir la fórmula d'Euler-Maclaurin (apèndix del capítol 5) a partir del terme onzè.
12. Quants termes de  $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(1 + n^3)$  hem de prendre per assegurar que l'error és més petit que  $10^{-3}$ ?  
I quants de  $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n(n + 1)$ ? I de  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt[3]{n^2}$ ?
13. Calculeu aproximadament les següents integrals 1), 2) i 3) amb un error de menys de  $10^{-3}$  fent servir
- El mètode dels trapezis
  - El mètode de Newton-Cotes
  - La sèrie de Taylor
  - El mètode de Gauss-Legendre
  - El mètode de Romberg
- $\ln 2 = \int_{-1}^1 \frac{3 dx}{9 - x^2}$
  - $\pi/4 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + x^2}$ .
  - $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ .

14. Integreu numèricament

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx, \int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{x}.$$

15. Calculeu amb un error relatiu més petit del 10% les integrals

i)  $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ ,    ii)  $\int_1^{10} x^x dx$ .

Suggerim consultar l'apèndix del capítol 5.

16. Calculeu amb 10 xifres decimals exactes els zeros  $x_k$  del polinomi de Legendre de grau 4 a  $[-1, 1]$ , i els coeficients  $a_k$  de la fórmula  $\int_{-1}^1 f = \sum_{k=1}^5 a_k f(x_k)$ .

17. Avalueu amb el mètode de Gauss-Legendre

$$\int_{0.01}^1 \frac{dx}{e^{-x} - 1}$$

i torneu a fer-ho restant la singularitat de l'integrand i integrant-la a part.

18. Arquimedes va calcular el valor aproximat de  $\pi$  mitjançant polígons regulars inscrits i circumscrits en un cercle, amb un error més petit de  $1/71$ . Mitjançant l'extrapolació de Richardson es pot millorar molt l'aproximació:

L'àrea del polígon regular de  $n$  costats inscrit al cercle de radi 1 val

$$A_0^n = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2} \left( \frac{2\pi}{n} - \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi}{n} \right)^3 + \frac{1}{120} \left( \frac{2\pi}{n} \right)^5 + \dots \right).$$

Per tant,

$$A_0^{2n} = \pi + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_4}{n^4} + \dots, \quad \text{on } a_{2k} = (-1)^k \pi^{2k+1} / (2k+1)!.$$

Si prenem  $\frac{4}{3}A_0^{2n} - \frac{1}{3}A_0^n$  es redueix a 0 el coeficient de  $1/n^2$ , i queda

$$A_1^n := \pi + \frac{b_4}{n^4} + \frac{b_6}{n^6} + \dots$$

Per eliminar el terme en  $1/n^4$ , prenem  $A_2^n = \frac{16}{15}A_1^{2n} - \frac{1}{15}A_1^n$ , i repetint el procediment ens queda  $A_k^n = \pi + \frac{c}{n^{2(k+1)}} + \dots$

Fent servir aquest procediment, podem calcular  $\pi$  amb tantes xifres correctes com vulguem. Feu aquest càlcul fins que s'estabilitzin les primeres

deu xifres després del punt decimal. Convé organitzar-lo en una taula, com en el mètode de Neville.

Aquesta aproximació de  $\pi$  es pot recordar a partir de la frase “Que j’aime à faire connaître un nombre utile aux sages”, on comptant el nombre de lletres de cada paraula, obtenim 3.1415926535.

19. Trobeu totes les arrels reals de les equacions

$$\begin{aligned}x^4 - 0.97x^3 - 4.98x^2 + 7.19x - 1.83 &= 0 \\(x/2)^2 - \sin x &= 0 \\e^x - 2 - x &= 0 \\x - \cos x &= 0.\end{aligned}$$

Per a fer-ho podeu utilitzar els mètodes de Newton-Raphson, bisecció, secant, i als dos darrers, el mètode iteratiu per trobar un punt fix de  $e^x - 2$  i de  $\cos x$ .

20. Trobeu un valor aproximat de  $\sqrt[3]{5}$  fent servir els mètodes iteratius  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{5}{x_n^2} \right)$  i  $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left( 2x_n + \frac{5}{x_n^2} \right)$ . Amb quin dels dos mètodes obtenim una bona aproximació més de pressa? Per què?
21. Per a calcular  $\sin^\circ 1$ , Al-Kashi al segle XV utilitzà el següent mètode:

Va comprovar geomètricament la igualtat  $\sin 3\phi = 3 \sin \phi - 4 \sin^3 \phi$ . D'altra banda calculà  $\sin^\circ 3$  a partir de  $\sin^\circ 30$  i  $\sin^\circ 36$ , que s'havien trobat també geomètricament. El  $\sin^\circ 1$  és, doncs, una solució de

$$4x^3 - 3x + a = 0,$$

on  $a = \sin^\circ 3$ .

Per a resoldre l'equació aplicà un procediment iteratiu:

$$x_n = \frac{1}{3}(4x_{n-1}^3 + a).$$

Demostreu que  $\{x_n\}$  convergeix si es pren  $x_0$  apropiadament i confeccioneu unes taules per  $\sin^\circ$  pels angles de  $1^\circ$  fins a  $10^\circ$  amb 9 xifres decimals correctes.

## Apèndixs

### 1. El fenomen de Runge

Veurem un exemple de com el polinomi interpolador d'una funció  $f$  en un interval finit, on hem pres els punts d'interpolació equidistants i incloent els extrems de l'interval, no convergeix necessàriament a  $f$  a tots els punts de l'interval. De fet, a l'exemple que presentem, el polinomi interpolador no roman ni tan sols acotat a l'interval quan el número de punts d'interpolació tendeix a  $\infty$ . Aquest comportament és anomenat *fenomen de Runge*.

Prenem la funció  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , que és analítica a tot  $\mathbb{R}$ , i intentem aproximar-la amb polinomis de grau creixent a l'interval  $[-5, 5]$ . Els punts d'interpolació que prendrem seran  $x_k = -5 + kh$ , on  $h = \frac{10}{n}$  i  $k=0, 1, 2, \dots, n$ .

Considerem el polinomi interpolador  $P_n$ , de grau màxim  $n$ , que té els seus valors coincidint amb els de  $f$  en aquests punts.

D'acord amb la fórmula de l'error obtinguda a la secció 5, tenim

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{k=0}^n (x - x_k),$$

on hem posat un índex  $n$  a  $R$  per a indicar el grau de  $P_n$ .

Per a la nostra funció  $f$  tenim que si  $n = 2r + 1$ , llavors

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{(-1)^{r+1} f(x)}{\prod_{k=0}^r (1 + x_k^2)}.$$

Demostrem-ho:

En aquest cas tenim un nombre parell de punts d'interpolació i tals que  $x_k = -x_{n-k}$ .

Per a  $n = 1$  tenim  $r = 0$  i  $x_0 = -x_1$ , i un càlcul directe a partir de la fórmula per a  $f[x_0, \dots, x_n]$  obtinguda a la secció 5, dóna

$$f[x_0, x_1, x] = - \left( \frac{1}{1+x^2} \right) \left( \frac{1}{1+x_0^2} \right) = \frac{-f(x)}{1+x_0^2}.$$

A partir d'aquí procedirem per inducció. Si suposem la fórmula vàlida per a qualsevol conjunt de  $n + 1 = (2r + 1) + 1$  punts  $(x_0, \dots, x_n)$ , i que per tant compleixen  $x_k = x_{n-k}$ , veurem que també és vàlida per a qualsevol conjunt de  $n + 3$  punts que compliran amb la mateixa simetria  $x_k = -x_{n+2-k}$ .

Si definim  $\phi[x] = f[x_1, \dots, x_{n+1}, x]$ , tenim, utilitzant que els valors de les diferències dividides no s'alteren en permutar els punts  $x$  on estan avaluades (vegeu la secció 5), que

$$\phi[x_0, x_{n+2}, x] = \phi[x_0, x, x_{n+2}]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\phi[x_0, x] - \phi[x, x_{n+2}]}{x_0 - x_{n+2}} \\
&= \frac{f[x_0, \dots, x_{n+1}, x] - f[x_1, \dots, x_{n+2}, x]}{x_0 - x_{n+2}} \\
&= f[x_0, \dots, x_{n+2}, x].
\end{aligned}$$

Per a la hipòtesi d'inducció, com que les  $x_j$  són simètriques per parelles, es verifica que

$$\phi(x) = \frac{(-1)^{r+1} f(x)}{\prod_{k=1}^r (1 + x_k^2)}.$$

I ara, essent  $x_0 = -x_{n+2}$ , resulta de la fórmula  $f[x_0, x_{n+2}, x] = -f(x)/(1+x_0^2)$ , que ja hem calculat més amunt (on la  $x_{n+2}$  d'ara és la  $x_1$  d'abans), que

$$\phi[x_0, x_{n+2}, x] = \frac{-f(x)}{1 + x_0^2} \cdot \frac{(-1)^{r+1}}{\prod_{k=1}^r (1 + x_k^2)},$$

com volíem provar.

D'una manera semblant es prova que per a  $n = 2r$  es verifica

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{(-1)^{r+1} f(x)x}{\prod_{k=0}^r (1 + x_k^2)}.$$

Com que  $(x - x_k)(x - x_{n-k}) = x^2 - x_k^2$ , i  $x_r = 0$  si  $n = 2r$ , resulta que

$$\prod_{k=0}^n (x - x_k) = \begin{cases} \prod_{k=0}^r (x^2 - x_k^2) & \text{per a } n = 2r + 1 \\ \frac{1}{x} \prod_{k=0}^r (x^2 - x_k^2) & \text{per a } n = 2r. \end{cases}$$

Resulta, doncs, que l'error en la interpolació pot ser expressat com

$$R_n(x) = (-1)^{r+1} f(x) g_n(x), \quad \text{amb } g_n(x) = \prod_{k=0}^r \frac{x^2 - x_k^2}{1 + x_k^2}.$$

Essent  $f(x)$  positiva a l'interval  $[-5, 5]$  i estant acotada tant per sobre com per sota amb números positius en aquest interval, es té que per a una  $x$  determinada  $R_n(x)$  convergeix o divergeix quan  $n \rightarrow \infty$ , d'acord amb si  $g_n(x)$  convergeix o divergeix quan  $n \rightarrow \infty$ .

Als càlculs que segueixen, una mica enredats, i que fan servir diverses eines de les que hem anat recollint, demostrarem que hi ha valors de  $x$  a  $[-5, 5]$  per als quals  $|g_n(x)|$  divergeix.

Per aconseguir-ho, comencem per escriure

$$|g_n(x)| = (e^{h \ln |g_n(x)|})^{\frac{1}{n}} \quad \left( \text{recordem que } h = \frac{10}{n} \right),$$



i ara tractarem de determinar  $\lim_{n \rightarrow \infty} h \ln |g_n(x)|$ . Si és positiu, vol dir que  $|g_n(x)|$  divergeix, mentre que convergeix si aquest límit és negatiu.

Considerem els números  $x$  de  $[-5, 5]$  que sense ser racionals són algebraics d'ordre 2, és a dir, arrels d'equacions de segon grau. Aquests punts formen un conjunt dens a  $[-5, 5]$ , i d'acord amb el teorema de Liouville que hem estudiat a l'apèndix del capítol 4, existeix una constant  $c$  tal, que  $|x - m/n| \geq c/n^2$  per a tots els racionals de la forma  $m/n$ . Resulta, doncs, que essent tots els punts  $x_k$  corresponents a la interpolació d'ordre  $n$ , racionals d'aquesta forma, es compleix

$$|x - x_k| \geq \frac{c}{n^2} = Kh^2 \quad (c = 100K),$$

per a tots els punts de la interpolació d'ordre  $n$  i tots els punts  $x$  algebraics d'ordre 2 no racionals.

Per a aquests punts  $x$  amb  $x \geq 1$  demostrarem que

$$\lim (h \ln |g_n(x)|) = \int_{-5}^0 \ln \frac{|x^2 - t^2|}{1 + t^2} dt$$

i llavors serà el signe d'aquesta integral el que decidirà sobre la convergència o no de  $R_n(x)$  al punt  $x$ .

Tenim

$$\ln |g_n(x)| = \sum_{k=0}^r \ln \frac{|x^2 - x_k^2|}{1 + x_k^2}.$$

Podem descompondre els termes de la suma com

$$\ln \frac{|x^2 - x_k^2|}{1 + x_k^2} = \ln |x + x_k| + \ln |x - x_k| - \ln |1 + x_k^2|,$$

i constatem que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^r h \ln |x - x_k| &\longrightarrow \int_{-5}^0 \ln |x - t| dt, \\ \sum_{k=0}^r h \ln |1 + x_k^2| &\longrightarrow \int_{-r}^0 \ln(1 + t^2) dt, \end{aligned}$$

puix que les funcions  $\ln |x - t|$  (recordem que  $|x - t| > 1$ ) i  $\ln(1 + t^2)$  són funcions contínues de  $t$  i les expressions de l'esquerra són les que hem fet servir al capítol 3 per a definir les integrals quan  $r \rightarrow \infty$  si  $n = 2r$ .

Falta demostrar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^r h \ln |x + x_k| = \int_{-5}^0 \ln |x + t| dt.$$

L'integrand no està acotat (té una singularitat) a  $t = -x$ , però malgrat això la integral impròpia convergeix (recordem que  $\int_0^x \ln t dt = x \ln x - x$ , que

tendeix a 0 quan  $x$  tendeix a 0). Per aproximar-la amb les sumes dividim la integral en tres parts, per tal d'aïllar la singularitat a l'interval  $[-x - \delta, -x + \delta]$ .

Per una banda tenim sense problemes, puix que els integrands són continus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|x+x_k| > \delta} h \ln|x+x_k| = \int_{-5}^{-x-\delta} \ln|x+t| dt + \int_{-x+\delta}^0 \ln|x+t| dt.$$

Per l'altra banda

$$\left| \sum_{|x+x_k| \leq \delta} h \ln|x+x_k| \right| \leq 2h|\ln(Kh^2)| + \left| \sum_{h \leq |x+x_k| \leq \delta} h \ln|x+x_k| \right|,$$

on hem tingut en compte que més prop que  $h$  de  $-x$  només hi ha dos punts de les  $x_k$ .

El primer terme de la dreta de la desigualtat tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ , perquè

$$h|\ln(Kh^2)| = h|\ln K + 2\ln h| \leq h|\ln K| + 2h|\ln h|,$$

que tendeix a 0 quan  $h \rightarrow 0$ .

Per al segon terme tenim

$$\sum_{h \leq |x+x_k| \leq \delta} h \ln|x+x_k| \leq 2 \int_0^\delta |\ln t| dt = 2\delta|\ln \delta - 1|,$$

que tendeix a 0 quan  $\delta \rightarrow 0$ .

Ara, prenent primer  $\delta$  prou petita per a fer aquest terme tan petit com vulguem, i després fent tendir  $n$  a  $\infty$ , per fer que l'altre terme sigui tan petit com vulguem, resulta que

$$\sum_{|x+x_k| \leq \delta} h \ln|x+x_k| \rightarrow 0.$$

Com que

$$\int_{-x-\delta}^{-x+\delta} \ln|x+t| dt = 2 \int_0^\delta \ln t dt = 2(\delta \ln \delta - \delta)$$

també tendeix a 0, resulta que no ens hem de preocupar del que passa a l'interval  $[-x - \delta, -x + \delta]$  per a  $\delta$  prou petit, i queda establert que

$$h \ln|g_n(x)| \rightarrow \int_{-5}^0 \ln \frac{|x^2 - t^2|}{1 + t^2} dt \quad \text{quan } n \rightarrow \infty,$$

als punts  $x$  de l'interval  $[1, 5]$  que són algebraics d'ordre 2. (Si fossin algebraics de qualsevol altre ordre,  $m$ , diguem, seria el mateix).

El problema s'ha reduït, doncs, a determinar el signe d'aquesta darrera integral, ja que si és positiva, llavors per a  $n$  prou gran  $|g_n(x)|$  i  $R_n(x)$  tendeixen a  $\infty$ , mentre que si és negativa tendeixen a 0.

Podem expressar la integral com la suma

$$\int_0^x \ln(x-t) dt + \int_x^5 \ln(t-x) dt + \int_0^5 (\ln(t+x) - \ln(1+t^2)) dt$$

$$= (5+x) \ln(5+x) + (5-x) \ln(5-x) - 5 \ln 26 - 2 \operatorname{arctg} 5 + 10$$

Amb un càlcul numèric, que deixem com a exercici, es comprova que hi ha un número  $a$ , de valor aproximat  $3.6334\dots$  de manera que la integral és negativa per a  $|x| < a$ , i positiva per a  $|x| > a$ .

La conclusió és que  $P_n(x)$  a l'interval  $[-5, 5]$  no convergeix a la funció  $f(x) = 1/(1+x^2)$  que interpola quan  $n \rightarrow \infty$  si  $x$  és algebraic i  $|x| > a$ .

La raó pregona per la qual tenim aquest interval de convergència es troba en la consideració de  $f$  com a funció de variable complexa: hi ha una determinada corba (lemniscata), que no ha de contenir cap singularitat de  $f$ , que són  $x = \pm i$ , al seu interior, i que determina l'interval de convergència. Això s'assembla al que dèiem en una secció anterior sobre el radi de convergència de la sèrie de potències centrada en un punt d'una funció analítica venint determinat pel màxim cercle al pla complex, centrat en el punt i no contenint cap singularitat.

Bernstein ha demostrat que la interpolació polinomial amb punts equidistants (incloent els extrems de l'interval) a l'interval  $[-1, 1]$  de la funció  $f(x) = |x|$  no convergeix a cap punt, excepte a  $-1, 0$  i  $1$ , quan  $n \rightarrow \infty$ .

També hi ha un teorema que diu que donada una successió qualsevol de conjunts de punts d'interpolació en un interval finit, amb el nombre de punts creixent (tendint a infinit), llavors existeix una funció contínua a la qual el polinomi d'interpolació no convergeix uniformement.

Tot i això ja hem esmentat que si la funció té derivada de segon ordre contínua a  $I$  (és a dir, és de classe  $C^2$ ), llavors la interpolació de Txebixev dóna polinomis que tendeixen uniformement a  $f$  en l'interval  $I$  quan  $n \rightarrow \infty$ .



## Capítol 8

# Funcions de múltiples variables

### 8.1 Introducció

Quan *Newton* i *Leibniz* van bastir el Càlcul infinitesimal, ja van trobar que no n'hi havia prou amb les funcions d'una sola variable real per a matematitzar els problemes que se'ls presentaven. És així com *Newton*, per exemple, no publicà els seus *Principia* mentre li mancà la demostració del fet que el camp gravitatori d'un cos esfèric és, fora de l'esfera, igual que el que produeix tota la massa del cos situada al seu centre. Per a aconseguir aquesta demostració, el que hagué de fer, essencialment, fou integrar una funció de les tres variables que defineixen la posició d'un punt en el cos. Les funcions de més d'una variable real són utilitzades per *Clairaut*, *Laplace* i *Poisson* en continuar els estudis dels camps gravitacionals produïts pels cossos. També es plantegen amb *Euler* en estudiar la hidrodinàmica (a ell es deu la notació que es fa servir per a les derivades parcials). El mateix *Euler* i *D'Alembert* estudiaren les vibracions d'una corda tensa, en què el desplaçament transversal és funció tant de la posició al llarg de la corda com del temps. *Fourier*, més tard, al principi del segle XIX, estudià la distribució de la temperatura en un cos i la seva evolució en el temps. Tenim, doncs, que les funcions de més d'una variable serveixen per a la descripció de situacions on no n'hi ha prou amb un número real per a fixar el punt que volem considerar. Tal és el cas amb les superfícies, que limiten i donen forma als cossos, i també en les modelitzacions de fenòmens físics com són les vibracions, les distribucions de temperatures o velocitats, en què calen dos o més números per a determinar el punt o estat on ens trobem. També convé fer notar que tant les funcions d'una com de més d'una variable real tenen un paper fonamental a l'hora d'expressar matemàticament les lleis de la natura que permeten explicar algunes parts de l'experiència i fins i tot fer-ne prediccions. Aquesta expressió de les lleis tot sovint pren la forma d'equacions diferencials, on s'expressen relacions entre certes funcions i les seves derivades. És *Cauchy* qui féu la sistematització del càlcul de diverses variables que, amb lleugeres modificacions, encara fem servir. En particular *Cauchy*, a més d'estar

motivats pel seu interès a bastir la teoria del càlcul, també ho està pels seus estudis sobre l'elasticitat.

En aquest capítol donarem el càlcul diferencial per a poder tractar les equacions diferencials ordinàries que apareixen als capítols següents, i deixarem la teoria de la integració de funcions amb múltiples variables, incloent la seva aplicació al càlcul d'àrees de superfícies i volums de cossos pel capítol 11. Per a l'apèndix deixem els aspectes una mica més complicats.

Molts dels mètodes d'aquest capítol són els mateixos que els dels capítols anteriors, de manera que no caldrà tornar a repetir l'anàlisi detallada. Si alguna propietat no és ben bé igual, algunes vegades no costa gaire d'obtenir-la mitjançant una generalització del que hem vist als capítols anteriors.

## 8.2 L'espai $\mathbb{R}^n$

Al capítol 2 hem introduït el concepte dels números reals com a punts de la recta, i n'hem estudiat algunes de les propietats que els corresponen: aquelles que ens eren més útils per al desenvolupament del càlcul de les funcions de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . Per tractar amb les funcions de diverses variables, haurem de definir l'espai en el qual estan definides. És a dir, haurem d'especificar quins són els elements d'aquest espai (a  $\mathbb{R}$  són els números reals), com operem al·gèbricament amb ells (els voldrem sumar i multiplicar per números) i també voldrem un concepte de proximitat (és a dir, de distància), per tal de poder trobar límits, derivades i integrals.

Les funcions de múltiples variables tenen el seu domini en l'espai que denotarem per  $\mathbb{R}^n$  (de fet seran les de  $n$  variables). Aquest espai, que anomenarem *espai euclidià de dimensió  $n$* , té per elements o *punts* les  $n$ -ades (és a dir, conjunts de  $n$  números) ordenades de números reals, que denotarem genèricament per  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

L'espai  $\mathbb{R}^n$  té a més una estructura al·gèbrica d'espai vectorial (i per tant els elements  $x$ , els podem anomenar *vectors* a més de *punts*), definida mitjançant la suma:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

i la multiplicació per un número real (que s'anomenen *escalars* en aquest context):

$$ax = (ax_1, \dots, ax_n).$$

Ja hem vist a la secció 7.9 que això forma un *espai vectorial*. Aquest espai vectorial té una *base* formada pels vectors  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , és a dir, totes les components nul·les excepte la que ocupa la posició  $i$ -èsima, que val 1. Amb aquesta base el vector  $x$  es pot expressar com

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Naturalment, a més d'aquesta, hi ha d'altres bases: qualsevol col·lecció de  $n$  vectors linealment independents.

A més de l'estructura algebraica,  $\mathbb{R}^n$  té una mètrica, és a dir un concepte de distància. Aquesta distància es pot definir mitjançant el *producte escalar* dels vectors:  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ , que ens dona  $\langle x, x \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2$ . La *distància* entre  $x$  i  $y$ , la denotem amb  $|x - y|$  (d'acord amb la notació que hem utilitzat per a  $n = 1$ ), i la definim mitjançant  $|x - y|^2 = \langle x - y, x - y \rangle$ , és a dir

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Aquesta distància compleix evidentment les condicions de *reflexivitat*:  $|x - x| = 0$ , i de *simetria*:  $|x - y| = |y - x|$ , i a més l'anomenada *desigualtat del triangle*:  $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ , que es dedueix fàcilment: De fet, si fem  $a = x - z$ ,  $b = z - y$ , resulta  $a + b = x - y$ , i la desigualtat queda  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . De la definició i les propietats del *producte escalar* tenim  $|a + b|^2 = \langle (a + b), (a + b) \rangle = \langle a, a \rangle + 2\langle a, b \rangle + \langle b, b \rangle$ . Com que  $|\langle a, b \rangle| \leq |a||b|$  segons la *desigualtat de Cauchy-Schwartz* que ja hem estudiat, resulta que  $|a + b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$ , que és el que volíem.

El punt  $0 = (0, \dots, 0)$ , que té totes les components nulles, l'anomenem *l'origen o el zero* de  $\mathbb{R}^n$ .

El valor  $|x|$ , que és la distància de  $x$  a l'origen  $0$ , l'anomenem també la *norma* de  $x$ .

De manera anàloga a com hem definit els intervals a  $\mathbb{R}$ , definim la *bola oberta* centrada a  $x$  i de radi  $r > 0$ , denotada per  $B(x; r)$ , com el conjunt de punts de  $\mathbb{R}^n$  que disten de  $x$  menys que  $r$ , és a dir

$$B(x; r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}.$$

La *bola tancada* centrada a  $x$  i de radi  $r$ ,  $\bar{B}(x; r)$  és el conjunt de punts de  $\mathbb{R}^n$  que no disten més que  $r$  de  $x$ :

$$\bar{B}(x; r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq r\}.$$

Quan  $n = 2$ , tenim l'espai  $\mathbb{R}^2$ , al qual ens referim com el *pla* (real), i en lloc de *bola*, fem servir la paraula *disc*.

Un concepte útil a l'hora de descriure certes propietats és el d'*entorn d'un punt*  $x$ , que vol dir qualsevol conjunt de  $\mathbb{R}^n$  que contingui una bola centrada a  $x$  i continguda al conjunt.

Diem que un conjunt de  $\mathbb{R}^n$  és *obert* si és entorn de cada un dels seus punts, és a dir, si cada un dels seus punts té una bola centrada en ell continguda al conjunt. Així, per exemple,  $D(0; 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$  és un conjunt obert (deixem com a exercici demostrar-ho).

Un *conjunt tancat*, en canvi, és aquell el complement del qual, és a dir el conjunt de punts de  $\mathbb{R}^n$  que no li pertanyen, és obert. Per exemple  $\bar{D}(0; 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$  és tancat (deixem com a exercici demostrar-ho).

Diem que un punt és *interior* a un conjunt  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  si existeix una bola centrada al punt i continguda al conjunt.

També és útil el concepte de *punt d'adherència* d'un conjunt de  $\mathbb{R}^n$ : és aquell punt tal que tot entorn d'ell té una intersecció no buida amb  $C$ . El conjunt de punts d'adherència de  $C$  és tancat (demostrau-ho com a exercici) i s'anomena l'*adherència* o *clausura* de  $C$ , i es denota per  $\bar{C}$ . De fet és el mínim conjunt tancat que conté  $C$ , en el sentit que qualsevol conjunt tancat que contingui  $C$  conté la seva adherència.

Així, consegüentment,  $\bar{B}(x; r)$  és la clausura de  $B(x; r)$  (com a exercici, podem fer-ho veure).

El concepte de *punt límit* o d'*acumulació* d'un conjunt  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  també es fa servir:  $x$  és d'acumulació de  $C$  si tot entorn de  $x$  interseca  $C$  en algun punt diferent de  $x$ . La diferència entre els punts d'adherència i els d'acumulació de  $C$ , la constitueixen els *punts aïllats* de  $C$ , és a dir els punts de  $C$  que tenen un entorn que no conté cap altre punt de  $C$ : són d'adherència però no d'acumulació.

Direm que un conjunt és acotat si està contingut en una bola centrada a 0 (l'origen) de radi suficientment gran.

Els conceptes d'obert, tancat, entorn, adherència, acumulació, acabats de definir corresponen al que s'anomena *topologia* de  $\mathbb{R}^n$ .

### 8.3 Successions a $\mathbb{R}^n$ . Completesa i compacitat

Una aplicació  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$  s'anomena una *successió d'elements de  $\mathbb{R}^n$* . Com en el cas de  $n = 1$ , podem indicar amb un subíndex el natural  $n$  el qual avaluem  $s: s(n) = x_n$ , i llavors denotem la successió simplement per  $\{x_n\}$ , utilitzant la mateixa notació pel conjunt de punts a  $\mathbb{R}^n$  que són imatge de  $\mathbb{N}$  sota  $s$ .

Ara també podem definir el concepte de *límit d'una successió*, dient que  $x$  és *límit* de  $\{x_n\}$ , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tal, que si } n > n_0, \text{ llavors } |x - x_n| < \varepsilon.$$

Tal com hem fet quan  $n = 1$ , denotem això per  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  o bé  $\{x_n\} \rightarrow x$  quan  $n \rightarrow \infty$ .

Quan aquest límit existeix és únic (exercici) i diem que la successió és convergent.

També diem que  $\{x_n\}$  és una *successió de Cauchy* si  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$  tal que si  $m, n > n_0$ , llavors  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ .

L'espai  $\mathbb{R}^n$  hereta de  $\mathbb{R}$  la propietat de la *completesa*: una successió és de Cauchy si i sols si és convergent. Deixem la demostració com a exercici.

El conjunt  $\{x_n\}$  de punts imatge d'una successió pot tenir diversos punts d'acumulació. Resulta, amb una demostració ben semblant a la que hem fet a l'apèndix del capítol 2 per a  $n = 1$ , que tota successió infinita i acotada a  $\mathbb{R}^n$  (vol dir que el conjunt  $\{x_n\}$  és acotat), té almenys un punt d'acumulació (propietat de *Weierstrass*).



També val la propietat de *Heine-Borel*: Tot recobriment per conjunts oberts d'un conjunt tancat i acotat de  $\mathbb{R}^n$  té necessàriament un subrecobriment finit. La demostració, que es deixa com a exercici, és molt similar a la que hem fet a l'apèndix del capítol 2 per a  $n = 1$ .

A  $\mathbb{R}^n$  les propietats de Weierstrass i Heine-Borel són equivalents. Un conjunt que té aquestes propietats s'anomena *compacte*. Resulta, doncs, que els compactes de  $\mathbb{R}^n$  són els tancats i acotats.

## 8.4 Les funcions entre espais euclidians

Una *funció* o *aplicació* de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ , denotat per  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  és una regla que ens diu quin element (de manera única) de  $\mathbb{R}^m$  fem correspondre a cada element d'un subconjunt donat de  $\mathbb{R}^n$ , que anomenem el *domini de f* i que denotem per  $D(f)$ .

D'una manera tan formal com quan ho hem definit al capítol 2 per als números reals, podem dir que una funció és un subconjunt  $F$  del producte cartesià de  $\mathbb{R}^n$  per  $\mathbb{R}^m$  (que, recordem, són les parelles de la forma  $(x, y)$ , amb  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $y \in \mathbb{R}^m$ ), tal que si  $(x, y)$  i  $(x, z)$  estan a  $F$ , llavors necessàriament  $y = z$ .  $D(f)$  és el subconjunt de  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $F$  conté una parella de la forma  $(x, y)$ . Quan  $(x, y) \in F$ , posem  $y = f(x)$ .

Diem que són funcions de múltiples variables quan  $n > 1$ . Que  $m$  sigui més gran que 1 no té tanta importància: sempre podem pensar  $f$  com  $m$  funcions de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ . Posarem  $f : x \mapsto f(x)$  per indicar el valor que pren  $f(x)$  a  $\mathbb{R}^m$  per a cada  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Si tenim una funció  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , podem pensar en les *components*  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  de la funció  $f$  a  $\mathbb{R}^m$ , que definim prenent per  $f_i(x)$  la  $i$ -èsima component de  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ .

Diem que una funció  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  és *acotada* al seu domini  $D(f)$  si existeix un número  $M$  positiu tal, que  $|f(x)| < M$  per a tot  $x \in D(f)$ .

Les funcions de diverses variables, les podem definir utilitzant les operacions algèbriques i les funcions ja conegudes de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Per exemple, un polinomi en diverses variables és una suma finita de termes de la forma  $ax_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ , on  $a \in \mathbb{R}$ , i les  $\alpha_i$  són números enters positius o nuls.

Així podem escriure el polinomi  $P$  com

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

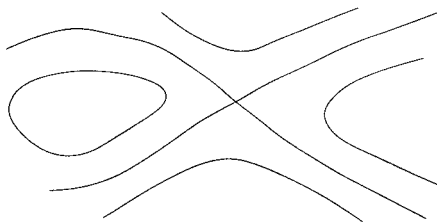
on per  $\alpha$  designem la col·lecció  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , per  $|\alpha|$  la suma  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , i el sumatori s'estén sobre totes les col·leccions de números enters positius o 0 que tinguin per suma  $n$  o menys. Si per a alguna  $\alpha$  amb  $|\alpha| = n$  tenim que  $a_\alpha \neq 0$ , diem que  $P$  té *grau*  $n$ .

Així podem definir

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y), \end{aligned}$$

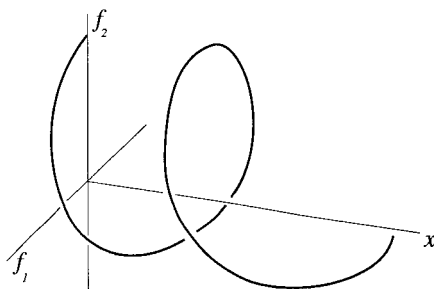
prenent, per exemple  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , o bé  $f(x, y) = e^{xy}$ , o bé  $f(x, y) = \int_0^y e^{-(x+\eta)} d\eta$ , etc.

És difícil de representar gràficament una funció de múltiples variables. Ja sabem que la *gràfica* és el subconjunt  $F$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  que es *projecta* a  $\mathbb{R}^n$  (és a dir que a cada element  $(x, y)$  de  $F$  li correspon un sol element  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ , que anomenem *projecció de  $(x, y)$  sobre  $\mathbb{R}^n$* ). En funció dels valors de  $n$  i de  $m$ , aquesta gràfica és més o menys difícil de dibuixar. Si  $n = 1$  i  $m > 1$ , podem representar gràficament cada una de les components  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $n = 2$ , tenim la possibilitat de representar  $f_i$  amb les seves *corbes de nivell*, que són els conjunts de  $\mathbb{R}^n$  on la funció pren un valor determinat. En resulta una mena de plànol topogràfic, en què cada línia correspon a un valor diferent.

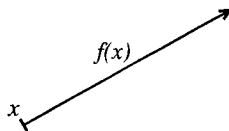


En aquesta representació les “fondalades”, els “cims” i els “colls”, interpretant els valors de la funció com a “altures”, representen mínims, màxims i punts de sella de la funció (ja ho estudiarem detingudament una mica més endavant). Certament, per a obtenir una representació que sembli un plànol, la funció  $f$  ha de ser prou “regular”, en el sentit de derivabilitat que estudiarem tot seguit.

Si  $n = 1$ ,  $m > 1$  i no volem descompondre la funció  $f$  en les  $f_i$ , parlem d’una *corba* o *trajectòria* a  $\mathbb{R}^m$  (una altra vegada, si  $f$  és prou regular). La representem com una línia a  $\mathbb{R}^m$ . Si  $m = 2$  no és gaire difícil de dibuixar-ho o imaginar-ho. Per exemple si prenem  $f_1(x) = \sin x$ ,  $f_2(x) = \cos x$ , obtenim una corba anomenada *hèlix*.



Quan es tracta d’una aplicació  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $m = n$ ) en lloc d’imaginar-la com abans, prenent les  $f_i$ , pot resultar més enriquidor pensar com un *camp vectorial*, és a dir, imaginar els punts de la imatge  $f(x)$  com a vectors, posant-los l’origen al punt del qual són la imatge.



D'aquesta manera a cada  $x$  al domini de  $f$  li associem un vector. Aquesta visió té avantatges en considerar equacions diferencials i alguns aspectes de la geometria diferencial.

Quan  $n$  és petit, en lloc de designar les components de  $x$  per  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , es pot fer servir  $(x, y)$  si  $n = 2$  i  $(x, y, z)$  si  $n = 3$ . Això simplifica la notació en alguns casos.

## 8.5 Continuitat i límits

Com en el cas d'una variable (és a dir  $n = 1, m = 1$ ), dins de l'abast d'aquest llibre, ens interessaran les funcions *contínues*, o almenys *contínues a trossos*, que són les que solem trobar en les aplicacions més senzilles del càlcul.

El concepte de continuïtat és essencialment el mateix que el que hem donat per a les funcions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , canviant només el valor absolut a  $\mathbb{R}$  per les normes a  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$ .

Diem que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  és *contínua* al punt  $x$  si per cada  $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ , existeix  $\delta > 0$  tal que si  $|x - y| < \delta$ , llavors  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Amb paraules més planeres, això equival a dir que  $f$  és contínua a  $x$  si acostant  $y$  tant com convingui a  $x$ , podem acostar  $f(y)$  tant com vulguem a  $f(x)$ . Al terme "s'acosta tant com vulguem" s'amaga el concepte de límit.

També com en el cas de funcions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definim el *límit de  $f(y)$  quan  $y$  tendeix a  $x$* , dient que és un punt  $l$  de  $\mathbb{R}^m$  tal que per cada  $\varepsilon > 0$ , existeix  $\delta > 0$  amb la propietat que, si  $0 < |x - y| < \delta$ , llavors  $|l - f(y)| < \varepsilon$ . Això ho denotem per  $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = l$  o bé  $f(y) \rightarrow l$  quan  $y \rightarrow x$ , i diem que  $f(y)$  *tendeix a  $l$  quan  $y$  tendeix a  $x$* .

Observem que no cal que  $f$  estigui definida a  $x$  (és a dir, que  $x$  estigui al domini de  $f$ ) per tal que el límit existeixi, només cal que ens hi puguem acostar tant com vulguem.

Amb relació a aquesta definició, observem que si la norma de  $x$  és menor que  $\varepsilon$ ,  $|x| < \varepsilon$ , llavors de la definició de la norma surt que el valor absolut de cada component de  $x$  és menor que  $\varepsilon$ ,  $|x_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, n$ . Per tant, dir que  $f$  és contínua equival a dir que cada una de les seves components a  $\mathbb{R}^m$  ho és.

A diferència del que passa amb funcions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $n > 1$  no té cap sentit parlar de límits per la dreta o per l'esquerra.

Perquè  $f$  sigui contínua a  $x$  no n'hi ha prou que una funció  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sigui contínua al punt  $x$  respecte de cada una de les variables  $x_i, i = 1, \dots, n$ , mantenint les altres constants.

Així, la funció

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

és contínua a  $0 = (0, 0)$  respecte de  $x$ , mantenint  $y$  constant ( $= 0$ ), i respecte de  $y$ , mantenint  $x$  constant ( $= 0$ ), però certament no és contínua a  $0$ , ja que quan  $x = y$ , la funció val  $1$ , i hi ha punts amb  $x = y$  tan a prop de  $0$  com vulguem.

Una altra manera de definir continuïtat és per successions, tal com ho hem fet en el cas d'una variable. Així,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  és contínua a  $x$  si i sols si per a tota successió  $\{x_j\} \rightarrow x$  al domini de  $f$ , tenim que  $f(x_j) \rightarrow f(x)$ . La demostració d'aquesta propietat és essencialment la mateixa que en el cas d'una variable.

Diem que una funció és *contínua en un conjunt*, si ho és a cada punt del conjunt. D'acord amb les definicions donades anteriorment, resulta que  $f$  és contínua en un conjunt  $C$  si el conjunt de punts que s'*apliquen* a un obert (és a dir que la seva imatge pertany a aquest obert), és obert, o, en altres paraules, si la *pre-imatge* d'un obert és oberta. Perquè això tingui sentit encara que  $C$  no sigui obert hauríem de dir *obert relatiu*, és a dir, la intersecció d'un obert a  $\mathbb{R}^n$  amb  $C$ . Deixem com a exercici l'anàlisi d'aquestes equivalències.

D'una manera del tot anàloga a com ho hem fet per a les funcions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tenim que una funció  $f$  contínua en un conjunt compacte  $C$  és acotada. A més, cada una de les seves components  $f_i$  ateny el seu màxim i el seu mínim a  $C$ .

Diem que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  és *uniformement contínua* en un subconjunt  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal, que } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in C,$$

on el valor de  $\delta$ , que depèn de  $\varepsilon$ , es pot prendre independentment dels punts  $x, y \in C$ .

Com en el cas de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , una funció  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  contínua a  $C$  compacte, és uniformement contínua a  $C$ .

La demostració d'aquestes propietats es pot fer seguint els mateixos passos que en el cas d'una sola variable, i ho deixem com a exercici.

També com en el cas de les funcions d'una variable, podem parlar de l'*ordre de creixement de les funcions*. Així, diem que  $f(x)$  té *ordre de creixement més petit* que  $x$  quan  $|x| \rightarrow \infty$  si  $|f(x)|/|x| \rightarrow 0$  quan  $|x| \rightarrow \infty$ . Ho escrivim posant  $f(x) = o(|x|)$  quan  $|x| \rightarrow \infty$ . També diem que  $f(x)$  té *ordre de creixement no més gran* que  $|x|$  quan  $|x| \rightarrow \infty$ , ( $f(x) = O(|x|)$ ), si existeix  $M > 0$  tal que per a tota  $|x|$  més gran que algun valor tenim  $|f(x)|/|x| < M$ .

D'una manera anàloga podem considerar l'ordre de creixement de  $f$  quan  $x$  tendeix a algun valor  $a$ . Així, diem que  $f$  és d'*ordre de creixement més petit* que  $g$  quan  $x \rightarrow a$ , i ho escrivim  $f = o(g)$  quan  $x \rightarrow a$  si  $|f(x)|/|g(x)| \rightarrow 0$  quan

$x \rightarrow a$ . I també diem que  $f$  és d'ordre de creixement no més gran que  $g$  quan  $x \rightarrow a$ , escrit  $f = O(g)$  quan  $x \rightarrow a$ , si hi ha un número  $M$  positiu tal, que per tota  $x$  prou a prop de  $a$ , llavors  $|f(x)|/|g(x)| < M$ .

Per exemple, tenim que  $e^{-|x|^2} = o(e^{a|x|})$  quan  $|x| \rightarrow \infty$  per a qualsevol valor negatiu de  $a$ , i que  $P(x) = o(e^{a|x|})$  quan  $|x| \rightarrow \infty$  si  $P$  és qualsevol polinomi en  $x$  i  $a > 0$ .

## 8.6 Les aplicacions lineals

Una característica fonamental del càlcul infinitesimal és la de visualitzar les funcions “regulars” com a “localment lineals”. És a dir, que si fem servir un microscopi prou poderós, una funció de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  es veu aproximadament com una funció que té per gràfica una recta (la tangent) en el punt considerat. De fet tenim que  $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$ , quan  $h \rightarrow 0$ , i negligint  $o(h)$  tenim la linearització de què parlem. Això mateix passa amb les funcions de múltiples variables: podem, si són prou “regulars”, cosa que encara està per definir, aproximar-les per una suma d'una funció constant i d'una funció lineal, és a dir, per una mena de “tangent” al punt considerat.

Aquest paper de les funcions lineals les fa fonamentals per al càlcul, i així com en el cas de funcions d'una sola variable no hi havia gaire dificultats tècniques, en el cas de múltiples variables, les funcions lineals requereixen una mica d'estudi.

En aquesta secció farem un curt resum de les propietats més importants de les aplicacions lineals. Deixem que el lector el completi consultant un text d'àlgebra lineal.

Diem que  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  és una *funció* o *aplicació lineal* si compleix:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{i} \quad f(ax) = af(x),$$

per a tota  $a \in \mathbb{R}$ .

Resulta que si  $f$  és lineal, llavors es compleix  $f(0) = 0$ , ja que  $f(0) = f(x-x) = f(x) - f(x) = 0$ .

Ja sabem que qualsevol punt de  $\mathbb{R}^n$  es pot expressar com a combinació lineal dels vectors (punts) d'una base. Si prenem per base la col·lecció  $\{e_j\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , que hem considerat a la secció 2, resulta que n'hi ha prou amb conèixer els valors de  $f$  a aquests punts, per conèixer-la a qualsevol:

Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , llavors

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j).$$

Posant  $a_{ij} = f_i(e_j)$ , i utilitzant la notació matricial (vegeu el capítol 1), ens

queda  $f(x) = Ax$ , on

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Recordem que la multiplicació matricial ens diu que la component  $i$ -èsima de  $f$  ens és donada per

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

Com que la funció  $f$  ens ve definida per la matriu  $A$ , les identificarem en molts casos en parlar-ne, i podem dir l'aplicació  $A$ , si això no es presta a confusió, per tal d'estalviar-nos paraules i símbols.

Una aplicació lineal ens porta, doncs, els vectors  $e_j$  als vectors  $Ae_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , que a  $\mathbb{R}^m$  poden ser o no linealment independents. Certament no ho seran si  $m < n$ .

El conjunt  $N(f)$  o simplement  $N$  de vectors de  $\mathbb{R}^n$  que van a parar al 0 de  $\mathbb{R}^m$  s'anomena *nucli de l'aplicació  $f$* . Resulta que si dos vectors  $x, y$  són del nucli, llavors també les combinacions lineals d'ells dos ho són:

Si  $f(x) = 0$  i  $f(y) = 0$ , llavors, per la linearitat de  $f$ :  $f(ax + by) = af(x) + bf(y) = 0$ .

Per tant formen un espai vectorial (de fet un subespai de  $\mathbb{R}^n$ ), que té una dimensió, és a dir un nombre màxim de vectors linealment independents, igual a  $n$  o menys. Denotem per  $q$  aquesta dimensió.

La imatge sota  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  és un conjunt de  $\mathbb{R}^m$ , que designem per  $R(f)$ , i que conté totes les combinacions lineals dels vectors  $Ae_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . És per tant un espai lineal que té per base, entre d'altres, una col·lecció de  $\{Ae_j\}$  amb un nombre màxim de vectors linealment independents. Suposem que  $r$ , que és més petit o igual que  $n$ , és aquest número, que anomenem *rang* de  $f$ .

Un teorema important de l'àlgebra lineal, que no demostrarem aquí, ens diu que  $q + r = n$ .

En el cas que tinguem  $n = m$ , resulta del que hem dit, que si el *rang* de  $f$  és el màxim, és a dir  $n$ , llavors necessàriament  $N(f)$ , el nucli només conté l'element 0 ( $q = 0$ ). Sota aquestes condicions la funció  $f$  és bijectiva de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , és a dir la imatge de  $\mathbb{R}^n$  sota  $f$  cobreix tot  $\mathbb{R}^n$  i a més no hi ha dos punts de  $\mathbb{R}^n$  que tinguin la mateixa imatge.

El primer se segueix del fet que  $\{Ae_j\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , és una base de  $\mathbb{R}^n$  i, per tant tot vector a  $\mathbb{R}^n$  n'és combinació lineal, mentre que la injectivitat correspon a si  $f(x) = f(y)$ , llavors  $f(x - y) = 0$ , i com que  $N(f) = \{0\}$  tenim que  $x - y = 0$ .

En aquest cas, doncs, resulta que  $f$  té una inversa definida a tot  $\mathbb{R}^n$ . Aquesta inversa, que designem per  $f^{-1}$ , és lineal, ja que per la linearitat de  $f$  tenim

$$f(f^{-1}(ax + by)) = ax + by = f(af^{-1}(x) + bf^{-1}(y)),$$

i com que  $f$  és injectiva se segueix la igualtat dels termes entre parèntesis: és a dir  $f^{-1}$  és lineal.

A  $f^{-1}$  li correspon, per tant, una matriu que designem per  $A^{-1}$ , de manera que  $f^{-1}(x) = A^{-1}x$  en el sentit de la notació matricial que estem utilitzant. Com en el cas de  $f$ , la matriu corresponent a  $f^{-1}$ , la trobarem veient on s'apliquen els vectors  $\{e_j\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Tindrem que  $f^{-1}(e_j) = A^{-1}e_j$ . Quan una matriu  $A$  té inversa diem que és *no singular*. Suposem que el lector ja coneix com obtenir la matriu  $A^{-1}$  a partir de  $A$  pels mètodes que es troben a qualsevol text d'àlgebra lineal.

Observem, doncs, que les aplicacions lineals  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  que tenen rang  $n$  preserven l'estructura algebraica de  $\mathbb{R}^n$  i per aquest motiu diem que  $f$  és un *isomorfisme lineal* de  $\mathbb{R}^n$ . Si no exigim que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tingui inversa, llavors podria perdre's part de l'estructura de  $\mathbb{R}^n$  (per exemple es podria perdre dimensió), i  $A$  podria ser *singular*, és a dir, no tenir inversa. En aquests casos parlem més genèricament de  $f$  com d'un *endomorfisme lineal*.

De l'àlgebra lineal sabem que a una matriu  $A$  de  $n \times n$ , corresponent doncs a una aplicació lineal  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , li associem un número que s'anomena el *determinant* de  $A$ . El determinant es defineix inductivament respecte de  $n$ . Per a  $n = 1$ , el determinant és l'únic element de la matriu  $A$ , i per a  $n > 1$  definim

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j},$$

on  $A_{1j}$  és la matriu de  $(n-1) \times (n-1)$ , que s'obté de suprimir el primer rengle i la  $j$ -èsima columna de  $A$ . Aquí hem fet servir els termes del primer rengle per a definir el determinant, però hauríem pogut fer servir qualsevol rengle o qualsevol columna amb el mateix resultat.

Com a ajut intuïtiu fem notar, sense demostrar-ho que el determinant de  $A$  representa el "volum" (en dimensió  $n$ ) del paralelepíped determinat pels vectors  $\{Ae_j\}$  a  $\mathbb{R}^n$ . Amb això resulta intuïtiu que una aplicació  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  és injectiva si i sols si  $\det A \neq 0$ , que ja sabem de l'àlgebra lineal que caracteritza les matrius  $A$  no singulars.

Per a més detalls de l'àlgebra lineal es pot consultar el text de S. Lang de la bibliografia.

Al capítol 10, dins del context de les equacions diferencials, insistirem una mica més sobre els aspectes intuïtius dels isomorfismes de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  i també direm alguna cosa sobre els valors i vectors propis dels endomorfismes lineals.

Per acabar aquesta secció sobre les funcions lineals, fem notar que són contínues. Per a fer-ho veiem que per a tota matriu  $A$  de  $m \times n$  corresponent a una aplicació lineal  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , podem trobar un número positiu  $M$  de manera que

$$|Ax| \leq M|x|,$$

per a qualsevol punt  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Efectivament, si prenem  $K = \sup_{i,j} |a_{ij}|$ , resulta que

$$\begin{aligned} |Ax|^2 &= \sum_{i=1}^m (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n)^2 \\ &\leq mK^2(x_1 + \dots + x_n)^2 \\ &\leq mK^2n(x_1^2 + \dots + x_n^2) \leq M^2|x|^2, \end{aligned}$$

prenent  $M^2 = mK^2n$ .

Aquí hem fet servir que  $(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$ , la qual cosa s'obté de la desigualtat de Cauchy aplicada al producte escalar dels vectors  $x$  i  $(1, \dots, 1)$ .

D'aquesta desigualtat se segueix de seguida la continuïtat de  $f$ . Efectivament,  $f(x+h) - f(x) = f(h)$ , i del que tot just hem vist

$$|f(h)| \leq M|h|.$$

Per tant si volem que això sigui més petit que  $\varepsilon > 0$ , només hem de prendre  $|h| < \varepsilon/M$ .

Aprofitant l'expressió acabada d'obtenir, també podem veure que si la matriu  $A$  no és nul·la, és a dir, si té algun element diferent de 0, llavors existeix un vector  $x \neq 0$  per al qual

$$|Ax| \geq a|x|.$$

Efectivament, suposem que  $a_{pq} \neq 0$ . Tenim

$$|Ax|^2 \geq (a_{p1}x_1 + \dots + a_{pq}x_q + \dots + a_{pn}x_n)^2.$$

Si prenem  $x$  tal que  $x_i = 0$  per a  $i \neq q$ , i  $x_q \neq 0$ , resulta  $|Ax|^2 \geq a_{pq}^2 x_q^2$ . Fem  $a_{pq} = a$ , i queda

$$|Ax| \geq a|x|.$$

## 8.7 La derivada o diferencial

Un seguit de conceptes intuïtius, tals com són la velocitat d'un punt que es mou seguint una corba a  $\mathbb{R}^3$ , o bé el pla tangent en una superfície encabida al mateix espai tridimensional, motiven la introducció del concepte de derivada, d'una manera plenament anàloga a com la derivada de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es motiva per la velocitat o bé per la recta tangent.

La *derivada* o *diferencial* d'una funció  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  en un punt  $x \in \mathbb{R}^n$ , si existeix, és una aplicació lineal  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que compleix

$$f(x+y) - f(x) - Ay = o(|y|) \quad \text{quan } y \rightarrow 0.$$

Si existeix és única, perquè, suposant que n'hi hagués una altra,  $B$ , tindriem

$$f(x+y) - f(x) - By = o(|y|), \quad \text{quan } y \rightarrow 0.$$



Restant quedaria  $(A - B)y = o(|y|)$  quan  $y \rightarrow 0$ . Essent  $A - B$  una aplicació lineal, ha de ser per força la que té tots els elements de la matriu corresponent nuls, ja que d'altra manera hi hauria una  $y$  per a la qual  $|(A - B)y| > a|y|$ , contradient el fet que ha de decreïxer més de pressa que  $|y|$  quan  $y \rightarrow 0$ .

La notació i fins i tot la terminologia utilitzada per diferents sectors de la comunitat matemàtica no és totalment homogènia, com es comença a constatar quan diem derivada o diferencial. Això obeeix al fet que l'aproximació a aquest concepte s'ha efectuat des de moltes diferents àrees de coneixement, i cada una ha portat la seva pròpia notació. Nosaltres posarem  $A = Df(x)$ , però també es fan servir  $df(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $\nabla f(x)$  i  $f_*(x)$ .

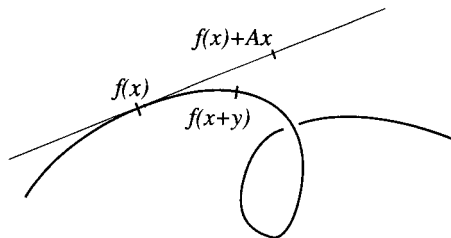
Si  $f$  té derivada al punt  $x$ , llavors és contínua a  $x$ , ja que quan  $y$  tendeix a 0,  $f(x + y) - f(x) = Df(x)y + o(|y|)$  també tendeix a 0.

Vegem ara com es veu intuïtivament la derivada en alguns casos.

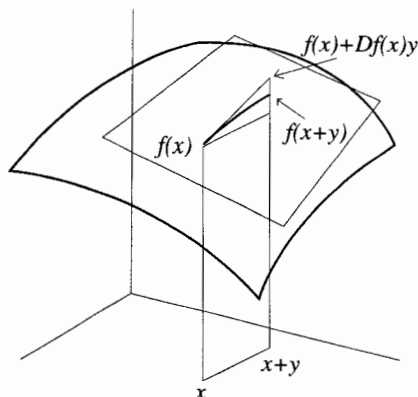
i) Per a  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  el concepte de derivada coincideix plenament amb el que hem donat al capítol 3:

$$f(x + y) - f(x) - f'(x)y = o(y), \quad \text{quan } y \rightarrow 0.$$

ii) Considerem ara  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Això és una corba o trajectòria a  $\mathbb{R}^3$ , que podem dir que està *parametritzada per*  $x \in \mathbb{R}$ . En un cert punt  $x$  podem pensar en la derivada com l'aplicació  $A$  que fa que la distància de  $f(x + y)$  a  $f(x) + Ay$  tendeixi a 0 més de pressa que  $y$  quan  $y \rightarrow 0$ . Els punts  $f(x) + Ay$  se situen sobre una recta que passa per  $f(x)$ , i que és precisament la *tangent* a la corba en el punt  $f(x)$ .



iii) Prenem ara  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . La gràfica de  $f$  és una superfície a  $\mathbb{R}^3$  que es projecta sobre  $\mathbb{R}^2$ . El *pla tangent* a la gràfica de  $f$  al punt  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  resulta la gràfica de l'aplicació de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  donada per  $x + y \mapsto f(x) + Df(x)y$ .



Efectivament, per a cada vector  $y$  de  $\mathbb{R}^2$  que prenem, la diferència  $f(x+y) - f(x) - Df(x)y$  tendeix a 0 més de pressa que  $y$ , que és precisament la noció intuïtiva de tangent a la gràfica de  $f$  en la direcció de  $y$ .

Definim  $Df(x)y$  com la *derivada direccional* de  $f$  respecte de  $y$ , avaluada al punt  $x$ .

Aquest exemple es generalitza d'una manera òbvia per a aplicacions de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de manera que els vectors tangents a la gràfica de  $f$  al punt  $x$  són donats per  $(y_1, \dots, y_n, Df(x)y)$ .

## 8.8 Les derivades parcials

Si considerem la funció

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto f(x, y), \end{aligned}$$

podem considerar-la funció d'una sola variable, sigui de  $x$  o de  $y$ , quan es manté l'altra fixada. Per exemple, podem tenir la funció

$$\begin{aligned} \phi := f(\cdot, y): \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x, y). \end{aligned}$$

D'aquesta funció, podem definir-ne la derivada en un punt  $x_0$ , és a dir, al punt  $(x_0, y)$ . Si existeix, l'anomenem *derivada parcial* de  $f$  respecte de  $x$ . Fem servir la notació

$$\frac{d\phi}{dx}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y),$$

i també

$$D_x f(x_0, y), d_x f(x_0, y), \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) \quad \text{i senzillament} \quad f_x(x_0, y).$$

D'una manera anàloga definim  $\frac{\partial}{\partial y}$ .

En el cas d'una funció de més variables

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & f(x_1, \dots, x_n), \end{array}$$

definim  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  com la derivada de  $f$ , component per component, respecte a  $x_i$ , deixant les altres variables constants.

També fem servir les notacions  $\partial_{x_i}$ ,  $f_{x_i}$ ,  $D_{x_i}f$  i fins i tot  $D_i f$ .

Ens podem demanar quina relació hi ha entre la derivada definida a la secció anterior i les derivades parcials. La relació intuïtiva pictòrica és clara: a la figura de l'exemple iii) de la secció anterior imaginem que  $y$ , el vector que afegim a  $x$ , és  $e_j$ , és a dir  $(1, 0)$  o  $(0, 1)$ . Llavors la derivada direccional respecte de  $e_j$  és precisament  $f_{x_j}(x)$ .

De fet, si  $f$  és derivable al punt  $x$ , llavors les derivades parcials existeixen en aquest punt i la matriu  $A$  corresponent a  $Df(x)$  és la matriu de les derivades parcials avaluades a  $x$ :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Prenent  $y = \alpha e_j$  tenim

$$f_i(x + \alpha e_j) - f_i(x) - \alpha (Ae_j)_i = o(\alpha), \quad \alpha \rightarrow 0,$$

o sigui que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f_i(x + \alpha e_j) - f_i(x)}{\alpha} - (Ae_j)_i = 0,$$

és a dir

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = (Ae_j)_i = a_{ij}.$$

Pot ser que les derivades parcials existeixin en un punt i que la funció no tingui derivada en aquest punt. Tal és el cas de  $f(x, y) = x^2/y$  per a  $y \neq 0$  i  $f(x, 0) = 0$ . Certament  $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$ , però per l'altra banda la funció no té derivada a  $x = 0$ , ja que ni tan sols és contínua en aquest punt.

La matriu  $A$  sol rebre el nom de *matriu jacobiana* o *jacobiana* de  $f$ , en honor a *Jacobi*, matemàtic del segle passat.

En el cas  $m = 1$ , és a dir, quan  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , la diferencial de  $f$  rep el nom de *gradient* de  $f$ , i és donada per

$$\text{grad } f := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

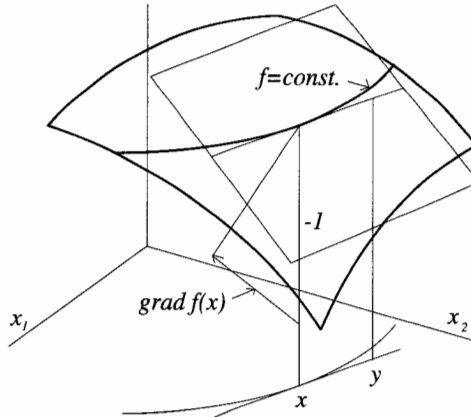
En notació vectorial queda, doncs,  $Df(x)y = \langle \text{grad } f(x), y \rangle$ .

Observem llavors que a  $\mathbb{R}^{n+1}$  el vector  $(f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x), -1)$  és ortogonal als vectors tangents a la gràfica de  $f$  al punt  $x$ , que ja hem vist que tenen genèricament l'expressió  $(y_1, \dots, y_n, Df(x)y)$ :

$$\langle (\text{grad } f(x), -1), (y, Df(x)y) \rangle = \langle \text{grad } f, y \rangle - Df(x)y = 0,$$

on hem abreujat les components de  $\text{grad } f$  i de  $y$  a la notació.

La situació es mostra esquemàticament a la figura per a  $n = 2$



Els vectors tangents a la gràfica de  $f$  que tenen la component  $n + 1$  igual a 0 (és a dir els vectors “horitzontals”) compleixen  $Df(x)y = \langle \text{grad } f(x), y \rangle = 0$ . Els vectors  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  que satisfan això són tangents al conjunt de punts de  $\mathbb{R}^n$  on  $f$  és constant i igual a  $f(x)$ .

En el cas  $n = 2$ , el que això ens diu és que  $\text{grad } f(x)$  és ortogonal a la tangent a la corba de nivell de  $f$  que passa per  $x$ .

Posar això en termes rigorosos comporta la utilització del teorema de la funció implícita, que veurem més endavant, i de moment ho deixarem en aquest nivell més aviat intuïtiu.

Tenim que la derivada direccional de  $f$  al punt  $x$  en la direcció  $y$  és  $Df(x)y = \langle \text{grad } f(x), y \rangle$ . En particular si  $y = \text{grad } f(x)$ , resulta que  $Df(x)y = |\text{grad } f(x)|^2$ , que és sempre positiu si  $\text{grad } f(x) \neq 0$ . Això vol dir que la derivada direccional és positiva en la direcció de  $\text{grad } f(x)$ , i de fet  $\text{grad } f(x)$  és la direcció on aquesta derivada és més gran, és a dir, és la direcció en què  $f$  creix més de pressa.

Ara, si les derivades parcials existeixen i són funcions contínues en un entorn de  $x$ , llavors la derivada  $Df(x)$  existeix.

Per tal de provar-ho n’hi ha prou amb considerar  $m = 1$ , ja que podem reduir a aquest cas aquell en què  $m > 1$ , senzillament descomponent  $f$  en  $f_1, \dots, f_m$ .

Volem mostrar que

$$f(x + y) - f(x) - Df(x)y = o(y) \quad \text{quan } y \rightarrow 0.$$

Podem escriure

$$\begin{aligned}
 f(x+y) - f(x) &= f(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\
 &- f(x_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\
 &+ f(x_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\
 &- f(x_1, x_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n) \\
 &\dots \\
 &+ f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + y_n) \\
 &- f(x_1, x_2, \dots, x_n).
 \end{aligned}$$

Fent servir el teorema del valor mitjà per a la derivada, ens queda

$$f(x+y) - f(x) = y_1 f_{x_1}(\eta_1) + \dots + y_n f_{x_n}(\eta_n),$$

on

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= (c_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), & c_1 &\in (x_1, x_1 + y_1), \\
 & & &\vdots \\
 \eta_n &= (x_1, \dots, x_{n-1}, c_n), & c_n &\in (x_n, x_n + y_n),
 \end{aligned}$$

on hem fet servir la notació  $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ .

Queda, doncs:

$$f(x+y) - f(x) - Df(x)y = (f_{x_1}(\eta_1) - f_{x_1}(x))y_1 + \dots + (f_{x_n}(\eta_n) - f_{x_n}(x))y_n,$$

que, si prenem normes a les dues bandes i fem servir que  $|y_i| \leq |y|$ , ens dóna

$$|f(x+y) - f(x) - Df(x)y| \leq (|f_{x_1}(\eta_1) - f_{x_1}(x)| + \dots + |f_{x_n}(\eta_n) - f_{x_n}(x)|)|y|.$$

A causa de la hipòtesi de continuïtat de les derivades parcials, resulta que el terme entre parèntesi tendeix a 0 quan  $y$  tendeix a 0, és a dir, que tota la banda dreta és  $o(|y|)$ , tal com volíem demostrar.

## 8.9 Diferenciabilitat

Diem que una funció  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  és *diferenciable* o *derivable* si  $Df(x)$  existeix en tots els punts  $x$  del domini de  $f$ .

A la secció anterior hem vist que si les derivades parcials són contínues en un entorn de  $x$ , llavors  $Df(x)$  existeix; per tant, si aquestes derivades parcials són contínues en un conjunt obert  $\Omega$ , tenim que  $Df(x)$  existeix per a tots els punts  $x \in \Omega$ .

Ara volem veure si hi ha alguna relació entre les diferencials de punts pròxims quan les derivades parcials són contínues, és a dir, si les matrius corresponents a  $Df(x)$  i a  $Df(y)$  són pròximes, en cert sentit, si  $x$  i  $y$  són pròxims.

Per a mesurar la proximitat de dues matrius podem adoptar diversos criteris. Per exemple podríem prendre  $\sqrt{\sum_{i,j}(a_{ij} - b_{ij})^2}$ , si  $a_{ij}$  i  $b_{ij}$  són els elements de les matrius  $A$  i  $B$  de les quals volem determinar la distància. També podríem utilitzar  $\sup_j |a_j - b_j|$  o bé  $\sum_j |a_j - b_j|$ , essent  $a_j$  i  $b_j$  els vectors de la columna  $j$  de  $A$  i  $B$  respectivament. Totes aquestes distàncies són vàlides per als nostres propòsits, però resulta més pràctic prendre com a norma d'una aplicació lineal  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  i de la seva matriu associada  $A$ , el mínim número  $|A|$  que fa  $|Ax| \leq |A| |x|$ .

És a dir, que

$$|A| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|Ax|}{|x|}.$$

Del fet que existeixi  $M > 0$  tal que  $|Ax| \leq M|x|$ , se segueix que a tota matriu se li pot associar la seva norma  $|A|$ .

A partir de la norma definim la distància entre  $A$  i  $B$  com a  $|A - B|$ . S'ha de comprovar que aquesta distància compleix els requisits de reflexivitat, simetria i transitivitat, cosa que deixem com a exercici. Trobar quin és el valor de  $|A|$  en termes dels elements  $a_{ij}$  de  $A$  no és tan senzill.

No hi ha cap dificultat a comprovar, però, que si  $|A|$  tendeix a 0, llavors cada  $a_{ij}$  tendeix a 0, i viceversa. Com que els elements  $a_{ij}$  de la matriu  $A$  corresponent a  $Df(x)$  són les derivades parcials  $f_{x_j}(x)$ , i aquestes són contínues en  $x$ , llavors si  $y$  tendeix a  $x$ , la norma  $|Df(x) - Df(y)|$  tendeix a 0. És a dir, en cert sentit  $Df(x)$  és contínua en  $x$ . Si aquest és el cas, diem que  $f$  és de classe  $C^1$ , que té *derivada contínua* o que és *derivable amb continuïtat* a  $\Omega$ , i ho escrivim  $f \in C^1(\Omega)$ .

## 8.10 La regla de la cadena

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  té derivada a  $x$  i  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  la té a  $f(x)$ , llavors  $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  també té derivada a  $x$  i

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x),$$

on el darrer vol dir la composició de dues aplicacions lineals, que també es pot interpretar com el producte (matricial) de les dues matrius corresponents.

Aquesta relació és coneguda com la *regla de la cadena* i generalitza la que tenim per a una sola variable.

Per a demostrar-ho fem més o menys el mateix que hem fet al capítol 3 per a  $l = m = n = 1$ .

Hem de comprovar que

$$|g(f(x+y)) - g(f(x)) - Dg(f(x)) \cdot Df(x)y| = o(|y|).$$

Ho partim a trossos, i comprovem que la banda esquerra és

$$\begin{aligned} &\leq |g(f(x+y)) - g(f(x)) - Dg(f(x)) \cdot (f(x+y) - f(x))| \\ &+ |Dg(f(x)) \cdot (f(x+y) - f(x) - Df(x)y)|. \end{aligned}$$

Tenim que

$$|f(x+y) - f(x) - Df(x)y| = o(|y|), \quad y \rightarrow 0$$

la qual cosa fa que el darrer terme sigui  $o(|y|)$ , per a  $y \rightarrow 0$ , d'acord amb la norma d'una aplicació lineal.

D'altra banda, el primer terme és l'expressió que  $Dg(f(x))$  és la diferencial de  $g$  a  $f(x)$ , i per tant és  $o(|f(x+y) - f(x)|)$ , que certament és  $o(|y|)$ , ja que

$$\begin{aligned} f(x+y) - f(x) &= Df(x)y + o|y| \quad \text{i} \\ \frac{|f(x+y) - f(x)|}{|y|} &= \frac{|Df(x)y|}{|y|} + \frac{o|y|}{y} = o(|y|). \end{aligned}$$

## 8.11 Teorema de la funció inversa

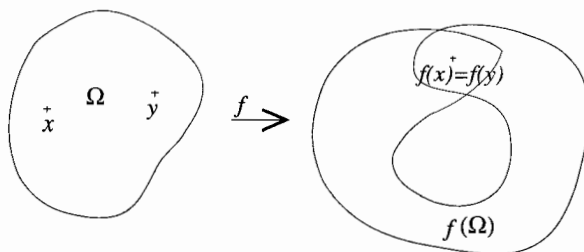
El teorema de la funció inversa ens diu que si una funció  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  té derivada contínua en un entorn de  $x$  (que és equivalent a tenir les derivades parcials contínues), llavors el fet que  $Df(x)$  sigui invertible (és a dir, que sigui un isomorfisme de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ ), implica que  $f$  també ho és, en el sentit que la imatge d'un entorn  $U$  prou petit de  $x$  és un entorn  $V$  de  $f(x)$  i  $f$  és injectiva a  $U$ . I encara tenim més, la funció inversa  $f^{-1}$  té derivada contínua a  $V$ . Aquesta derivada té per matriu la inversa de la matriu corresponent a  $Df$ .

D'una manera més formal ho podem escriure:

Sigui  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(\Omega)$  on  $\Omega$  és un obert de  $\mathbb{R}^n$ . Llavors, si  $Df(x)$  és un isomorfisme de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$  per a alguna  $x \in \Omega$ , existeixen entorns oberts  $U$  de  $x$  i  $V$  de  $f(x)$  tal que  $f : U \rightarrow V$  té una inversa  $f^{-1}$  definida a tot  $V$ , i  $f^{-1} \in C^1(V)$ . A més  $Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$ .

Deixem per a l'apèndix la demostració del teorema

Aquest teorema no implica que  $f$  tingui inversa a tot  $f(\Omega)$ , ja que, tot i complint-se que  $Df(x)$  sigui isomorfisme de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$  per a tota  $x \in \Omega$ , podria ser que dos punts diferents de  $\Omega$  anessin a parar al mateix punt de  $f(\Omega)$ , tal com s'illustra a la figura



Per a garantir que això no passi s'han d'imposar condicions globals més restrictives. Per exemple, n'hi hauria prou que  $f$  fos contínuament derivable a tot  $\mathbb{R}^n$  i que la inversa de  $Df(x)$  existís i tingués norma acotada per un número  $M$ , és a dir que  $|(Df(x))^{-1}| \leq M$ , per a tota  $x$  a  $\mathbb{R}^n$ . La demostració d'aquesta propietat és una mica laboriosa i tampoc no la farem servir. Els interessats poden consultar el llibre de Schwartz esmentat a la bibliografia.

Encara que  $(Df(x))^{-1}$  existeixi i estigui uniformement acotada per una  $M$  per a tota  $x$  a  $\Omega$ , si  $\Omega$  no és tot  $\mathbb{R}^n$ , podria ser que  $f$  no tingués inversa a  $f(\Omega)$ , és a dir, que dos punts de  $\Omega$  tinguessin la mateixa imatge sota  $f$ . És clar que això vol dir que  $f$  no està definida a tot  $\mathbb{R}^n$  amb invers de la derivada acotat. Per exemple, considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) =: (x, y). \end{aligned}$$

Tenim que

$$Df = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix},$$

i per tant, a la imatge de  $(r, \theta)$ , la derivada de la funció inversa de  $f$  val:

$$Df^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}.$$

La norma d'aquesta aplicació és el suprem de la norma de  $Df^{-1}$  aplicada als vectors de norma 1, que podem suposar de la forma  $(\cos \xi, \sin \xi)$ . El resultat d'aquesta aplicació és  $(\cos \xi \cos \theta + \sin \xi \sin \theta, -\cos \xi \sin \theta/r + \sin \xi \cos \theta/r)$ , que resulta  $(\cos(\xi - \theta), \frac{1}{r} \sin(\xi - \theta))$ . El quadrat de la seva norma val, doncs,  $\cos^2(\xi - \theta) + \frac{1}{r^2} \sin^2(\xi - \theta)$ . Els valors extrems d'aquesta norma s'obtidran derivant respecte a  $\xi$  i igualant a 0; queda

$$2 \sin(\xi - \theta) \cos(\xi - \theta) \left( \frac{1}{r^2} - 1 \right) = 0.$$

Això es complirà per a  $r \neq 1$  i  $r \neq 0$  si  $\sin(\xi - \theta) = 0$  o bé  $\cos(\xi - \theta) = 0$ . D'aquí surt, doncs, que la norma serà màxima quan  $\sin^2(\xi - \theta)$  valgui 1 si és que  $r < 1$ , i quan  $\cos^2(\xi - \theta)$  valgui 1 si  $r > 1$ . De resultes d'això tenim que  $|Df^{-1}| = 1$  si  $r > 1$  i  $|Df^{-1}| = \frac{1}{r^2}$  si  $r < 1$ . Si  $r = 1$ , és clar que aquesta norma val 1. Per a  $r = 0$   $f$  no és injectiva, i  $Df^{-1}$  no està definida.

Ara, si ens restringim a  $r \in (a, b)$ ,  $0 < a < b$ , tenim  $f$  ben definida a  $\Omega = (a, b) \times \mathbb{R}$ , i també que  $|Df^{-1}|$  està acotada uniformement a  $f(\Omega)$  (per 1 o per  $1/a^2$ , segons que  $a$  sigui més gran o més petit que 1). Fixem-nos, però, que tots els punts de la forma  $(r, \theta + 2k\pi)$ , per a qualsevol  $r \in (a, b)$  i  $k \in \mathbb{Z}$ , van a parar al mateix punt de  $\mathbb{R}^2$  sota  $f$ .



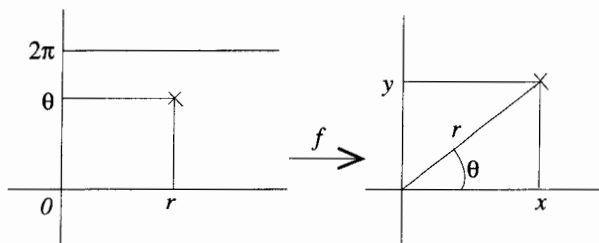
## 8.12 Canvis de variables

Les aplicacions  $f$  d'una regió  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$  que són diferenciables i tenen inversa global (és a dir a tots els punts de  $f(\Omega)$ ) també diferenciable són anomenats *canvis de variables* o *de coordenades*. Aquests serveixen fonamentalment per a simplificar certes expressions i facilitar els càlculs. En particular poden simplificar molt l'aspecte de certes equacions diferencials i en derivades parcials, fins a fer evident la seva resolució explícita. També serveixen per a simplificar el càlcul d'integrals de funcions en diverses variables quan el domini on s'integra o la funció que s'integra presenten certes simetries, tal com veurem més endavant.

L'exemple que hem donat a la secció anterior no és un canvi de variables, ja que no és injectiu de  $(a, b) \times \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^2$ . Si restringim la mateixa funció

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) =: (x, y)$$

al domini  $\Omega = (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ , llavors sí que tenim una aplicació que s'anomena *canvi a coordenades polars*



Observem dues coses: en primer lloc que l'origen del pla  $(x, y)$  no queda cobert i en segon lloc que tot i que posem l'interval  $[0, 2\pi)$ , tancat per l'esquerra per a calcular les derivades, val prendre tot un entorn al voltant dels punts de la forma  $(r, 0)$ .

Naturalment, per definició, existeix la funció inversa, definida a  $\mathbb{R}^2$  menys l'origen, i ve donada per

$$f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) =: (r, \theta),$$

on se sobreentén que el valor de  $\operatorname{arctg}(y/x)$  s'ha de prendre a l'interval  $[0, 2\pi)$  quan  $x$  sigui diferent de 0, però que quan  $x = 0$ , hem de prendre el valor de  $\operatorname{arctg}(x/y)$ .

A  $\mathbb{R}^3$  els canvis de variables més utilitzats són el canvi a *coordenades cilíndriques* donat per

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z) =: (x, y, z),$$

on  $r \in (0, \infty)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  i  $z \in \mathbb{R}$ , i el canvi a *coordenades esfèriques*:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, \theta) \mapsto (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi),$$

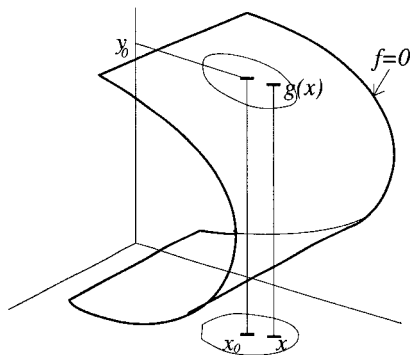
on  $r \in (0, \infty)$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Deixem com a exercici calcular-ne les derivades i les inverses.

### 8.13 El teorema de funció implícita

Considerem una funció  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  que tingui derivada contínua a l'entorn d'un punt  $(x_0, y_0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$ . Suposem que  $f(x_0, y_0) = 0$ , i que la derivada de  $f$  respecte de  $y$  en aquest punt, és a dir la derivada de la funció  $f(x_0, \cdot): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , mantenint  $x$  constant igual a  $x_0$  i derivant respecte de  $y$ , que denotarem per  $D_y f(x_0, y_0)$ , té inversa (és a dir, té determinant no nul). Llavors el *teorema de la funció implícita* ens diu que existeix una funció  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , definida en un entorn de  $x_0$ , que és contínuament derivable, i que satisfà  $g(x_0) = y_0$  i  $f(x, g(x)) = 0$ .

En altres paraules aquest teorema ens diu que, sota certes condicions, una part del conjunt de punts que satisfan l'equació  $f(x, y) = 0$  a  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  es pot veure com la gràfica d'una funció de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ , tal com mostra la figura, on hem pres  $n = 2$ ,  $m = 1$



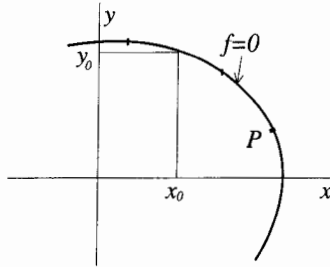
Observem a la figura que per al valor  $x_0$  hi ha dos punts  $y$  que satisfan  $f(x_0, y) = 0$ . N'hem escollit un,  $y_0$ , i és complert  $g(x_0) = y_0$  que hem indicat la gràfica de la funció  $g$ .

Aquest teorema ens garanteix, per exemple, que si  $f$  aplica  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , el conjunt  $f(x) = 0$  es pot veure, a trossos, com a gràfica de funcions de  $\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , si als punts en què es verifica no totes les derivades parcials són nulles, és a dir, si  $\text{grad } f(x) \neq 0$ .

Per a il·lustrar el que diu el teorema mostrarem tres casos més senzills:

i) Considerem  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  i  $f(x, y) = 0$ . Si tenim un punt  $(x_0, y_0)$  que verifica la igualtat i a més en aquest punt  $\partial f / \partial y \neq 0$ , llavors el teorema ens diu

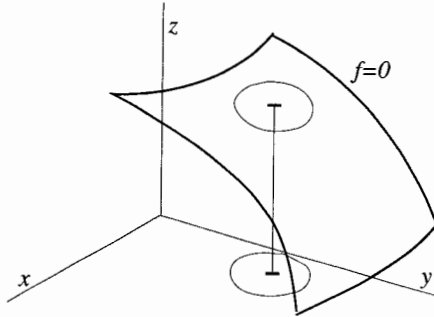
que els punts  $(x, y)$  propers a  $(x_0, y_0)$  que verifiquen la igualtat estan relacionats per  $y = g(x)$ .



Observem que en un punt com  $P$ ,  $f = 0$  no és projectable sobre l'eix  $x$ : això vol dir que  $\partial f / \partial y = 0$  en aquest punt.

ii) Prenem  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = 0$ , i suposem  $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ ,  $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ .

Alavors si  $(x, y, z)$  satisfan la igualtat, hi ha una funció derivable que ens dóna  $z$  en funció de  $(x, y)$  (localment):  $z = g(x, y)$ , i que satisfà  $z_0 = g(x_0, y_0)$ . És a dir, podem veure localment a  $f = 0$  com una superfície que és la gràfica de  $g$ .



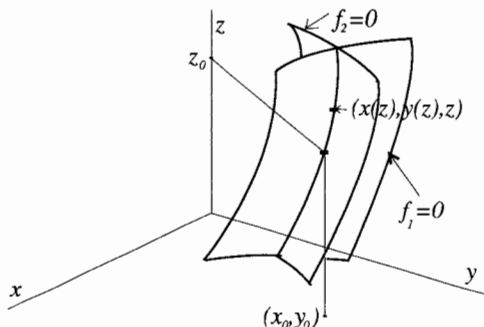
iii) Considerem finalment  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  i  $f(x, y, z) = 0$ .

Suposem que en un punt  $(x_0, y_0, z_0)$  que compleix la igualtat anterior, es té que  $D_{x,y}f(x_0, y_0, z_0)$  és no singular, és a dir, que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0,$$

on s'ha avaluat la matriu al punt  $(x_0, y_0, z_0)$  i  $f_1, f_2$  són les dues components de  $f$ .

El teorema ens diu, en aquest cas, que podem expressar  $x$  i  $y$  en funció de  $z$ , és a dir,  $f = 0$  es pot veure com un tros de corba parametritzat per  $z$ .



Observem que podem interpretar el conjunt de punts on  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  s'anulla com la intersecció dels conjunts de zeros de  $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  i  $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , que són dues superfícies i que, si el determinant anterior és diferent de zero, s'intersequen en una corba que es projecta sobre l'eix  $z$ .

## 8.14 Derivades parcials d'ordre superior

Com que les derivades parcials  $f_{x_i}$  d'una funció  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  són també funcions de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ , podem considerar la seva diferenciabilitat, i, en particular, les seves derivades parcials respecte de les diferents  $x_i$ . Així podem considerar

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

que podem denotar per  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i}$ , o també per  $f_{x_i x_j}$ , o fins i tot  $D_{i,j} f$ . Aquí entenem que primer derivem respecte de  $x_i$ , i després, la funció que ens resulta, respecte de  $x_j$ .

En el cas que  $i$  i  $j$  siguin la mateixa, solem fer

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Aquestes derivades s'anomenen *derivades de segon ordre*. Una pregunta que ens podem plantejar, i que té rellevància a les seccions següents, quan parlem de la fórmula de Taylor, és si l'ordre de derivació altera el resultat, és a dir, si és el mateix  $f_{x_i x_j}$  que  $f_{x_j x_i}$ . Resulta que això darrer no és sempre cert, com queda il·lustrat per la funció

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{per a } (x, y) \neq 0 \\ 0, & \text{per a } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Tenim que  $f_x(0, y) = -y$  i que  $f_y(x, 0) = x$ , pel que  $f_{xy}(0, 0) = -1$  i  $f_{yx}(0, 0) = 1$ .

Ara, si demanem que  $f_{xy}$  i  $f_{yx}$  siguin contínues a l'entorn d'un punt de  $\mathbb{R}^2$ , sí que es verifica la igualtat d'aquestes dues derivades de segon ordre en aquest punt tal com demostrem a la secció següent. D'aquí se segueix que si totes les *derivades parcials d'ordre  $r$*  (és a dir repetint  $r$  vegades la derivació) d'una funció  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  són contínues, llavors l'ordre de derivació fins a ordre  $r$  no influeix en el valor de la derivada. Quan aquest és el cas diem que  $f$  és de *classe  $C^r$*  al domini  $\Omega$  on es verifiqui aquesta continuïtat, i ho escrivim  $f \in C^r(\Omega)$ .

Per abreviar, les derivades d'ordre superior es poden denotar mitjançant

$$\frac{\partial^{|\tau|} f}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} = D^\tau f,$$

on  $\tau = (r_1, \dots, r_n)$ , amb cada  $r_i$  un enter positiu que indica quantes vegades derivem respecte de  $x_i$ , i  $|\tau| = r_1 + \dots + r_n$  és l'*ordre de derivació*.

### 8.14.1 Commutativitat de la derivació parcial

Considerem una funció  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que en un entorn del punt  $(x, y)$  tingui les derivades parcials de segon ordre  $\partial^2 f / \partial y \partial x = f_{xy}$  i  $\partial^2 f / \partial x \partial y = f_{yx}$  contínues. Provarem que aquestes dues derivades coincideixen a  $(x, y)$ .

Prenem increments  $h$  i  $k$  de  $x$  i de  $y$  respectivament i fem

$$\begin{aligned} \delta_k(x) &= f(x, y+k) - f(x, y), \\ \delta_{hk} &= \delta_k(x+h) - \delta_k(x). \end{aligned}$$

Aplicant el teorema del valor mitjà per a la derivada, tenim

$$\delta_{hk} = h\delta'_k(x + \theta_1 k), \quad \text{amb } \theta_1 \in (0, 1).$$

Com que

$$\delta'_k(x) = f_x(x, y+k) - f_x(x, y),$$

tornant a aplicar el teorema del valor mitjà obtenim  $\delta_{hk} = hk f_{xy}(x + \theta_1 h, y + \zeta_1 k)$ , amb  $\zeta_1 \in (0, 1)$ .

D'una manera anàloga, si fem  $\delta_h(y) = f(x+h, y) - f(x, y)$ , queda  $\delta_{hk} = \delta_h(y+k) - \delta_h(y)$ , resulta

$$\delta_{hk} = hk f_{yx}(x + \theta_2 h, y + \zeta_2 k), \quad \theta_2, \zeta_2 \in (0, 1).$$

La igualtat

$$f_{xy}(x + \theta_1 h, y + \zeta_1 k) = f_{yx}(x + \theta_2 h, y + \zeta_2 k)$$

comporta, a causa de la continuïtat tant de  $f_{xy}$  com de  $f_{yx}$ , que això és vàlid en el límit quan  $h, k \rightarrow 0$ , és a dir,  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ .

Aquesta demostració va ser feta per primera vegada per *Euler* a la primera meitat del segle XVIII en tractar de la hidrodinàmica.

La igualtat de les derivades  $f_{xy}$  i  $f_{yx}$  també és vàlida amb condicions una mica més dèbils: n'hi ha prou que  $f_x(x, y)$  i  $f_y(x, y)$  existeixin i que només una de les derivades  $f_{xy}$  o  $f_{yx}$  sigui contínua en un entorn de  $(x, y)$ . La demostració és només una mica més laboriosa (vegeu el llibre de Courant i John).

## 8.15 El teorema de Taylor

Al capítol 6 hem estudiat el teorema de Taylor, que ens diu que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  està a  $C^{r+1}$ , llavors

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \dots + \frac{f^{(r)}(x)}{r!}h^r + R_r(x, h),$$

on  $R_r$ , anomenat el residu o romanent, ve donat per

$$R_r(x, h) = \int_0^h \frac{(h-t)^r}{r!} f^{(r+1)}(x+t) dt,$$

o bé per

$$R_r(x, h) = \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} h^{r+1},$$

per a alguna  $\xi \in (x, x+h)$ .

Per a cada  $x$ , tenim que  $R_r(x, h) = o(|h|^r)$  quan  $h \rightarrow 0$ .

Considerem ara una funció  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que estigui a  $C^{r+1}$ , i els punts  $x$  i  $x+h$  a  $\mathbb{R}^n$ . Si definim la funció  $\phi(t) := f(x+th)$ , per a  $x$  i  $t$  fixats, el teorema de Taylor ens dona

$$f(x+h) = \phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \dots + \frac{\phi^{(r)}(0)}{r!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^r}{r!} \phi^{(r+1)}(t) dt,$$

o, en lloc de la darrera integral, l'expressió

$$\frac{\phi^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}, \quad \xi \in (0, 1).$$

Com que si  $m > 1$ , la funció  $f$  té més d'una component, aquesta darrera fórmula la interpretem aplicant-se per a cada component de  $f$ , i per tant de  $\phi$ . Per tant podem treballar amb una sola de les components, la qual cosa és equivalent a prendre  $m = 1$ .

Per a calcular les derivades de  $\phi$  podem fer servir la regla de la cadena. Obtenim així que

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt} f(x+th) = Df(x+th)h,$$

on, si  $m = 1$ ,  $Df = \text{grad } f = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$ , i l'expressió anterior queda  $\phi'(t) = \langle \text{grad } f, h \rangle$ .

Apliquem de nou la regla de la cadena per a calcular

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= \frac{d}{dt} \langle \text{grad } f(x+th), h \rangle = \frac{d}{dt} (h_1 f_{x_1}(x+th) + \dots + h_n f_{x_n}(x+th)) \\ &= (h_1^2 f_{x_1 x_1} + \dots + h_1 h_n f_{x_1 x_n}) + \dots + (h_1 h_n f_{x_1 x_n} + \dots + h_n^2 f_{x_n x_n}) \\ &= \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 f(x+th), \end{aligned}$$

on hem d'entendre el parèntesi al quadrat com un operador aplicat a  $f$ .

Per a les derivades d'ordre superior l'expressió es complica força, però es pot provar per inducció que resulta  $\phi^{(r)}(t) = \langle h, \text{grad} \rangle^r f(x + th)$ , on amb això indiquem que hem d'eleva  $\langle h, \text{grad} \rangle = (h_1 \partial_{x_1} + \dots + h_n \partial_{x_n})$  a la potència  $n$ , la qual cosa ens donarà una expressió on apareixeran termes formats per productes de diverses  $h_i \partial_{x_i}$ . Les  $h_i$  es multipliquen per les derivades aplicades a  $f$ , de les quals ja sabem que no importa l'ordre d'aplicació, perquè  $f \in C^{r+1}$ .

A  $\langle h, \text{grad} \rangle^r f(x)$ , ho denotem senzillament per  $D^r f(x; h^r)$ , i en diem la *derivada d'ordre  $r$  de  $f$  segons el vector  $h$*   $r$  vegades.

Tot això és d'aplicació força onerosa si  $n$  i  $r$  són grans. En el cas de  $n = 2$ , podem escriure la fórmula d'una manera prou explícita.

Obtenim

$$\phi''(t) = \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 f(x + th) = h_1^2 f_{x_1 x_1} + 2h_1 h_2 f_{x_1 x_2} + h_2^2 f_{x_2 x_2},$$

tot avaluat a  $x + th$ .

La darrera expressió també es pot escriure en notació matricial com

$$h^T H h,$$

on  $h^T$ ,  $H$  i  $h$  són les matrius  $(h_1 h_2)$ ,  $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$  i  $\begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{pmatrix}$ .

Aquesta darrera matriu, simètrica ja que  $f_{x_1 x_2} = f_{x_2 x_1}$ , s'anomena el *Hessià* de  $f$ . Reconeixem a la fórmula anterior una *forma quadràtica* en  $h$  definida per  $H$ . El Hessià  $H = (f_{x_i x_j})$  també es defineix encara que  $n$  sigui més gran que 2. Llavors  $\phi''(t)$  també ve donat per  $h^T H h$ .

En general, fent servir el teorema del binomi,

$$\begin{aligned} \phi^{(r)}(t) &= \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^r f(x + th) \\ &= h_1^r f_{x_1^r} + \binom{r}{1} h_1^{r-1} h_2 f_{x_1^{r-1} x_2} + \dots + h_2^r f_{x_2^r} \\ &= D^r f(x + th; h^r). \end{aligned}$$

La fórmula de Taylor ens queda finalment

$$\begin{aligned} f(x + h) &= f(x) + Df(x; h) + \frac{1}{2!} D^2 f(x; h^2) + \dots \\ &+ \frac{1}{r!} D^r f(x; h^r) + \frac{1}{r!} \int_0^1 (1-t)^r D^{r+1} f(x + th; h^{r+1}) dt. \end{aligned}$$

En particular, com que  $D^{r+1} f$  és acotada en un entorn de  $x$ , ja que  $f \in C^{r+1}$ , resulta que el romanent és  $o(|h|^r)$ .

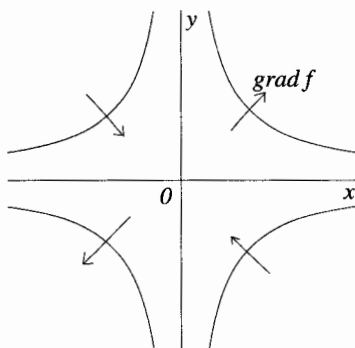
Com en el cas d'una sola variable, resulta que hi ha funcions que tenen derivades de tots els ordres per a les quals el romanent  $R_r(x, h)$  tendeix a 0

quan  $r$  tendeix a  $\infty$  i per  $|h|$  més petita que un cert valor. En aquest cas diem que  $f$  és una *funció analítica* de les  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ . També podria ser, és clar, que la sèrie infinita resultant no convergís enlloc, o bé, que tendís a una funció diferent de  $f$ , si el romanent no tendeix a 0.

## 8.16 Màxims, mínims i altres punts crítics

Considerem una funció  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que tingui derivada contínua al seu domini  $\Omega$ , que suposem un obert de  $\mathbb{R}^n$ . Diem que  $f$  té un *màxim local* al punt  $x$  si hi ha un entorn  $U$  de  $x$  tal que si  $y \in U$ , llavors  $f(x) \geq f(y)$ . Ja veiem que això no vol dir que fora de  $U$  no puguin haver-hi valors de  $f$  més grans de  $f(x)$ . Si la desigualtat és estricta, és a dir, si  $f(x) > f(y) \forall y \in U$ , diem que a  $x$  tenim un *màxim estricte* (local). Diem que té un *mínim local* a  $x$  si es compleixen les condicions anteriors amb la desigualtat canviada. En qualsevol d'aquests dos casos resulta que  $Df(x) = 0$ . Efectivament, si considerem les funcions  $\phi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definides per  $\phi_i(t) := f(x + te_i)$ , on els vectors  $e_i$  són els que tenen totes les components nulles, menys la  $i$ -èsima que val 1, resulta que cada  $\phi_i$  té un màxim (o un mínim) a  $t = 0$ , i que per tant  $\phi_i'(0) = 0$ . Com que  $\phi_i'(0) = f_{x_i}(x)$ , tenim  $\text{grad } f(x) = Df(x) = 0$ , tal com volíem provar.

La recíproca no és certa: podria ser que  $Df(x) = 0$  i que  $x$  no sigui ni un màxim ni un mínim. Per exemple la funció  $f(x, y) = xy$ , té corbes de nivell com les mostrades a la figura.



El sentit de  $\text{grad } f$  ens diu cap on creix la funció, i veiem que seguint les bisectrius del primer i del tercer quadrants  $f$  creix a partir de 0, mentre que decreix en seguir-les al segon i al quart quadrants. En aquest cas tenim el que s'anomena un *coll* o bé una *sella*.

En general un punt  $x$  en el qual  $Df(x) = 0$  es coneix com a *punt crític*.

Per veure si un punt crític és un màxim o un mínim, intentarem utilitzar la fórmula de Taylor. El seu primer terme, constant, no ens diu res. El segon terme,  $Df(x)h$ , ha de ser 0, ja que hem suposat que el punt  $x$  és crític. El següent terme és quadràtic en les components de  $h$ , i ve donat per  $\frac{1}{2}h^T H h$ , on



$h^T$  és la matriu que té per únic rengle l'única columna de  $h$  considerat com a matriu.

De l'àlgebra sabem que  $H$ , essent simètric, és diagonalitzable, és a dir que amb un canvi lineal de variables  $h = Pk$ , on  $P$  és una matriu no singular, es pot posar  $h^T H h = k^T P^T H P k$ , on  $P^T H P =: K$  és una matriu real i diagonal (Aquí  $P^T$  és la matriu *transposada* de  $P$ , és a dir la que s'obté bescanviant les columnes i els rengles de  $P$ ). Si algun element de la diagonal, diguem  $k_{ii}$ , és positiu, vol dir que si prenem  $k = te_i$ , llavors  $k^T K k = k_{ii} t^2$ . És a dir en aquesta direcció unidimensional, donada per  $h = Pk$ ,  $f$  té un mínim.

Ara bé, com que els termes que segueixen a la fórmula de Taylor són  $o(|h|^2)$ , aquests no poden modificar la condició de mínim en aquesta direcció  $h$ . Efectivament  $\phi(t) = k_{ii} t^2 + o(|t|^2)$  té un mínim estricte a 0: n'hi ha prou amb dividir per  $|t|^2$  i fer tendir  $t$  a 0, fins que  $|o(|t|^2)|/|t|^2 < k_{ii}$  per a tota  $t$  prou a prop de 0. Amb això tenim que en un entorn de  $t = 0$ ,  $\phi$  és positiva, mentre que val 0 al 0.

D'una manera semblant, si algun element de la diagonal de  $K$ ,  $k_{ii}$ , és negatiu, tindríem que  $f$  té un màxim estricte en la direcció de  $Pe_i$ .

Resulta d'això que si  $K$  té a la diagonal un terme  $h_{ii} > 0$  i un altre  $h_{jj} < 0$ , llavors no és ni un màxim ni un mínim.

Si  $h_{ii} > 0$  per a tota  $i = 1, \dots, n$ , llavors  $f$  té un mínim estricte a  $x$ . Per fer-ho veure, notem que en aquest cas  $H$  és el que s'anomena una *forma definida positiva*, i que  $h^T H h > 0$  per a tota  $h \neq 0$ , i el que és més, existeix  $M > 0$  tal que  $g(h) = h^T H h \geq M|h|^2$  per a tota  $h \in \mathbb{R}^n$ .

En efecte, essent  $g$  contínua a  $|h| = 1$ , ateny el seu mínim  $M$  en algun punt, d'on deduïm

$$g(h) = g\left(\frac{h|h|}{|h|}\right) = g\left(\frac{h}{|h|}\right) |h|^2 \geq M|h|^2.$$

Com que  $R_2/|h|^2 < M$  si l'entorn considerat de  $x$  és prou petit, tenim que  $\frac{1}{2}h^T H h + R_2$  és més gran que 0 si  $h \neq 0$ , mentre que és igual a 0 si  $h = 0$ . És a dir,  $f$  té un mínim estricte a  $x$ .

D'una manera semblant podríem fer veure que  $f$  té un màxim estricte a  $x$  si  $k_{ii} < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

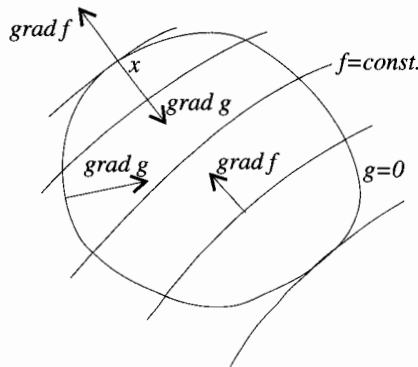
El *criteri de Sylvester* ens diu que si calculem els determinants de les matrius que van resultant de  $H$  en anar suprimint successivament i en ordre rengles i columnes, i si tots surten positius, llavors la forma quadràtica és definida positiva, mentre que si els signes es van alternant és definida negativa.

Les condicions que acabem de donar per a l'existència d'un màxim o d'un mínim estrictes a  $x$  són *condicions suficients*, però no necessàries: podrien haver-hi elements de la diagonal de  $K$  que fossin nuls, i si tots els altres són d'un sol signe, encara el terme següent del desenvolupament de Taylor podria inclinar el comportament de manera que tinguéssim un màxim o un mínim a  $x$ , o que no en tinguéssim cap dels dos. Per a determinar-ho hauríem d'estudiar el terme d'ordre 3, i si aquest no fos suficient, anar estudiant els d'ordre cada vegada més gran, fins a arribar al terme decisiu. Podria ser que aquest terme decisiu no existís.

## 8.17 Extrems condicionats. Multiplicadors de Lagrange

Suposem que volem trobar un màxim o un mínim de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dins d'un subconjunt de  $\mathbb{R}^n$  definit pels punts  $x$  que satisfan  $g(x) = c$ , on també  $g$  és una funció de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ . Recordem que si  $g \in C^1$  i  $\text{grad } g(x) \neq 0$  per a tots els punts  $x$  en què  $g(x) = c$ , llavors aquest subconjunt és una *hipersuperfície*, és a dir, a trossos correspon a les gràfiques de funcions de  $\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , segons que ens permet assegurar el teorema de la funció implícita.

En el cas de  $n = 2$ , això vol dir que  $g(x) = 0$  és una corba de  $\mathbb{R}^2$ , tal com mostrem a la figura següent.

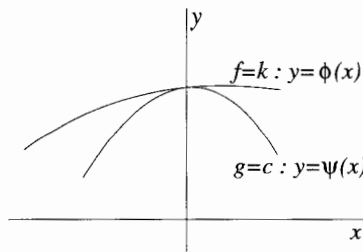


D'una manera intuïtiva, veiem que el valor màxim de  $f$  sobre el conjunt, on  $g = c$ , correspondrà a una tangència d'una corba de nivell,  $f = \text{constant}$ , amb la corba on  $g = c$ . Com que estem suposant que totes les funcions són contínuament derivables, això passarà si  $\text{grad } f$  i  $\text{grad } g$  són colineals, és a dir, si hi ha un número real  $\lambda$  tal que

$$\text{grad } f(x) = \lambda \text{grad } g(x).$$

Si  $f$  té un màxim o un mínim sobre  $g = c$ , això es verifica. Ara, també es pot verificar sense que tinguem un màxim o un mínim.

Utilitzant el teorema de funció implícita podem representar els conjunts  $\{f = k\}$  i  $\{g = c\}$  com a gràfiques de funcions  $\phi$  i  $\psi$  de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , projectant aquests conjunts sobre l'eix  $x$  o bé l'eix  $y$  (suposem  $n = 2$ ).



La condició de tangència dels dos conjunts  $\{f = k\}$  i  $\{g = c\}$  es tradueix dient que  $\phi - \psi$  té un punt crític al punt de contacte, on  $\phi(x) = \psi(x)$ .

Per tal de calcular els extrems de  $f$  sobre  $\{g = 0\}$ , haurem de resoldre el sistema d'equacions

$$\begin{cases} \text{grad } f(x) = \lambda \text{ grad } g(x) \\ g(x) = c. \end{cases}$$

Per exemple, prenem  $f(x, y) = x^2 - y^2$  i cerquem el seu màxim sobre el cercle unitari  $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ .

Les equacions anteriors queden

$$\begin{aligned} (2x, -2y) &= \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Tenim aquí un sistema de tres equacions amb les incògnites  $x, y, \lambda$ :  $2x = 2\lambda x$ ,  $2y = -2\lambda y$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ .

De la primera equació deduïm que o bé  $\lambda = 1$  o bé  $x = 0$ , de la segona que  $\lambda = -1$  o  $y = 0$ . Tenim, doncs, com a candidats, prenent en compte la darrera equació, els punts  $(0, \pm 1)$  i  $(\pm 1, 0)$ . Aquests punts són extrems. Per veure si són màxims, mínims o alguna altra cosa, el més fàcil en aquest cas és substituir els seus valors a l'expressió de  $f$ . Com que ha de ser un d'aquests extrems, el màxim es trobarà al punt en què  $f$  valgui més: als punts  $(-1, 0)$  i  $(1, 0)$ ,  $f$  val 1, i als punts  $(0, 1)$  i  $(0, -1)$  val  $-1$ . Per tant els primers corresponen a màxims i els darrers a mínims.

Hi ha criteris per a determinar els tipus dels punts crítics utilitzant les derivades d'ordre superior, però no ho considerarem aquí. El lector interessat pot consultar el llibre de Marsden i Tromba.

## 8.18 Derivada de la integral respecte a un paràmetre

Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  és una funció contínua en el conjunt  $[a, b] \times \mathbb{R}$ , llavors la funció  $\phi_y := f(\cdot, y)$  està definida, per cada  $y \in \mathbb{R}$ , a l'interval  $[a, b]$ , i hi és contínua, de manera que té sentit considerar la integral

$$\int_a^b \phi_y =: \int_a^b f(x, y) dx =: F(y).$$

Aquesta integral és una funció de  $y$ , que resulta contínua, ja que

$$\int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y + \delta) dy = \int_a^b (f(x, y) - f(x, y + \delta)) dx,$$

i com que, donada qualsevol  $\varepsilon > 0$  podem trobar  $\delta_0$  tal que si  $\delta < \delta_0$ , llavors  $|f(x, y) - f(x, y + \delta)| < \varepsilon/(b - a)$ , i això amb  $\delta_0$  independent de  $x$  i si mantenim  $y \in [c, d]$ , ja que  $f$  és uniformement contínua a  $[a, b] \times [c, d]$ , resulta que

$$|F(y) - F(y + \delta)| < \varepsilon,$$

tal com volíem provar.

Certament podem generalitzar aquest tipus d'integrals a funcions contínues

$$\begin{aligned} f : [a, b] \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y), \end{aligned}$$

considerant la funció  $\phi_y := f(\cdot, y)$ , definida a  $[a, b]$ .

Igualment obtenim que

$$F(y) := \int_a^b f(x, y) dx := \int_a^b \phi_y$$

és una funció contínua de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ .

En el cas que  $a$  sigui  $-\infty$  o  $b$  sigui  $\infty$ , tindrem una integral impròpia, i per tal de determinar l'existència de  $F(y)$  haurem de considerar la convergència de la integral quan els límits d'integració tendeixen a  $-\infty$  o a  $\infty$ .

Mostrarem ara, suposant  $f$  de classe  $C^1$ , que per a trobar la derivada de la funció  $F$  (les derivades parcials en el cas que  $y \in \mathbb{R}^n$ ), n'hi ha prou amb derivar parcialment respecte de  $y$  la funció  $f(x, y)$  i després integrar, és a dir, limitant-nos a  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , que

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx.$$

La demostració d'això és la següent:

Tenim

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx,$$

si és que el límit existeix.

Pel teorema del valor mitjà tenim per a cada  $x$  que

$$\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y + \theta h), \quad \theta \in (0, 1).$$

Ara, per a qualsevol  $\varepsilon > 0$  existeix  $\delta > 0$ , independent de  $x$  (ja que  $\partial f / \partial y$  és uniformement contínua a  $[a, b] \times [c, d]$ , on  $y \in [c, d]$ ) tal que,

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} f(x, y') - \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \text{si } |y' - y| < \delta.$$

Prenent  $|h| < \delta$ , tenim  $|\theta h| < \delta$ , i per tant,

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx - \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial y} f(x, y + \theta h) - \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right| dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Per tant existeix el límit i la derivada que volíem.

Per tractar el cas de la derivació d'una integral impròpia de la forma

$$\int_a^\infty f(x, y) dx,$$

ens convé el concepte de *convergència uniforme d'una integral impròpia*. Tindrem aquest tipus de convergència si per a cada  $\varepsilon > 0$  existeix  $x_0$  (independent de  $y$ ) tal que,  $|\int_x^\infty f(x, y) dx| < \varepsilon$  per a  $x > x_0$ , la qual cosa és equivalent a dir que  $|\int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx| < \varepsilon$  per a  $x_1, x_2 > x_0$ .

El teorema anterior sobre la derivació també val per a les integrals impròpies convergents d'aquest tipus, però hem de posar com a hipòtesi addicional que  $\int_a^\infty f_y(x, y) dx$  sigui uniformement convergent.

Efectivament, tenim

$$\int_a^y f_y(x, \eta) d\eta = f(x, y) - f(x, a),$$

per tant

$$\int_a^\infty \left( \int_a^y f_y(x, \eta) d\eta \right) dx$$

convergeix, ja que la integral de la banda dreta ho fa.

Llavors,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y) dx &= \frac{d}{dy} \left( \int_a^\infty (f(x, y) - f(x, a)) dx \right) \\ &= \frac{d}{dy} \left( \int_a^\infty \left( \int_a^y f_y(x, \eta) d\eta \right) dx \right) \\ &= \frac{d}{dy} \left( \int_a^y \left( \int_a^\infty f_y(x, \eta) dx \right) d\eta \right) \\ &= \int_y^\infty f_y(x, y) dx. \end{aligned}$$

Aquí hem fet servir la validesa del canvi de l'ordre d'integració, que justificarem més endavant.

## 8.19 Corbes i la seva longitud

Ja hem dit que una corba és una aplicació  $\gamma$  de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}^2$ . Per als nostres propòsits suposarem que aquesta aplicació té derivada contínua i la suposarem restringida en un interval tancat acotat  $[a, b]$ . En aquest cas direm que tenim una *corba regular*.

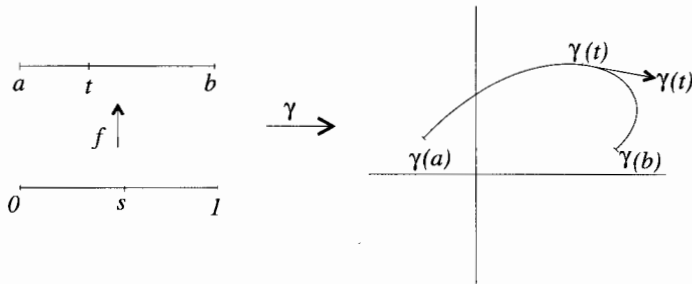
Per tal de definir les integrals de funcions de dues variables, ens resultarà útil saber quina és la longitud de les corbes planes ja que aquestes constitueixen la vora dels dominis de  $\mathbb{R}^2$ , en els casos més regulars.

La longitud de la corba  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es defineix per

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\gamma_1(t)}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{d\gamma_n(t)}{dt}\right)^2} dt, \end{aligned}$$

on a la segona expressió hem explicitat més l'integrand.

Pictòricament la situació es pot esquematitzar:



Al mateix esquema hem indicat una aplicació  $f$  de l'interval  $[0, 1]$  a l'interval  $[a, b]$ . Suposem que  $f$  és un *canvi de variables*, és a dir, una aplicació bijectiva amb derivada contínua i amb inversa de derivada contínua.

La imatge de l'interval  $[a, b]$  sota  $\gamma$  se sol anomenar *arc*, i de l'aplicació  $\gamma \circ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que té la mateixa imatge que  $\gamma$  a  $\mathbb{R}^n$ , en diem *reparametrització*.

En el cas particular que tinguem  $|\gamma'(s)| = 1$  per a tota  $s$ , diem que tenim una *parametrització per la longitud d'arc*.

Vegem ara que la longitud d'una corba no depèn de la seva parametrització. Per a això hem de provar que

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 |(\gamma \circ f)'(s)| ds.$$

Per la regla de la cadena tenim

$$(\gamma \circ f)'(s) = \gamma'(f(s))f'(s).$$

Per tant el canvi de variable  $t = f(s)$  ens dóna la igualtat de les dues integrals.

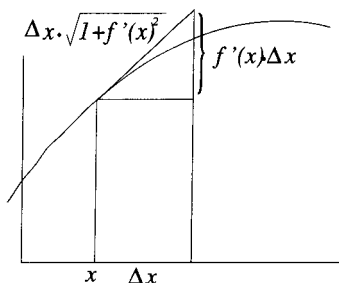
També hauríem pogut definir la longitud d'una corba fent servir polígons amb vèrtexs a punts de la corba que s'anessin espessint, però és molt més feixuc de tractar amb cert rigor, encara que potser es troba més a prop de la nostra idea intuïtiva de longitud d'una corba.

Una aplicació  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  amb derivada contínua ens serveix per a definir la corba  $\gamma : x \mapsto (x, f(x))$ , que està parametritzada per l'abscissa  $x$ . En aquest

cas la longitud ens és donada per

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Aquí sí que podem veure més intuïtivament que correspon a la longitud, ja que per a un petit increment de  $x$ , l'integrand correspon a la hipotenusa del triangle rectangle que té per catets l'increment de  $x$  i gairebé l'increment de la funció:



En general, si tenim una corba  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , i  $\phi$  és una funció amb valors reals definida a l'arc  $\gamma([a, b])$ , definim la integral de  $\phi$  sobre l'arc, com  $\int_{\gamma} \phi = \int_a^b \phi(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$ . Es comprova que aquest valor és independent de la parametrització de  $\gamma$ .

## Exercicis i problemes

1. Esbosseu les corbes de nivell de les funcions següents:  $x^2 - y^2$ ,  $x^2y$ ,  $|x|^y$ ,  $\sin(x^2 + y)$ .
2. Esbosseu les corbes de nivell i digueu a quins punts no tenen límits les següents funcions, que no estan definides a tots els punts de  $\mathbb{R}^2$ :  
 $x^2/y$ ,  $2xy/(x^2 + y^2)$ ,  $e^{-x^2/y}$ ,  $\sin(xy)/(x^2 + y^2)$ ,  $x^2 \ln(x^2 + y^2)$ ,  $x^2y/(x^4 - y^2)$ .

3. Donats  $p, q \in \mathbb{N}$ , digueu per a quins valors de  $m$  i  $n$  a  $\mathbb{N}$  és acotada la funció

$$f(x, y) = (1 + y - x^2)x^m y^n / (x^p + y^q), \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Estudieu-ne els límits direccionals i la continuïtat a l'origen.

4. Doneu l'equació del pla tangent a la gràfica de les funcions de l'exercici 1 als punts  $(x, y)$  on  $f$  sigui diferenciable.
5. Demostreu que si  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ ,  $f_{xx} + f_{yy} = 0$  i  $\phi(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ , llavors  $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ .
6. Expressen en coordenades polars les expressions  $\text{grad } \phi = (\phi_x, \phi_y)$ ,  $\text{div}(X, Y) = X_x + Y_y$  i  $\Delta \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy}$ . Per exemple,  $\phi_x^2 + \phi_y^2 = \phi_r^2 + \frac{1}{r^2} \phi_\theta^2$ .
7. Expressen en coordenades cilíndriques les expressions  
 $\text{grad } \phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$ ,  $\text{div}(X, Y, Z) = X_x + Y_y + Z_z$ ,  $\Delta \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}$ ,  
 $\text{rot}(X, Y, Z) = (Z_y - Y_z, X_z - Z_x, Y_x - X_y)$ .
8. Mostreu que  $\text{divrot} = 0$ ,  $\text{divgrad} = \Delta$ ,  $\text{rotgrad} = 0$ .
9. Mostreu que per a la funció  $f(x, y) = x^2 \arctg(y/x) - y^2 \arctg(x/y)$  per a  $x, y \neq 0$  i  $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ , no es compleix  $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ , tot i que aquestes derivades existeixen.
10. Trobeu el desenvolupament de Taylor d'ordre 2 centrat a 0 i acoteu l'error per a:  $\sin(xy)$ ,  $\ln(1 + xy)$ ,  $e^x \sin y$ ,  $\cos x / \cos y$ .



11. Trobeu els màxims i els mínims de les següents funcions amb les restriccions indicades

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - y^2, && \text{complint } x^2 + y^2 = 1 \\ f(x, y) &= x^2 y^2, && \text{amb } x + y = 1 \\ f(x, y) &= \cos(x + y), && \text{a } x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

12. Trobeu els rectangles de perímetre màxim i d'àrea màxima inscrits en l'el·lipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .
13. Quin punt de  $3x^2 + 4y^2 + 5xy = 0$  dista menys del punt  $(1, 2, 4)$ ?
14. Digueu si als següents sistemes d'equacions es poden expressar  $\phi, \psi$  en termes de  $x, y$  en un entorn dels punts indicats:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \phi^2 - \psi = 2 \\ x^2 - y^2 + 2\phi = 2, \end{cases} \quad \text{prop de } x, y, \phi, \psi = 1.$$

$$\begin{cases} \cos \phi - x \sin \psi = 0 \\ \sin \phi - \cos x \psi = 0, \end{cases} \quad \text{prop de } \phi = \pi, \psi = \pi/2, x = 1.$$

En cas que  $\phi, \psi$  es puguin expressar en termes de  $x, y$  en un entorn del punt indicat, digueu quina és la diferencial de  $(x, y) \mapsto (\phi, \psi)$  o bé  $x \mapsto (\phi, \psi)$  en aquest punt.

15. Mostreu que a  $y = b + \int_a^x f(t, y) dt$  podem expressar  $y$  en funció de  $x$  de manera que  $y(a) = b$ , si  $f \in C^1$ .
16. Trobeu les imatges de  $x = \text{constant}$  i  $y = \text{constant}$  per a l'aplicació

$$\phi : (x, y) \mapsto e^x \cos y, e^x \sin y.$$

Restringint-vos a una regió adient de  $\mathbb{R}^2$ , doneu-ne la inversa i calculeu-ne el jacobià.

17. Comproveu que en intentar trobar la longitud d'un arc d'el·lipse us trobeu amb una integral el·líptica (vegeu la secció 4.10).

## Apèndixs

### 1. El principi de contracció de Banach

Prenem una aplicació contínua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Diem que té un punt fix  $x^*$  si  $x^* = f(x^*)$ . Aquest punt és, doncs, una *arrel* o *solució de l'equació*  $x = f(x)$ . Els criteris per saber si una determinada  $f$  té un punt fix, i els procediments per calcular-lo (amb una aproximació tan gran com desitgem, és clar), són de gran utilitat a l'anàlisi i a la matemàtica aplicada.

El següent teorema, degut a *Banach*, i anomenat *principi de contracció*, ens proporciona un criteri per a determinar l'existència d'un únic punt fix i per a calcular una successió de punts que hi tendeixen.

El teorema ens diu que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  és contínua en un conjunt tancat  $C$  del domini de  $f$ , si  $f$  aplica  $C$  en  $C$ , i si existeix un número real positiu  $k < 1$  tal que  $|f(x) - f(y)| < k|x - y|$  per a qualssevol  $x, y \in C$ , llavors existeix un únic punt  $x^* \in C$  tal que  $x^* = f(x^*)$ , i si  $x_0$  és qualsevol punt de  $C$ , llavors la successió  $\{f^n(x_0)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , tendeix a  $x^*$  quan  $n \rightarrow \infty$ . (Aquí  $f^n(x_0)$  significa la funció  $f$  aplicada successivament a  $x_0$   $n$  vegades, és a dir  $f^n(x) = f(f(\dots f(x_0)))$ , amb  $n$  parèntesis).

Per a demostrar aquest teorema, prenem un punt arbitrari  $x_0 \in C$ . Definim recursivament  $x_{n+1} = f(x_n)$ , de manera que resulta  $x_n = f^n(x_0)$ . Tenim que, si  $m > n$ ,

$$|x_n - x_m| = |f^n(x_0) - f^m(x_0)| \leq k|f^{n-1}(x_0) - f^{m-1}(x_0)| \leq \dots \leq k^n|x_0 - x_{m-n}|.$$

Fent servir la desigualtat del triangle, resulta que això és més petit o igual que

$$k^n(|x_0 - x_1| + |x_1 - x_2| + \dots + |x_{m-n-1} - x_{m-n}|),$$

que, al seu torn, és menor o igual que

$$k^n|x_0 - x_1|(1 + k + \dots + k^{m-n-1}).$$

La suma entre parèntesis és la d'una progressió geomètrica de raó  $k$  i primer terme 1, i que per tant val menys que  $1/(1 - k)$ . Queda, doncs, que

$$|x_n - x_m| < |x_0 - x_1|k^n/(1 - k).$$

Com que  $0 < k < 1$ , resulta que prenent  $n$  prou gran, aquesta quantitat és tan petita com vulguem. (És a dir, donada  $\varepsilon > 0$ , existeix  $n_0$  tal que si  $n > n_0$ , llavors  $|x_n - x_m|$ , amb qualsevol  $m$  més gran que  $n$ , és més petit que  $\varepsilon$ ). Això vol dir que la successió  $\{x_n\}$  és de Cauchy. Com que  $\mathbb{R}^n$  és complet,  $\{x_n\}$  resulta convergent, és a dir, hi ha un punt  $x^*$  tal que  $\{x_n\} \rightarrow x^*$  quan  $n \rightarrow \infty$ . Com que cada  $x_n$  pertany a  $C$ , tenim que  $x^*$  està a l'adherència de  $C$ , i essent  $C$  tancat,  $x^*$  ha de pertànyer a  $C$ .

Essent  $f$  contínua, tenim que si  $x_n \rightarrow x^*$  quan  $n \rightarrow \infty$ , llavors  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  quan  $n \rightarrow \infty$ . Per tant de la igualtat  $x_n = f(x_{n-1})$  se segueix que  $\lim\{x_n\} = \lim\{f(x_{n-1})\}$ , és a dir  $x^* = f(x^*)$ . Això ens proporciona un punt

fix i una successió per aproximar-nos-hi. Que aquest punt fix ha de ser únic resulta del fet que si  $x^{**} = f(x^{**})$  tenim  $|f(x^*) - f(x^{**})| \leq k|x^* - x^{**}|$ . Com que la banda esquerra val  $|x^* - x^{**}|$  i  $k \in (0, 1)$ , això només és possible si  $|x^* - x^{**}| = 0$ , és a dir, si  $x^* = x^{**}$ .

Hi ha altres teoremes que garanteixen l'existència d'algun punt fix. Així, el de *Brouwer* ens diu que si tenim una aplicació contínua d'una bola tancada de  $\mathbb{R}^n$  en ella mateixa, tenim almenys un punt fix (en aquest cas n'hi pot haver d'altres). La demostració és de caràcter topològic i escapa a l'abast d'aquest llibre.

Que hi hagi punts fixos d'aplicacions contínues d'una bola tancada de  $\mathbb{R}^n$  en ella mateixa (en particular, si  $n = 1$ , d'un interval tancat  $I$  de  $\mathbb{R}$  en ell mateix), no exclou que hi hagi punts  $x_0 \in I$  tals que la successió  $\{f^n(x_0)\}$  tingui un comportament complicat, donant origen a l'anomenada *dinàmica caòtica*.

## 2. Demostració del teorema de la funció inversa

Sigui

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, t) &\mapsto (x, y), \end{aligned}$$

una funció de classe  $C^1$  en un entorn del punt  $(s_0, t_0)$ , i suposem que  $Df(s_0, t_0)$  té inversa. Llavors existeix un entorn  $U$  de  $(s_0, t_0)$  que s'aplica bijectivament sobre un entorn  $V$  de  $(x_0, y_0) = f(s_0, t_0)$ , i la funció inversa  $f^{-1}$  és de classe  $C^1$  a  $V$ . A més  $Df^{-1}(x, y) = (Df(s, t))^{-1}$ .

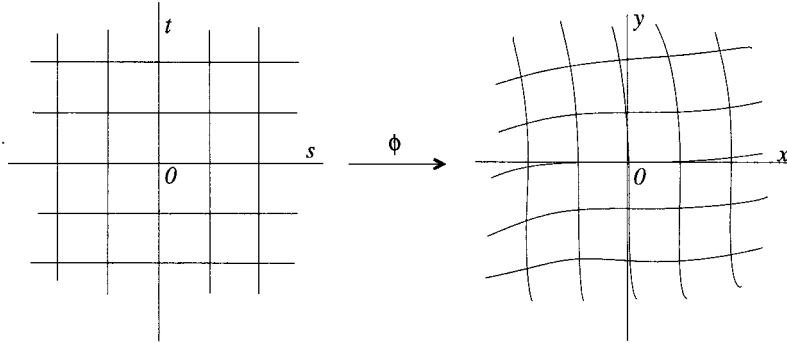
La demostració d'aquest teorema es troba a molts textos utilitzant algun teorema de punt fix, com ara el de l'aplicació contractiva de Banach (vegeu el llibre de Schwartz, per exemple). Tot i això ens hem estimat més fer una demostració, potser una mica més llarga, però que posa més en evidència el caràcter, diguem-ne geomètric, d'una aplicació invertible.

Sense pèrdua de generalitat podem suposar  $(s_0, t_0) = 0$  i  $f(0) = 0$ , prenent per  $f$  la nova funció  $f(s + s_0, t + t_0) - (x_0, y_0)$ .

Designem  $A = Df(0)$ . Si  $L = A^{-1}$ , i definim  $\phi = L \circ f$ , resulta que  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  també és  $C^1$ ,  $\phi(0) = 0$  i per la regla de la cadena deduïm  $D\phi(0) = L(f(0))Df(0) = LA = I$ .

Com que  $A$  és bijectiva, i  $C^1$ , n'hi ha prou amb provar que  $\phi$  té inversa  $C^1$  en un entorn de 0 per a tenir provat el teorema.

Primer mostrarem que  $\phi$  és bijectiva en algun entorn de 0. La idea és fer servir la "quadrícula" formada per  $s = \text{const}$ ,  $t = \text{const}$  i veure que prop de 0 gairebé no es deforma sota  $\phi$ , és a dir, que la imatge de la quadrícula omplirà tot un entorn de 0 sense "plegar-se" ni deixar forats.



Considerem les imatges de les línies “horitzontals” de la quadrícula ( $t = \text{const}$ ). Posem

$$\begin{aligned} \phi_t : \phi(\cdot, t) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, t) &\mapsto \phi(s, t) =: (x, y). \end{aligned}$$

Com que  $\phi$  és  $C^1$ , podem prendre un entorn de 0, per exemple un quadrat  $Q = [-a, a] \times [-a, a]$ , de manera que la diferencial  $D(\phi)$  no difereixi gaire de la identitat. Així, per a  $(s, t) \in Q$ , tenim

$$\phi'_t(s, t) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t) = \left( \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s} \right),$$

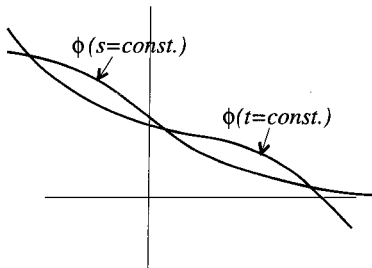
amb  $|\frac{\partial x}{\partial s} - 1| < \frac{1}{8}$ ,  $|\frac{\partial y}{\partial s}| < \frac{1}{8}$ , si  $a$  és prou petit.

D’una manera semblant definim  $\phi_s = \phi(s, \cdot)$ , i tenim  $\phi'_s(s, t) = \partial \phi / \partial t(s, t) = (\partial x / \partial t, \partial y / \partial t)$ , amb  $|\partial x / \partial t| < \frac{1}{8}$ ,  $|\partial y / \partial t - 1| < \frac{1}{8}$  si  $a$  és prou petit.

Naturalment en lloc d’ $1/8$  podríem haver posat qualsevol  $\varepsilon > 0$  que no fos més gran del que ens forcen els arguments que segueixen.

Això mostra que les imatges de les línies  $t = \text{const}$  es projecten correctament sobre l’eix  $x$ , ja que si  $y(x)$  és la funció que té per gràfica una d’aquestes línies, llavors  $|dy/dx| = |(\partial y / \partial s)(\partial x / \partial s)| < \frac{1}{8} / \frac{7}{8} = 1/7$ . I de la mateixa manera les imatges de cada  $s = \text{const}$  es projecten bé sobre l’eix  $y$ . A més, notem que cada una d’aquestes imatges cobreix l’interval  $[-a/2, a/2]$ : efectivament, com que  $|\partial x / \partial t| < 1/8$ , la imatge de l’eix  $s = 0$ , per  $|t| < a$ , no s’allunya de l’eix  $y$  en més de  $a/8$ . Per altra banda, en diferir  $\partial x / \partial s$  en menys d’ $1/8$  d’1, tenim que les imatges de la recta  $t = k$ ,  $|k| \leq a$ , restringida a  $s \in [-a, 0]$  i  $s \in [0, a]$ , es projecten a l’eix  $x$  cobrint, cadascuna, segments de longitud  $7a/8$ . Per tant la imatge de  $t = k$ ,  $s \in [-a, a]$  es projecta a l’eix  $x$  cobrint l’interval  $[-3a/4, 3a/4]$ , i per tant també l’interval  $[-a/2, a/2]$ . De la mateixa manera passa amb les imatges de  $s = \text{constant}$ .

No n’hi ha prou que la imatge de la quadrícula es projecti bé per a deduir-ne la injectivitat. De fet és imaginable que es donés un cas com el que il·lustrem a la figura si no vigilem la magnitud de les derivades.



Per a veure que  $\phi$  és injectiva, comprovarem que

$$|(s_2, t_2) - (s_1, t_1)| < 2|\phi(s_2, t_2) - \phi(s_1, t_1)|,$$

si els punts  $(s_2, t_2)$  i  $(s_1, t_1)$  són a  $Q$ . Amb això, és clar que dos punts diferents s'apliquen sota  $\phi$  sobre dos punts diferents.

Per a establir aquesta desigualtat cal una mica de feina. Per començar demostrarem que

$$|(\phi - I)(s_2, t_2) - (\phi - I)(s_1, t_1)| < \frac{1}{2}|(s_2, t_2) - (s_1, t_1)|.$$

Denotem  $\phi - I$  ( $I$  és la identitat), per  $\psi$ . Tenim, doncs, que les derivades parcials de  $\psi$  estan acotades per  $1/8$  a  $Q$ .

Sumant i restant un terme tenim

$$\begin{aligned} \psi_i(s_2, t_2) - \psi_i(s_1, t_1) &= \psi_i(s_2, t_1) - \psi_i(s_1, t_1) \\ &+ \psi_i(s_2, t_2) - \psi_i(s_2, t_1), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Pel teorema del valor mitjà de la derivada, ens resulta que això és igual a

$$(s_2 - s_1) \frac{\partial \psi_i}{\partial s}(s^*, t_1) + (t_2 - t_1) \frac{\partial \psi_i}{\partial t}(s_2, t^*), \quad i = 1, 2,$$

on  $s^* \in (s_1, s_2)$  i  $t^* \in (t_1, t_2)$ .

Com que aquestes derivades estan acotades en valor absolut per  $1/8$ , ens queda

$$|\psi_i(s_2, t_2) - \psi_i(s_1, t_1)| < \frac{1}{8}|s_2 - s_1| + \frac{1}{8}|t_2 - t_1| \leq \frac{1}{4}|(s_2, t_2) - (s_1, t_1)|, \quad i = 1, 2,$$

on hem fet servir que per a qualsevol vector  $x$ ,  $|x_i| \leq |x|$ .

D'aquí obtenim

$$\begin{aligned} |\psi(s_2, t_2) - \psi(s_1, t_1)| &\leq |\psi_1(s_2, t_2) - \psi_1(s_1, t_1)| + |\psi_2(s_2, t_2) - \psi_2(s_1, t_1)| \\ &< \frac{1}{2}|(s_2, t_2) - (s_1, t_1)|, \end{aligned}$$

on utilitzem que per a un vector  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $|x| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$  (que es comprova fàcilment elevant al quadrat).

Com que  $\psi = \phi - I$  certament compleix les condicions d'acotament de les derivades, ja tenim provada la desigualtat que ens acota la diferència de  $\phi - I$  avaluada a dos punts diferents, tal com volíem.

Ara, per acabar de demostrar la desigualtat que ens prova la injectivitat de  $\phi$ , utilitzem la desigualtat del triangle i obtenim

$$|(s_2, t_2) - (s_1, t_1)| - |\phi(s_2, t_2) - \phi(s_1, t_1)| \leq |(\phi - I)(s_2, t_2) - (\phi - I)(s_1, t_1)|,$$

i com que això és més petit que  $\frac{1}{2}|(s_2, t_2) - (s_1, t_1)|$ , ens queda finalment el que volíem

$$|(s_2, t_2) - (s_1, t_1)| < 2|\phi(s_2, t_2) - \phi(s_1, t_1)|.$$

Per tant queda establert que  $\phi$  és injectiva a  $Q$ .

Per establir-ne l'exhaustivitat sobre el quadrat  $R = [-a/2, a/2]^2$ , és a dir, per veure que tot punt d'aquest quadrat queda cobert per la imatge sota  $\phi$  d'un punt de  $Q$ , fem el següent:

Prenem  $x_0 \in [-a/2, a/2]$  i fixem-nos que la funció  $x(\cdot, t) : s \mapsto x(s, t)$  és contínua i creixent, ja que té derivada propera a 1, i pren tots els valors de  $[-a/2, a/2]$ . Existeix, doncs, un únic valor  $s_0$ , que dependrà de  $t$  i que designem per  $s_0(t)$ , i que satisfà  $x(s_0(t), t) = x_0$ .

Considerem ara la funció  $\eta(t) := y(s_0(t), t)$ . Tenim que  $\eta(a) > a/2$ , mentre que  $\eta(-a) < -a/2$ , a causa del fet que tant  $s_0(-a)$  com  $s_0(a)$  pertanyen a l'interval  $[-a, a]$ .

Demostrem ara que  $\eta$  és contínua:

Tenim

$$\begin{aligned} |\eta(t + \varepsilon) - \eta(t)| &= |y(s_0(t + \varepsilon), t + \varepsilon) - y(s_0(t), t)| \\ &\leq |y(s_0(t + \varepsilon), t + \varepsilon) - y(s_0(t), t + \varepsilon)| \\ &\quad + |y(s_0(t), t + \varepsilon) - y(s_0(t), t)|. \end{aligned}$$

D'altra banda

$$|y(s_0(t + \varepsilon), t + \varepsilon) - y(s_0(t), t + \varepsilon)| < \frac{1}{7}|x(s_0(t), t) - x(s_0(t), t + \varepsilon)|,$$

ja que  $|(\partial y / \partial s) / (\partial x / \partial s)| < 1/7$ .

A causa de la continuïtat tant de  $x$  com de  $y$ , resulta que els termes de la dreta de la desigualtat tendeixen a 0 quan  $\varepsilon$  tendeix a 0. És a dir,  $\eta$  és contínua, tal com volíem establir.

Com que és contínua i pren valors més grans que  $a/2$  i més petits que  $-a/2$ , resulta que la imatge de  $[-a, a]$  sota  $\eta$  cobreix l'interval  $[-a/2, a/2]$ . Amb això queda provat que  $\phi$  és exhaustiva sobre  $[-a/2, a/2]^2$ , i junt amb la injectivitat, ja demostrada, queda establerta l'existència de  $\phi^{-1}$  definida en aquest darrer quadrat.

Falta mostrar que  $f^{-1}$  és derivable amb continuïtat i calcular-ne la derivada.

Per a això, de la desigualtat que hem fet servir per fer veure que  $\phi$  era injectiva, deduïm prenent la funció inversa

$$|\phi^{-1}(x_2, y_2) - \phi^{-1}(x_1, y_1)| < 2|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)|,$$

la qual cosa prova que  $\phi^{-1}$  és contínua.

Per veure que és derivable amb derivada  $(D\phi)^{-1}$ , recordem que

$$\phi(\sigma_1) = \phi(\sigma) + D\phi(\sigma)(\sigma_1 - \sigma) + \psi(\sigma_1 - \sigma),$$

on hem posat  $\sigma = (s, t)$  i  $\psi$  és  $o(|\sigma_1 - \sigma|)$ .

Aplicant  $Df(\sigma)^{-1}$ , que existeix, als dos costats, queda

$$D\phi(\sigma)^{-1}(\phi(\sigma_1) - \phi(\sigma)) = \sigma_1 - \sigma + D\phi(\sigma)^{-1}\psi(\sigma_1 - \sigma),$$

o bé, fent  $\phi(\sigma) = \xi$  per a  $\xi \in R$ :

$$\phi^{-1}(\xi_1) = \phi^{-1}(\xi) + D\phi(\sigma)^{-1}(\xi_1 - \xi) - D\phi(\sigma)^{-1}\psi(\phi^{-1}(\xi_1) - \phi^{-1}(\xi)).$$

El darrer terme és  $o(|\xi_1 - \xi|)$ , com es desprèn de

$$\begin{aligned} |\psi(\phi^{-1}(\xi_1) - \phi^{-1}(\xi))|/|\xi_1 - \xi| &= (|\psi(\phi^{-1}(\xi_1) - \phi^{-1}(\xi))|/|\phi^{-1}(\xi_1) - \phi^{-1}(\xi)|) \times \\ &\times (|\phi^{-1}(\xi_1) - \phi^{-1}(\xi)|/|\xi_1 - \xi|), \end{aligned}$$

i, essent  $\phi^{-1}$  contínua, resulta que  $\phi^{-1}(\xi_1) - \phi^{-1}(\xi) \rightarrow 0$  quan  $\xi_1 \rightarrow \xi$ , d'on se segueix que el primer factor de la banda dreta tendeix a 0, ja que  $\psi(\xi) = o(|\xi|)$ , i, per les desigualtats, obtingudes abans, el segon factor està acotat per 2. Per tant, tota l'expressió tendeix a 0 i queda establert que

$$\phi^{-1}(\xi_1) = \phi^{-1}(\xi) + D\phi(\sigma)^{-1}(\xi_1 - \xi) + o(|\xi_1 - \xi|),$$

és a dir,  $D\phi(\sigma)^{-1}$  és la derivada a  $\phi(\sigma) = \xi$  de  $\phi^{-1}$ .

Per a fer la demostració per a  $n > 2$  procedim de la manera següent:

La injectivitat es demostra de la mateixa manera, tenint en compte, però, de posar condicions més restrictives sobre les derivades. En lloc de posar la cota  $1/8$ , hem de posar la cota  $1/2^n$  perquè les coses vagin bé.

Per a provar l'exhaustivitat, considerem primer  $n=3$  i  $\phi: (r, s, t) \mapsto (x, y, z)$ . Donem  $(x_0, y_0)$  i cerquem, per a cada  $t$  un punt  $(r_0, s_0)$  de  $\mathbb{R}^2$  de manera que  $x(r_0, s_0, t) = x_0$ ,  $y(r_0, s_0, t) = y_0$ . Com que  $D\phi$  és propera a la identitat al domini  $[-a, a]^3$  on considerem  $\phi$ , resulta que  $D_{r,s}(\phi_1, \phi_2)$  és no singular, i, per tant, el teorema que ja hem provat per a  $n=2$  ens assegura l'existència d'un sol punt  $(r_0(t), s_0(t))$  que compleix les igualtats anteriors. D'una manera semblant al cas anterior, però una mica més complicada, es veu que  $z(r_0(t), s_0(t), t)$  és contínua en  $t$ , i per tant que  $\phi$  és exhaustiva.

Per a  $n$  més gran, anem procedint per inducció.

Els detalls de tot això resulten força embullats i no hi insistirem. Potser el lector s'estimarà més veure les demostracions del llibre de Spivak sobre Càlcul en Varietats, o el de Schwartz per a altres proves.

La part final de la prova en què es veu que  $\phi^{-1}$  és derivable és exactament la mateixa que hem escrit en el cas anterior.

### 3. Demostració del teorema de funció implícita

Sigui

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto f(x, y), \end{aligned}$$

que suposem que té derivada contínua en un entorn de  $(x_0, y_0)$ ,  $f(x_0, y_0) = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$ . Suposem també que  $D_y f(x_0, y_0)$ , que és una aplicació contínua de  $\mathbb{R}^m$  en  $\mathbb{R}^m$ , és no singular, és a dir, té inversa. Llavors, existeix una única funció  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^1$  en un entorn de  $x_0$ , i complint  $g(x_0) = y_0$  i  $f(x, g(x)) = 0$ .

Per demostrar-ho, definim

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto (x, f(x, y)). \end{aligned}$$

Tenim que  $F(x_0, y_0) = (x_0, 0)$  i

$$DF = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Df \end{pmatrix},$$

i per tant  $\det DF = \det Df$ .

Pel teorema de funció inversa tenim que existeix un invers local  $F^{-1}$  de la funció  $F$ . Aquest invers és de la forma  $F^{-1}(x, y) = (x, h(x, y))$  per a alguna  $h$  a  $C^1$ . (Fixem-nos que la primera component de  $F$  és la identitat).

Sigui  $P$  l'aplicació que projecta  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  sobre la segona component, és a dir sobre  $\mathbb{R}^m$ :  $P(x, y) = y$ . Tenim que  $P \circ F = f$ .

Tenim ara

$$\begin{aligned} f(x, h(x, y)) &= f \circ F^{-1}(x, y) \\ &= P(x, y) = y. \end{aligned}$$

D'aquí que  $f(x, h(x, 0)) = 0$ .

Cal, doncs, prendre  $g(x) = h(x, 0)$ . Llavors tindrem també

$$g(x_0) = h(x_0, 0) = P \circ F^{-1}(x_0, 0) = y_0.$$

### 4. Demostració que $\Gamma'(1) = -\gamma$

A l'apèndix del capítol 5 hem deixat pendent la demostració que la derivada de la funció *gamma* avaluada a 1 és el negatiu de la *constant d'Euler*. Per a demostrar-ho, utilitzant el teorema de derivació sota el signe d'integral de la secció 8.18 tenim que, essent  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ , que convergeix, podem obtenir  $\Gamma'$  derivant respecte de  $x$  sota el signe d'integral. Obtenim

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \ln t dt,$$



que també convergeix uniformement, i per tant el teorema és vàlid.

Avaluant  $\Gamma'$  a 1, queda, doncs,

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt.$$

La constant d'Euler  $\gamma$  ve donada

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right),$$

que és igual a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} \, dx - \int_1^n \frac{dx}{x} \right),$$

ja que  $\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + \dots + x^{n-1}$ , i en integrar-ho entre 0 i 1 obtenim la suma de més amunt.

Ara això és igual a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^n \left( 1 - \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{dt}{t} \right),$$

que hem obtingut fent el canvi  $x = 1 - \frac{t}{n}$  a la primera integral de l'expressió de més amunt:

$$\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} \, dx = \int_0^n \frac{1 - \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n}{1 - 1 + \frac{t}{n}} \frac{dt}{n}.$$

Ara, podem escriure aquest límit com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 \left( 1 - \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) \frac{dt}{t} - \int_1^n \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n \frac{dt}{t} \right),$$

on hem descompost la primera integral sobre  $[0, n]$  en una sobre  $[0, 1]$  més una altra sobre  $[1, n]$ , i hem reagrupat els termes.

Els integrands d'aquestes integrals convergeixen uniformement sobre intervals acotats a  $(1 - e^{-t})/t$  i  $e^{-t}/t$ , respectivament, raó per la qual el límit anterior queda

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} \, dt - \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt.$$

La segona integral és impròpia, i l'expressió anterior s'ha d'entendre com

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt - \ln \varepsilon \right),$$

on hem separat  $\int_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{t} = -\ln \varepsilon$  de la resta.

Integrant per parts veiem que

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt = e^{-\varepsilon} \ln \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt,$$

i per tant, ja que  $(e^{-\varepsilon} - 1) \ln \varepsilon \rightarrow 0$  quan  $\varepsilon \rightarrow 0$ , el límit anterior resulta igual a

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt = -\int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt.$$

I amb això hem demostrat que  $\Gamma'(1) = -\gamma$ .

## Capítol 9

# Les equacions diferencials de primer ordre

### 9.1 Introducció

Una de les motivacions importants per a la creació del càlcul infinitesimal va ser la de poder resoldre problemes com el del moviment dels cossos del Sistema Solar, on apareixen de manera central les equacions diferencials. Si bé diuen que a *Newton* se li va ocórrer la llei de la gravitació en veure caure una poma, la veritat és que la seva aportació a la mecànica i a la matemàtica té arrels molt més pregones, i molt probablement inconscients per a *Newton* mateix. Per exemple, al segle XVII la navegació transatlàntica ja era molt intensa i es trobava amb la dificultat de la determinació de la posició de la nau, o, més precisament, de la seva longitud geogràfica, ja que la latitud era prou fàcil de trobar, ni que fos fent servir l'altura sobre l'horitzó de l'estrella polar. Per a determinar la longitud cal saber la diferència d'hora (solar, per exemple) entre el punt on es troba la nau i el meridià de referència (diguem Greenwich). En l'actualitat això s'aconsegueix molt fàcilment amb la transmissió quasi instantània de senyals per ones de ràdio. També es pot aconseguir amb un rellotge sincronitzat amb els rellotges al meridià d'origen. Al segle XVII no hi havia rellotges prou bons per aconseguir-ho, (recordem que Huygens va inventar el rellotge de pèndol a mitjan segle XVII), i es feia l'intent, per part de les corts francesa i anglesa principalment, de poder utilitzar com a rellotge comú per a tots els observadors el moviment dels planetes i els satèl·lits a l'esfera celest. Abreujant l'exposició, *Newton* aconseguí donar les eines matemàtiques i les lleis de la mecànica que van permetre plantejar les equacions del moviment dels planetes, satèl·lits i cometes, que no són altra cosa que equacions diferencials, és a dir, relacions entre la posició dels cossos en un moment donat i la seva acceleració, és a dir, la segona derivada de la seva posició respecte del temps.

No cal dir que *Newton* i els seus successors van tenir èxit en el plantejament de les seves equacions, però no tant d'èxit en la seva resolució ni en la utilització

dels cossos celests com a rellotge comú. Per una banda la dificultat de la resolució de les equacions diferencials que es van plantejar va sobrepasar de molt les possibilitats del moment, i, de l'altra, el moviment dels satèl·lits de Júpiter, diguem, o de la Lluna, era o massa lent o massa afectat per la paral·laxi per a ser d'utilitat pràctica. Finalment, al segle XVIII, *Le Roy* i *Harrison* aconseguiren construir rellotges de pèndol capaços d'apartar-se de sincronia menys de dos minuts en un viatge d'anada i tornada a Amèrica, i van guanyar d'alguna manera la cursa plantejada. (Pensem que cada minut de temps correspon a 15 minuts d'arc de longitud, és a dir a 15 milles a l'equador.)

Les dificultats per a trobar les propietats de les solucions de les equacions diferencials no s'han pogut resoldre del tot, encara. A la pràctica, però, ja des del temps de Newton es van anar desenvolupant mètodes de càlcul numèric que van permetre de trobar una solució de les equacions diferencials amb condicions inicials conegudes. Aquests mètodes, entre els quals tenim el d'Euler, el de Runge-Kutta, i els d'Adams-Bashforth i Adams-Moulton, requereixen una gran quantitat d'operacions aritmètiques si és que es volen tenir les solucions amb un mínim de precisió. Els astrònoms i matemàtics de l'època, amb gran enginy i feina, aconseguiren escriure les efemèrides dels cossos celests utilitzant-los. Més encara, eren capaços de descobrir anomalies en el seu moviment i a partir d'aquestes descobrir Neptú i Plutó! Ens hem de treure el barret davant d'ells. Avui la tasca s'ha simplificat molt: els ordinadors digitals electrònics, amb una gran rapidesa de càlcul i una gran memòria, permeten trobar aquestes solucions amb molta precisió i en molt poc temps. Abans de la seva utilització hauria estat impossible resoldre les equacions diferencials que permeten enviar una nau a la Lluna, o a Júpiter.

No totes les equacions diferencials provenen de la mecànica celest. També apareixen de manera molt rellevant com a etapa final del problema de trobar solucions òptimes utilitzant el càlcul de variacions, o per a descriure la dinàmica d'un mecanisme, o bé les oscil·lacions d'un circuit electrònic, o l'evolució de poblacions d'espècies diferents que interactuen. De fet, el que moltes de les lleis de la natura fan és relacionar l'estat d'un sistema en un moment donat amb la taxa instantània de canvi del sistema en aquest moment. Aquesta relació no és, doncs, més que una equació diferencial si és que podem identificar l'estat del sistema amb números o funcions. Per això, les equacions diferencials s'han convertit en mitjans poderosos de modelització. El següent paper de la matemàtica, gens senzill, és dir coses sobre les solucions d'aquestes equacions que ajudin a entendre el fenomen i potser a utilitzar-lo en el nostre profit.

En aquest capítol farem un estudi, no gaire complet, de les equacions diferencials ordinàries de primer ordre, deixant per al capítol següent les equacions d'ordre més gran. A l'apèndix hem inclòs una visió molt succinta del càlcul de variacions, perquè ens ha semblat que seria interessant utilitzar les nostres eines per a resoldre un problema tan clàssic i ple de sentit com el de la braquistòcrona.

## 9.2 L'equació diferencial de primer ordre autònoma

Una *equació diferencial de primer ordre autònoma* és una relació funcional entre una funció d'una variable i la seva derivada, sense que en aquesta relació aparegui explícitament aquesta variable. Amb més precisió, la relació ve donada per una funció  $\phi$  definida a un obert de  $\mathbb{R}^2$  amb valors reals, mitjançant l'expressió  $\phi(x(t), x'(t)) = 0$ . Aquesta darrera igualtat és l'expressió de l'equació diferencial, i es pot complir o no per a alguna funció  $x$  definida a algun interval  $I$ . Si es compleix diem que  $x$  és *solució de l'equació a l'interval  $I$* . Utilitzem el nom *autònoma* per a distingir-la de la relació donada per  $\phi(t, x(t), x'(t)) = 0$ , que ja estudiarem més endavant.

Per tal de tractar aquestes equacions ens ocuparem del cas en què podem expressar  $x'(t)$  en funció de  $x(t)$ , de manera que ens quedi

$$x'(t) = f(x(t)),$$

amb  $f$  definida a un interval de  $\mathbb{R}$ .

Notem que el teorema de la funció implícita ens garanteix que això és possible si  $\phi(x, y)$ , derivable amb continuïtat, és tal que  $\phi(\xi, \eta) = 0$  i  $\frac{\partial \phi}{\partial y}(\xi, \eta) \neq 0$  per a un punt  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ . En aquest cas existeix una funció  $f(x)$ , derivable amb continuïtat, definida a algun interval, complint  $\phi(x, f(x)) = 0$  amb  $f(\xi) = \eta$ . Per tant  $\phi(x(t), x'(t)) = 0$  es compleix per a alguna  $x$  definida a algun interval amb  $x(\tau) = \xi$ ,  $x'(\tau) = \eta$ , si i solament si  $x'(t) = f(x(t))$ .

Per a simplificar la notació, l'abreujarem escrivint  $x' = f(x)$ .

L'objectiu de la teoria de les equacions diferencials és donar-nos la capacitat de trobar propietats de les seves solucions i, en particular, donar-nos-en l'expressió si això és possible.

Al capítol 4 ja ens hem trobat amb el fet que si  $x' = x$ , llavors necessàriament  $x(t) = x(0)e^t$ , és a dir, en aquest cas obtenim totes les solucions de l'equació diferencial.

Per al cas més general  $x' = f(x)$ , considerem una funció  $x(t)$  que compleixi

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{d\xi}{f(\xi)} = t - t_0.$$

Si deridem respecte de  $t$ , obtenim

$$\frac{d}{dt} \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{d\xi}{f(\xi)} = \frac{x'(t)}{f(x(t))} = 1,$$

és a dir,  $x(t)$  és solució de l'equació (deixant de banda, de moment, el problema de la possible anul·lació de  $f$  a algun valor).

Fem notar que per arribar a aquesta fórmula podem utilitzar la notació de les diferencials de Leibniz, que no tractarem d'aclarir aquí:

A partir de  $dx/dt = f(x)$ , escrivim  $dx/f(x) = dt$ , i integrant arribem a la fórmula que hem escrit més amunt.

### 9.3 Exemples: creixement i decreixement exponencial

Si  $f(x) = ax$ , llavors  $x' = ax$ , i tenim

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{d\xi}{a\xi} = t - t_0,$$

o sigui

$$\ln \left| \frac{x(t)}{x(t_0)} \right| = a(t - t_0),$$

i d'aquí

$$|x(t)| = |x(t_0)|e^{a(t-t_0)}.$$

Fixem-nos que hem posat

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi} = \ln \left| \frac{x}{x_0} \right|,$$

(hem escrit  $x(t_0) = x_0$  per abreviar).

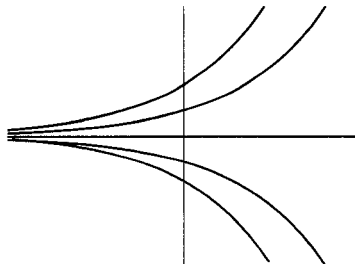
Aquesta utilització del valor absolut obeeix al fet que, en principi,  $x$  i  $x_0$  poden ser de signe contrari, i llavors, el que la integral indica és el *valor principal de Cauchy* de la integral (vegeu el capítol 5). Utilitzant aquest valor es veu de seguida que  $\int_{-x_0}^x d\xi/\xi = \int_{x_0}^x d\xi/\xi$ , ja que V.P.  $\int_{-x_0}^{x_0} d\xi/\xi = 0$ .

Per altra banda també resulta que en la nostra equació  $x(t)$  i  $x_0$  tenen el mateix signe, perquè si  $x(t) \rightarrow 0$ , llavors  $\int_{x_0}^{x(t)} d\xi/\xi = t - t_0$  tendeix a  $\infty$  o a  $-\infty$ , segons que  $x(t)$  sigui  $> 0$  o  $< 0$ . És a dir,  $x(t)$  no arriba a fer-se 0 per a un valor finit de  $t$ , i per tant no canvia de signe. Això ens justifica treure el valor absolut de l'expressió de la solució, i quedar-nos amb

$$x(t) = x(t_0)e^{a(t-t_0)}.$$

Resulta, doncs, que l'equació admet una solució constant, que és  $x(t) = 0$  per a tota  $t$ , i solucions que tendeixen *asimptòticament* a aquesta, és a dir, a 0, quan  $t \rightarrow \infty$  o bé quan  $t \rightarrow -\infty$ , depenent del fet que  $a$  sigui més petit o més gran que 0. Per l'altra banda tendeixen a  $\infty$ .

En un diagrama podem representar els diferents tipus de solucions, per exemple per a  $a > 0$ :



Aquesta equació,  $x' = ax$ , ens serveix per a descriure els processos de creixement i decreixement de poblacions (*lleï de Malthus*), la descàrrega d'un condensador elèctric a través d'una resistència, el buidatge d'un dipòsit de líquid cilíndric a través d'una vàlvula de flux proporcional a la pressió, el decaïment radioactiu d'una substància, etc. (vegeu els exercicis al final del capítol.)

## 9.4 Exemple: l'equació logística

En el cas del creixement d'una població, és raonable pensar que, a causa de la limitació dels recursos (alimentaris, per exemple), el coeficient  $a$  no és constant, sinó que decreix en créixer la població.

Aquesta situació es modela, per exemple, amb l'anomenada *equació logística*:

$$x' = (a - bx)x, \quad a, b > 0.$$

La solució la trobem mitjançant

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{d\xi}{(a - b\xi)\xi} = t - t_0.$$

L'integrand a l'esquerra és una funció racional, i la integral es pot escriure com  $(1/a) \int_{x_0}^x (1/\xi + b/(a - b\xi)) d\xi$ , que ens dona

$$\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{x_0} \right| \left| \frac{a - bx_0}{a - bx} \right| = t - t_0,$$

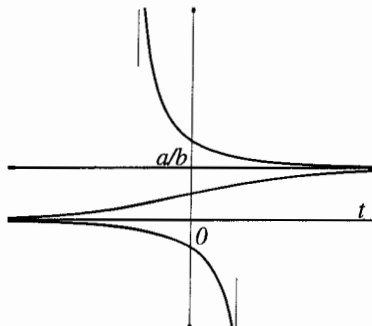
on hem abreujat  $x(t)$  i  $x(t_0)$  per  $x$  i  $x_0$  respectivament.

A aquesta expressió podem treure els valors absoluts, a  $|x/x_0|$  per la mateixa raó que a l'exemple anterior, i a  $|(a - bx_0)/(a - bx)|$ , ja que si  $x > a/b$  (resp.  $x < a/b$ ),  $x$  no pot fer-se igual a  $a/b$  en un temps finit, puix  $\int_{x_0}^{a/b} \frac{d\xi}{a - b\xi}$  divergeix.

A partir de la igualtat anterior, obtenim explícitament la solució com

$$x(t) = \frac{ax_0}{(a - bx_0)e^{-a(t-t_0)} + bx_0},$$

i les solucions tenen les gràfiques de la figura



Observem que tenim dues solucions constants,  $x(t) = 0$ , per a tota  $t$  i  $x(t) = a/b$  per a tota  $t$ . Corresponen, naturalment, als valors on  $x'(t)$  s'anulla, és a dir, on  $(a - bx)x$  es fa zero. A aquestes solucions constants tendeixen les altres quan  $t \rightarrow \infty$  o a  $-\infty$ , i si no, tendeixen a  $\infty$  o a  $-\infty$  per a un valor finit de  $t$ , és a dir, tenen asímptotes verticals (vegeu la secció 7).

## 9.5 Exemple: buidatge d'un dipòsit cilíndric en temps finit

Considerem un dipòsit cilíndric d'eix vertical contenint un líquid que surt per un forat del fons amb una velocitat igual a  $\sqrt{2gx}$ , on  $g$  és l'acceleració de la gravetat i  $x$ , que depèn del temps, és l'altura de la superfície del líquid sobre el forat. El flux que surt, que és igual a la derivada respecte del temps del volum del líquid contingut, és igual al producte de la velocitat per l'àrea del forat. Per altra banda aquest volum és igual al producte de  $x$  per l'àrea d'una secció horitzontal del dipòsit. Per tant, ajuntant totes les constants en una de sola, ens queda

$$x' = -k\sqrt{x}, \quad \text{per a } x \geq 0, \quad \text{on } k > 0.$$

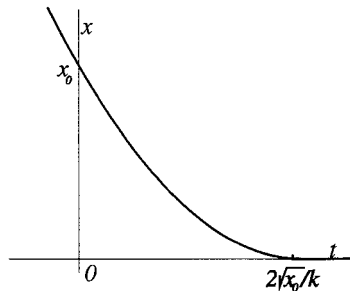
D'aquí que

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = -k(t - t_0),$$

i, per tant, prenent  $t_0 = 0$ ,

$$x(t) = \left( \sqrt{x_0} - \frac{k}{2}t \right)^2,$$

la qual cosa ens diu que les solucions són paràboles amb vèrtex a  $x = 0$  i  $t = 2\sqrt{x_0}/k$ .



Observem que  $x(t) = 0$  per a tota  $t$  és una solució, i les altres tenen per gràfiques paràboles i s'anul·len per a un valor finit de  $t$  (de fet per a  $t = 2\sqrt{x_0}/k$ ).

Les solucions admissibles que estan definides per a tota  $t \in \mathbb{R}$  vénen, doncs, donades per l'expressió anterior per a  $t \leq 2\sqrt{x_0}/k$ , i són 0 per a  $t$  més gran. És a dir, el dipòsit es buida en un temps finit.



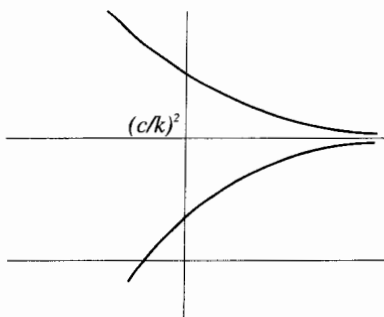
Ara, si al mateix dipòsit li anem afegint líquid a un ritme constant, llavors l'equació queda  $x' = -k\sqrt{x} + c$ ,  $x \geq 0$ , i de

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{k\sqrt{\xi} - c} = -(t - t_0).$$

Amb la substitució  $x = y^2$ ,  $\xi = \eta^2$ , queda

$$\frac{2}{k} \left( \int_{y_0}^y d\eta + \int_{y_0}^y \frac{c d\eta}{k\eta - c} \right) = \frac{2}{k} \left( \sqrt{x} - \sqrt{x_0} + \frac{c}{k} \ln \frac{k\sqrt{x} - c}{k\sqrt{x_0} - c} \right) = t_0 - t.$$

Si  $c \neq 0$  resulta que, diferentment a com passa en el cas anterior ( $c = 0$ ), la solució  $x(t)$  no pot atènyer el valor  $(c/k)^2$ , corresponent a la solució constant, en un temps finit, sinó asimptòticament, tal com es mostra a la figura



## 9.6 Comportament de solucions properes a solucions constants

Els dos exemples anteriors ens mostren dos comportaments ben diferents de les solucions que tendeixen a una solució constant: mentre que en el cas de l'equació logística les solucions hi tendeixen asimptòticament per a  $t$  tendint a  $\infty$  o bé a  $-\infty$ , al buidatge d'un dipòsit foradat, la solució tendeix a un valor constant, atenyent-lo en un temps finit.

Que el valor  $x^*$ , corresponent a una solució constant  $x^*(t) = x^*$  per a tota  $t$ , s'atenyi per a un valor finit de  $t$  per a una solució  $x(t)$  que valgui  $x_0$  per a  $t = t_0$  depèn del valor de la integral

$$\int_{x_0}^{x^*} \frac{d\xi}{f(\xi)}.$$

Si aquesta integral és finita, llavors existeix un valor  $t^*$  que fa  $x(t^*) = x^*$ .

En canvi si la integral no convergeix, o més precisament, si tendeix a  $+\infty$  o a  $-\infty$  quan l'extrem superior de l'interval d'integració tendeix a  $x^*$  des de la banda de  $x_0$ , llavors la solució  $x$  tendeix a  $x^*$  quan  $t$  tendeix a  $+\infty$  o a

$-\infty$ , sense atènyer mai el valor  $x^*$ . En aquest cas diem que  $x(t)$  tendeix a  $x^*$  *asimptòticament*.

En l'exemple anterior del buidatge d'un dipòsit en un temps finit, teníem que la integral anterior era  $\int_{x_0}^0 d\xi/\sqrt{\xi}$ , que certament té un valor finit.

Observem que, en general, tal com passa en el cas del dipòsit, si el valor  $x^*$  s'ateny en temps finit, llavors hi ha una infinitat de solucions que prenen el valor  $x^*$  per a un mateix valor de  $t$ . Es diu que no hi ha *unicitat* de solucions amb el mateix valor inicial.

## 9.7 Comportament de solucions tendint a infinit

En alguns exemples anteriors (vegeu 9.3), les solucions que tendeixen a més o a menys infinit ho fan amb  $t$  tendint també a més o a menys infinit.

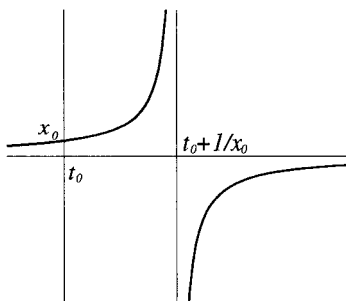
Si considerem, però, l'equació  $x' = x^2$ , ens trobem que la solució  $x$  que val  $x_0$  per a  $t = t_0$ , satisfà

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\xi^2} = t - t_0,$$

la qual cosa dóna

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}.$$

Aquesta solució té per gràfica una hipèrbola amb asymptota vertical a  $t_0 + 1/x_0$ .



Resulta, doncs, que si volem que les solucions siguin funcions contínues, no tenim cap solució, exceptuant  $x$  idènticament nul·la, que estigui definida per a tot valor de  $t$ .

Com que  $x(t) \rightarrow \infty$  quan  $t \rightarrow t_0 + \frac{1}{x_0}$  per l'esquerra, diem que  $x$ , la solució, *s'escapa a  $\infty$*  per a un valor de  $t$  finit.

Aquest fenomen *d'escapament en temps finit*, com se sol anomenar, es presenta quan la integral  $\int_{x_0}^{\infty} d\xi/f(\xi)$  és finita, com al cas que acabem de considerar, o també en el de l'equació logística per a solucions negatives, per exemple.

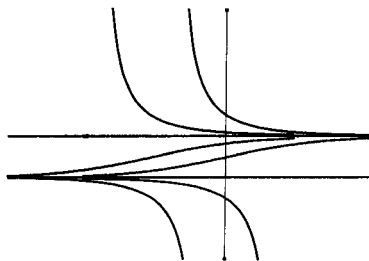
D'acord amb això, si  $f(x) = O(|x|)$  per a  $|x|$  tendint a  $\infty$ , és a dir, si existeixen  $A > 0$  i  $M > 0$  tals que  $|f(x)| \leq A + M|x|$ , llavors el fenomen no es dona i la solució està definida per a tota  $t$  de  $\mathbb{R}$ . Efectivament, si, per exemple,  $x > x_0 > 0$  i  $f(x) > 0$  per a  $x > x_0$ ,

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)} \geq \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{A + M\xi} = \frac{1}{M} \ln \left| \frac{A + Mx}{A + Mx_0} \right|,$$

que tendeix a  $\infty$  quan  $x$  ho fa.

## 9.8 Propietats del conjunt de solucions

Observem que si  $x(t)$  és una solució de  $x' = f(x)$  amb  $x(t_0) = x_0$ , llavors  $y(t) = x(t + t_0)$  també n'és solució, amb  $y(0) = x_0$ . Això es reflecteix en les gràfiques de les solucions, que resulten invariants respecte de les translacions en  $t$ .



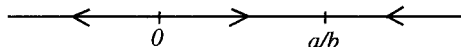
Per aquesta raó podem considerar només les solucions amb el seu valor  $x_0$  donat per a  $t = 0$ . Si volem aquella solució  $y$  que satisfà  $y(t_0) = x_0$ , només cal prendre  $y(t) = x(t - t_0)$ .

La situació general pel que fa al comportament de la nostra equació diferencial és la següent:

Als punts  $x^*$  on  $f(x^*) = 0$  corresponen solucions constants  $x(t) = x^*$ . Aquestes acostumen a anomenar-se *solucions d'equilibri* o *punts d'equilibri*.

Per a  $x_0$  a un entorn de  $x^*$  les solucions amb  $x(t_0) = x_0$  poden tendir a  $x^*$ , atenyent-lo amb  $t$  finit si  $\int_{x^*}^{x_0} (1/f(\xi)) d\xi$  convergeix, i fent-ho asimptòticament si tendeix a més o menys infinit.

El comportament de les solucions es pot, doncs, indicar qualitativament mitjançant un diagrama on s'indiquen els punts d'equilibri, a més de si les solucions són creixents o decreixents en els intervals limitats per aquests punts d'equilibri. Així, per exemple, el diagrama corresponent a les solucions de l'equació logística, que ja hem il·lustrat més amunt, és



Per a determinar les propietats qualitatives de les solucions no cal, doncs, conèixer l'expressió analítica de  $f$ , sinó tan sols els punts on és positiva o negativa, que ens diu on les solucions creixen o decreixen, i si  $\int 1/f$  és o no finita en algun entorn de l'equilibri.

Si  $f$  és de classe  $C^1$  llavors hi ha unicitat de solució a tots els punts, ja que certament  $\int 1/f$  divergirà als punts on  $f$  s'anulli.

Per exemple podem considerar  $x' = \phi(x)x$ , essent  $\phi$  una funció definida per a tota  $x \in \mathbb{R}$ , amb derivada contínua negativa i amb  $\phi(x^*) = 0$ ,  $x^* > 0$ . Llavors l'aspecte de les gràfiques de les solucions i el diagrama són els mateixos que hem dibuixat abans per a l'equació logística, fent  $x^* = a/b$ .

En el nostre context actual, quan diem que una propietat és *qualitativa*, volem dir que només prenem en compte el nombre i la disposició dels punts d'equilibri i el creixement o el decreixement de les funcions als intervals determinats per aquests punts, com també les propietats de convergència asimptòtica o en  $t$  finit.

## 9.9 L'equació de primer ordre de variables separables

A les equacions considerades fins ara, de la forma  $x'(t) = f(x(t))$ , la derivada de  $x$  depèn del valor de  $x$  mateixa per al mateix valor de  $t$ . Quan aquest és el cas, diem que l'equació és autònoma. Considerem ara el cas en què la  $f$  ve multiplicada per una funció  $a$  de  $t$ :

$$x'(t) = a(t)f(x(t)).$$

Per a trobar les solucions d'aquesta equació seguim un procés anàleg al cas autònom: notem que, almenys formalment, podem escriure

$$\frac{dx}{dt} = a(t)f(x),$$

i d'aquí

$$\frac{dx}{f(x)} = a(t) dt.$$

Integrant, ens queda

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)} = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau, \quad \text{o, més curt,} \quad \int_{x_0}^x \frac{1}{f} = \int_{t_0}^t a.$$

Aquesta igualtat ens defineix implícitament  $x$  en funció de  $t$ . Aquesta funció  $x$  és solució de l'equació, segons es pot comprovar derivant, i a més compleix  $x(t_0) = x_0$ , ja que les dues integrals s'anul·len per aquests valors  $t_0$  i  $x_0$  de  $t$  i de  $x$ .

Observem que si  $f(x^*) = 0$  per a algun punt  $x^*$  llavors  $x(t) = x^*$  és una solució constant. Tal com passava en el cas autònom les solucions  $x(t) = x^*$

s'atenyen en un temps finit a partir de  $x(t_0) = x_0$  si  $\left| \int_{x_0}^{x^*} 1/f \right| < \infty$ , mentre que hi són asimptòtiques en cas contrari. Els punts  $t^*$  on  $a(t^*) = 0$  corresponen a derivades nulles de  $x$ , i això ens indica que les solucions tenen màxims, mínims, punts d'inflexió o punts de derivada nul·la més complicats per a aquest valor de  $t$ .

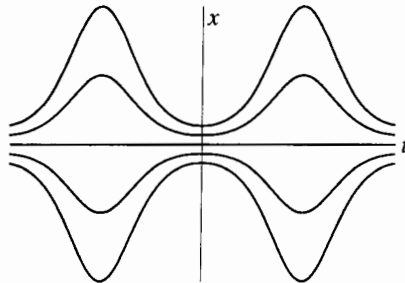
La diferència fonamental amb el cas autònom rau en el fet que les gràfiques de les solucions amb el mateix valor inicial  $x_0$  per a diferents valors de  $t_0$ , ja no són ara els traslladats l'una de l'altra, és a dir, ja no és cert en general que per a tota  $t_0$  tinguem  $y(t) = x(t + t_0)$  si  $y$  és una solució amb  $y(0) = x_0$  i  $x$  ho és amb  $x(t_0) = x_0$ . El retrat o diagrama que havíem fet per a les equacions autònomes ja no és vàlid, si més no perquè les solucions ja no són necessàriament monòtones i poden tenir màxims i mínims.

Considerem per exemple  $x' = a(t)x$  (no escrivim  $x(t)$ , sinó  $x$ , per tal d'agilitar la notació). Seguint el procés anterior obtenim

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a}.$$

Segons quina sigui la funció  $a$ , tenim un o altre comportament de  $x$ . Com que  $\left| \int_0^x \frac{dx}{x} \right| = \infty$ , tenim que cap solució que per a  $t = t_0$  valgui  $x_0$  diferent de 0, s'anulla per a una  $t$  finita.

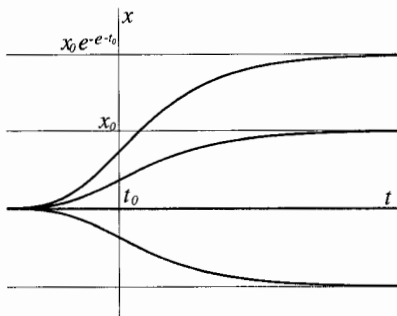
Per a  $a(t) = \sin t$  tenim solucions periòdiques.



Per a  $a(t) = e^{-t}$  obtenim

$$x(t) = x_0 e^{e^{-t_0}} e^{-e^{-t}}.$$

Observem que quan  $t \rightarrow -\infty$ ,  $x(t)$  tendeix a 0, mentre que tendeix a  $x_0 e^{e^{-t_0}}$  quan  $t \rightarrow \infty$ :



Podem trobar comportaments molt variats prenent diverses funcions  $a$ . Ens podem preguntar per aquests comportaments als valors de  $t$  en què  $a$  tendeixi a  $\infty$ , tant en el cas que  $\int a$  sigui finita com infinita en un interval que tingui per extrem aquest valor de  $t$  (exercici).

## 9.10 Equació lineal de primer ordre

Considerem ara una equació de primer ordre que no és de variables separables:

$$x' = a(t)x + b(t),$$

on se sobreentén que  $x$  és funció de  $t$  i  $a, b$  són funcions contínues.

Observem que si  $x^*(t)$  és una solució que s'anulla per a  $t = t_0$ , i  $y(t)$  és la solució de l'equació  $y' = a(t)y$  (dita *homogènia*) tal que  $y(t_0) = x_0$ , llavors  $x = y + x^*$  és una solució de l'equació original (dita *no homogènia*) que compleix  $x(t_0) = x_0$ . Efectivament, només hem de derivar per veure que

$$\begin{aligned} x' = y' + x^{*'} &= a(t)y + a(t)x^* + b(t) \\ &= a(t)x + b(t). \end{aligned}$$

Per a trobar, doncs, una solució de  $x' = ax + b$  que compleixi  $x(t_0) = x_0$ , només cal trobar  $x^*$  solució amb  $x^*(t_0) = 0$  i sumar-la a la solució amb  $y(t_0) = x_0$  de l'equació  $y' = ay$ .

Aquesta solució particular de  $x' = ax + b$  la trobem suposant que és de la forma  $x^*(t) = c(t)e^{\int_{t_0}^t a}$ , és a dir, com una solució de l'equació homogènia, però amb coeficient variable (per això aquest mètode és anomenat de *variació de constants* o de *variació de paràmetres*).

Si substituïm a l'equació  $x^{*'} = a(t)x^* + b(t)$ , obtenim

$$c'(t)e^{\int_{t_0}^t a} + c(t)a(t)e^{\int_{t_0}^t a} = a(t)c(t)e^{\int_{t_0}^t a} + b(t),$$

amb la qual cosa queda  $c = \int_{t_0}^t b e^{-\int_{t_0}^s a} ds$ , si escollim que  $c(t_0) = 0$ .

Per tant  $x^*(t) = e^{\int_{t_0}^t a} \int_{t_0}^t b(s) e^{-\int_{t_0}^s a} ds$ , i una solució de l'equació original que valgui  $x_0$  per a  $t = t_0$  ve donada per l'expressió  $x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a} + x^*(t)$ .

En particular, si  $a$  és constant ens queda

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{a(t-s)} b(s) ds,$$

que és coneguda com la *fórmula de variació de paràmetres*.

Amb aquest mètode podem resoldre el problema de trobar el nivell d'un dipòsit de líquid cilíndric, del qual surt líquid amb un cabal proporcional al nivell i n'entra d'acord amb una funció del temps. L'equació que modela la situació és

$$x' = -kx + b(t),$$

on  $x$  representa la diferència de nivell del líquid al dipòsit respecte de la sortida. El terme  $kx$  és  $A$  vegades el cabal de líquid que surt, on  $A$  és l'àrea de la base del dipòsit, que considerem d'eix vertical, i per tant  $-kx$  és la taxa de canvi instantània del nivell degut a la pèrdua. El terme  $b(t)$  representa  $A$  vegades el cabal d'aigua que entra, i ens dóna la taxa instantània de canvi del nivell degut a aquesta aportació.

Si fem, per exemple,  $b(t) = 1 + \sin \omega t$ , obtenim

$$x' = -kx + 1 + \sin \omega t.$$

Una solució amb  $x(0) = x_0$  ve donada per

$$x(t) = x_0 e^{-kt} + e^{-kt} \int_0^t e^{ks} (1 + \sin \omega s) ds.$$

Integrant per parts obtenim que

$$\int_0^t e^{ks} \sin \omega s ds = \frac{\omega}{\omega^2 + k^2} \left( 1 + e^{kt} \left( \frac{k}{\omega} \sin \omega t - \cos \omega t \right) \right).$$

Per tant la solució queda

$$x(t) = x_0 e^{-kt} + \left( \frac{\omega}{\omega^2 + k^2} - \frac{1}{k} \right) e^{-kt} + \frac{1}{k} + \frac{\omega}{\omega^2 + k^2} \left( \frac{k}{\omega} \sin \omega t - \cos \omega t \right).$$

## 9.11 Unicitat de les solucions de l'equació lineal

Fins ara hem mostrat solucions de les equacions, i, de fet, hem donat almenys una solució complint cada condició inicial  $x(t_0) = x_0$ . En el cas de l'equació  $x' = -k\sqrt{|x|}$ , per exemple, ja hem vist que no hi ha una solució única amb  $x(t_0) = 0$ , ni tan sols localment (és a dir a cap entorn de  $t_0$ ). En

canvi resulta que si l'equació és lineal, ja sigui homogènia, és a dir de la forma  $x' = a(t)x$ , com no homogènia:  $x' = a(t)x + b(t)$ , llavors la solució amb una condició inicial determinada, és única.

Efectivament, suposem que tenim dues solucions  $x$  i  $y$  de  $x' = a(t)x + b(t)$ , amb  $x(t_0) = y(t_0) = x_0$ . Si prenem la diferència de les dues solucions, resulta que  $z = x - y$  satisfà l'equació  $z' = a(t)z$ , amb  $z(t_0) = 0$ .

Tal com hem vist a la secció 9 cap solució d'aquesta darrera equació que tingui un valor inicial  $z_0 \neq 0$  ateny el valor 0 en un temps finit. És a dir,  $z(t) = 0$  és l'única solució que s'anulla per a  $t = t_0$ .

Aquesta demostració de la unicitat es generalitza al cas de l'equació  $x' = a(t)f(x)$  quan  $f$  té derivada contínua (i  $a$  és contínua). Efectivament, llavors quan  $f(x^*) = 0$ , no podem atènyer  $x^*$  des d'un punt diferent de  $x^*$ , per a cap temps finit, ja que  $\int_{x^*}^x \frac{1}{f}$  divergeix. Hi ha, però, dificultats respecte de les solucions no constants.

Per tal de resoldre tots aquests problemes, veurem a la secció 13 un teorema que ens garantirà l'existència i la unicitat de solució en algun entorn de  $t_0$  per al problema de valor inicial  $x(t_0) = x_0$ , imponent, és clar, alguna condició sobre  $a$  i sobre  $f$ . De fet, per a l'equació tot just tractada, demanarem que

$$|a(t)| |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

per a  $x$  i  $y$  a qualsevol interval finit, per a  $t$  en un entorn de  $t_0$  i per a alguna constant  $L > 0$ .

## 9.12 Existència de solucions d'equacions de primer ordre

Considerarem l'equació diferencial de primer ordre

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

Una solució és una funció  $x$  definida en un interval i que satisfaci l'equació anterior per a tots els valors de  $t$  a aquest interval. El *problema de valor inicial* consisteix a trobar-ne una, de solució, que a més satisfaci  $x(t_0) = x_0$ , on  $t_0$  i  $x_0$  són donats d'antuvi.

En aquesta secció demostrarem la versió més senzilla de l'anomenat *teorema d'existència i unicitat* per a les solucions del problema de valor inicial per a l'equació diferencial anterior.

Aquest teorema ens proveeix amb una nova eina per a definir funcions útils per al càlcul. Per exemple la solució de l'equació de Riccati (vegeu l'apèndix 5 d'aquest capítol), que pren un determinat valor per a  $t$  donada, en ser única, ens defineix una funció que en aquest cas particular no és expressable en termes de les funcions elementals, i a la qual podem donar un nou nom. En particular les solucions de l'equació de Riccati es poden donar en termes de les anomenades funcions de Bessel, que són solucions d'una altra equació diferencial.



Recordem que fins ara els mètodes que teníem per a definir funcions són les equacions algebraïques, el teorema fonamental del càlcul (integrals indefinides), les successions i sèries de funcions i, és clar, l'atribució directa de valors.

Amb més precisió, suposem que  $f$  és una funció contínua definida en un obert de  $\mathbb{R}^2$  (per exemple del tipus  $I_t \times I_x$ , en què  $I_t$  i  $I_x$  són intervals acotats o no de  $\mathbb{R}$ ) que compleix el que s'anomena una *condició de Lipschitz* respecte de  $x$ , és a dir, que

$$f : I_t \times I_x \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \longmapsto f(t, x)$$

compleix

$$|f(t, x) - f(t, y)| < L|x - y|,$$

per a alguna  $L > 0$ , que depèn en general de  $I_t$  i de  $I_x$ , i per a  $x$  i  $y$  a  $I_x$ .

Observem que si  $f$  és contínua en  $(t, x)$  i admet derivada parcial respecte de  $x$  contínua en  $(t, x)$ , llavors compleix una condició de Lipschitz, perquè tenim, utilitzant el teorema del valor mitjà:

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi) \right| |x - y| \\ &\leq \sup_{t \in I_t, \xi \in I_x} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi) \right| |x - y|, \end{aligned}$$

i si  $I_t$  i  $I_x$  són acotats, aquest suprem existeix i val, diguem,  $L$  de manera que tenim la condició de Lipschitz desitjada.

Sota aquests supòsits resulta que donats  $t_0 \in I_t$  i  $x_0 \in I_x$ , existeix una solució de l'equació diferencial

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

definida en un interval  $I$  contingut a  $I_x$ , i que compleix  $x(t_0) = x_0$ .

A més, aquesta resulta ser l'única solució definida a l'interval  $I$  que compleix  $x(t_0) = x_0$ . (Observem que tota solució ha de ser contínua, ja que si compleix l'equació, és que és diferenciable a l'interval  $I$ ).

Demostrarem primer la part d'existència de la solució, i deixarem per a la secció següent la seva unicitat.

Per a trobar l'interval  $I$  i la solució corresponent, el que fem és trobar una successió de funcions que hi tendiran uniformement.

Observem que  $x(t)$  és una solució complint  $x(t_0) = x_0$  si i solament si compleix

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Efectivament, si  $x(t)$  compleix aquesta igualtat, llavors  $x(t_0) = x_0$ , i si derivem obtenim que  $x'(t) = f(t, x(t))$ . Per altra banda, si  $x$  compleix l'equació diferencial, obtenim –integrant i imposant la condició inicial– l'equació integral anterior.

Per a obtenir les funcions que tendiran uniformement a la solució, emprem l'esquema de Picard, que consisteix a prendre com a primera aproximació a la solució cercada la funció constant  $x_0(t) = x_0$  per a tota  $t$ , i després definir

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds.$$

El que veurem és que si  $t$  és en un interval prou petit centrat a  $t_0$ , aquestes funcions convergeixen uniformement, i per tant ho han de fer a una funció que és solució. Això darrer es desprèn del fet que les integrals d'una successió de funcions uniformement convergents, tendeixen a la integral de la funció límit. Per tant, quan  $k$  tendeix a  $\infty$  en l'expressió anterior, tenim que  $x_{k+1}$  tendeix a  $x$ , diguem, i la integral tendeix a  $\int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ . Per tant,  $x$  compleix l'equació integral que és condició necessària i suficient per a ser solució amb  $x(t_0) = x_0$ .

Per a trobar l'interval centrat a  $t_0$  on aquest procés funcionarà bé comencem per considerar un rectangle  $R$  contingut a  $I_t \times I_x$  i centrat al punt  $(t_0, x_0)$ , més precisament, prenem

$$R = \{(t, x) \mid t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, x_0 - b \leq x \leq x_0 + b\},$$

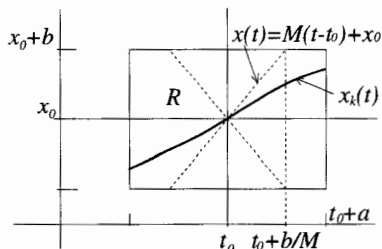
on  $a$  i  $b$  són nombres reals positius. Essent  $f$  contínua, és acotada a  $R$ . Sigui  $M = \sup_{(t,x) \in R} \{|f(t, x)|\}$ . Prenem ara  $T = \min\{a, b/M\}$ . Resulta que  $|x_k(t) - x_0| \leq M|t - t_0|$ , per a  $k = 0, 1, 2, \dots$  per a  $|t - t_0| \leq T$ .

Això ho provem per inducció: per a  $k = 0$  és òbviament cert, i si ho suposem cert per a  $k$ , llavors tenim

$$|x_{k+1}(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds \right| \leq M|t - t_0|$$

per a  $t_0 - T \leq t \leq t_0 + T$ .

La condició sobre  $t$  ve imposada perquè els valors de  $x_k(s)$  no han de sortir de l'interval  $[x_0 - b, x_0 + b]$  a l'interval d'integració per tal que valgui la cota  $M$  de  $f$ : si  $b/M$  és més gran que  $a$ , això es compleix per a tot l'interval  $[t_0 - a, t_0 + a]$ , però si és més petit, podria ser que la gràfica de  $x_k$  sortís de  $R$ .



Vegeu la figura, on hem mostrat que la condició  $|x_k(t) - x_0| \leq M|t - t_0|$  confina la gràfica de  $x_k$  dins de l'angle format per  $x_0 + M(t - t_0)$  i  $x_0 - M(t - t_0)$ ,

i si  $\frac{b}{M} < a$ , això només força a la gràfica de  $x_k$  a romandre dins  $R$  per a  $t \in [t_0 - \frac{b}{m}, t_0 + \frac{b}{m}]$ .

Ara utilitzarem la prova  $M$  de Weierstrass (capítol 6) per veure que les funcions  $x_k$  convergeixen uniformement a l'interval  $I = [t_0 - T, t_0 + T]$ .

Primer provem per inducció que

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq \frac{ML^{k-1}}{k!} |t - t_0|^k.$$

Això es compleix per a  $k = 1$ , segons acabem de demostrar (recordem que  $0! = 1$  i  $L^0 = 1$ ).

Ara, suposant-ho cert per a  $k - 1$ , tenim

$$\begin{aligned} |x_k(t) - x_{k-1}(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x_{k-1}(s)) - f(s, x_{k-2}(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t \frac{ML^{k-2}}{(k-1)!} |s - t_0|^{k-1} ds = \frac{ML^{k-1}}{k!} |t - t_0|^k, \end{aligned}$$

amb la qual cosa queda provada la veritat de l'afirmació. Ara tenim que la sèrie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ML^{k-1}}{k!} |t - t_0|^k$$

convergeix per a tota  $t \in I$ , ja que  $|t - t_0| < T$ , i per tant és majorada (és a dir, cada terme és superat pel terme corresponent) per

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ML^{k-1}}{k!} T^k,$$

que resulta majorada per  $\frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(LT)^k}{k!}$ , que tendeix a  $\frac{M}{L}(e^{LT} - 1)$ .

La prova  $M$  de Weierstrass ens diu ara que  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k(t) - x_{k-1}(t)|$  convergeix uniformement a l'interval  $I$ , cosa que implica que  $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k(t) - x_{k-1}(t))$  també ho fa.

Observem, però, que per a qualsevol  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x_n(t) = x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + \dots + (x_n(t) - x_{n-1}(t)),$$

és a dir

$$x_n(t) = x_0 + \sum_{k=1}^n (x_k(t) - x_{k-1}(t)).$$

Acabem de veure que aquesta successió convergeix uniformement a una funció, diguem-ne  $x$ , que tal com hem provat abans ha de ser una solució ja que compleix l'equació integral.

Com que al rectangle podem definir  $R$  amb  $a$  i  $b$  tan grans com vulguem si  $f$  està definida a tot  $\mathbb{R}^2$ , resultarà que les solucions es podran definir per a tot interval  $I$  que contingui  $t_0$  (és a dir, per a tota  $t \in \mathbb{R}$ ), si  $f$  està acotada a  $\mathbb{R}^2$ , (per  $\mu$ , diguem). I també si  $f(t, x) = O(|x|)$  quan  $|x| \rightarrow \infty$  uniformement en  $t$ .

Si aquest no és el cas, ja hem vist a exemples anteriors que la solució no ha d'estar definida a tot l'interval  $[-\infty, \infty]$  encara que  $f$  estigui definida per a tota  $t$  i tota  $x$ . Per exemple les solucions de  $x' = x^2$  "s'escapen a l'∞" en temps finit: tenim  $x(t) = x_0/(1 - x_0(t - t_0))$ , i per tant  $T$  no pot ser més gran que  $1/x_0$ .

### 9.13 Unicitat de la solució

Ens hem trobat a la secció 5 amb equacions diferencials que no tenen solució única, ni localment, per a certs valors de  $x_0$ . Les solucions que no s'anul·len fora de  $t = t_0$  de  $x' = -\sqrt{x}$ , compleixen  $2(\sqrt{|x|} - \sqrt{|x_0|}) = -t + t_0$ . Si  $x_0 = 0$ , podem escollir una infinitat de solucions, que resulten de combinar les tres possibilitats que es presenten a cada valor de  $t$ . De fet, per a cada elecció de  $t_1$  i  $t_2$  tals que  $-\infty \leq t_1 \leq t_0 \leq t_2 \leq \infty$  es té una solució de la forma

$$x(t) = \begin{cases} (-t + t_1)^2/4, & \text{si } t < t_1, \\ 0, & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2, \\ -(-t + t_2)^2/4, & \text{si } t > t_2 \end{cases}$$

(amb desigualtats estrictes, naturalment, si  $t_1$  o  $t_2$  són infinits).

Notem, però, que  $\sqrt{|x|}$  no compleix una condició de Lipschitz a cap entorn de zero, és a dir no compleix les hipòtesis del teorema de la secció anterior.

Veurem ara que en les condicions del teorema la solució  $x(t)$  complint  $x_0(t_0) = x_0$  és necessàriament única a l'interval  $I$  de la secció anterior.

Si hi hagués dues solucions complint les mateixes condicions inicials, diguem  $x$  i  $y$ , llavors tindriem

$$\begin{aligned} w(t) := |x(t) - y(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds = L \int_{t_0}^t w. \end{aligned}$$

En aquestes condicions,  $w(t)$  ha de ser idènticament nul·la (observem que  $w(t) \geq 0 \quad \forall t$ ).

Efectivament, fem  $U(t) = \int_{t_0}^t w$ .

Derivant obtenim

$$U'(t) = w(t) \leq L \int_{t_0}^t w = LU(t).$$

Si multipliquem per  $e^{-L(t-t_0)}$  que és  $> 0$ , les dues bandes, resulta

$$-Le^{-L(t-t_0)}U(t) + e^{-L(t-t_0)}U'(t) \leq 0.$$

Observem, però, que la banda de l'esquerra és precisament

$$\frac{d}{dt}(e^{-L(t-t_0)}U(t)),$$

que, essent  $\leq 0$ , implica

$$e^{-L(t-t_0)}U(t) \leq U(t_0) = 0$$

per a  $t > t_0$ .

Com que  $U(t)$  no pot ser negativa i  $e^{-L(t-t_0)}$  és positiva, resulta que  $U(t)$  ha de ser 0 per a tota  $t > 0$  (on estiguin definides les solucions).

Multiplicant per  $e^{L(t-t_0)}$  obtenim que també s'ha d'anular  $U(t)$  per a  $t < 0$ .

I ara, tenim les següents relacions:

$$0 \leq w(t) \leq L \int_{t_0}^t w = LU(t) = 0,$$

d'on se segueix que  $w(t) = 0$ , és a dir, que  $x(t) = y(t)$ , tal com volíem provar.

## 9.14 El mètode d'Euler per aproximar la solució d'una equació diferencial

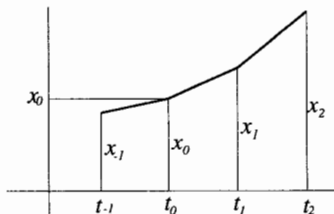
Ja hem esmentat a la secció 12 que hi ha equacions ben senzilles, com  $x' = t - x^2$ , per a les quals no podem expressar les seves solucions en termes de les funcions elementals, i ni tan sols mitjançant quadratures, és a dir, integrals indefinides.

Com ens ho fem en aquests casos per avaluar la solució, que sabem que existeix, per a diferents valors de  $t$ ?

No ens queda altre remei que utilitzar procediments numèrics, d'entre els quals el *mètode d'Euler* és el més simple. Tot i que no és el més convenient d'utilitzar si volem força precisió sense un treball excessiu, sí que és molt senzill d'utilitzar, i creiem que entendre'l ajuda a copsar el significat de l'equació diferencial.

Consisteix a dividir l'interval de temps en què volem conèixer la solució en subintervalls iguals de longitud petita, i en cada un d'ells considerar la gràfica de la solució aproximada com un segment de recta de pendent igual al valor de  $f$  a l'extrem esquerre del subinterval. Això es fa de manera que es compleixi la condició inicial  $x(t_0) = x_0$  i que la funció resultant sigui contínua.

Amb més precisió, prenem números  $t_k = t_0 + kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , i  $h$  un real positiu. Prenem ara  $x_0 = x(t_0)$ , i inductivament fem  $x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k)$ . Si unim amb segments de recta els punts successius  $(t_k, x_k)$ ,  $(t_{k+1}, x_{k+1})$  del pla, obtenim la gràfica d'una funció que aproxima la solució

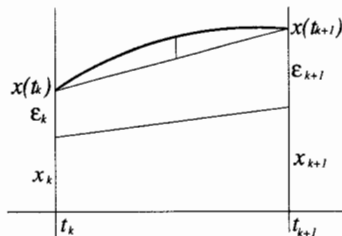


De fet demostrarem que a l'interval  $I$ , on hem establert l'existència i la unicitat de la solució a les seccions anteriors, la funció aproximant tendeix uniformement a la solució de l'equació quan  $h$  tendeix a 0.

Amb més precisió, veurem que si  $f$  és de classe  $C^1$  i al rectangle  $R$  d'abans es compleix  $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq L$  i  $\left| \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} \right| < N$ , llavors la diferència entre els valors de la solució  $x$  i de la seva aproximació  $x_k$  al punt  $t_k$  i  $x_k$ , que anomenarem error, i que denotarem per  $e_k$ , està acotada per la següent expressió:

$$e_k := |x(t_k) - x_k| \leq \frac{Nh}{2L}(e^{khL} - 1).$$

Certament això tendeix a 0 per a  $k$  fixada quan  $h$  tendeix a 0, i d'aquí es dedueix la convergència uniforme de la funció lineal a trossos aproximant a la solució. Als punts  $t_k$ , per a  $-n \leq k \leq n$ , amb  $n$  fixada, és clar, i per als punts intermedis només cal veure que  $x(t) = x(t_k) + x'(t_k)(t - t_k) + O(|t - t_k|)$ , i per tant  $|x(t) - (x(t_k) + x'(t_k)(t - t_k))| = O(|t - t_k|)$ , i per tant tendeix a 0 per a tota  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  quan  $h \rightarrow 0$ .



Per a demostrar la fórmula que dona l'acotació per a  $e_k$  necessitem treballar una mica.

Abans de tot apliquem la fórmula de Taylor a una solució de  $x' = f(t, x)$ . Resulta

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + hf(t_k, x(t_k)) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} \right) (\tau_k, x(\tau_k)),$$

on  $\tau_k \in (t_k, t_{k+1})$ , i la darrera expressió significa el valor que pren la funció entre parèntesis al punt  $(\tau_k, x(\tau_k))$ .

Això ho hem obtingut aplicant la regla de la cadena a  $x'' = \frac{d}{dt}f(t, x(t))$  i substituint a la fórmula de Taylor.

Per altra banda tenim que  $x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k)$ , de manera que restant les dues igualtats s'obté

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) - x_{k+1} &= x(t_k) - x_k + h(f(t_k, x(t_k)) - f(t_k, x_k)) \\ &+ \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} \right) (\tau_k, x(\tau_k)). \end{aligned}$$

Utilitzant el teorema del valor mitjà per a  $f$ , queda

$$f(t_k, x(t_k)) - f(t_k, x_k) = \frac{\partial f(t_k, \xi_k)}{\partial x} (x(t_k) - x_k),$$

on  $\xi_k \in (x(t_k), x_k)$ .

Substituint això a l'expressió anterior obtenim

$$\begin{aligned} |x(t_{k+1}) - x_{k+1}| &\leq |x(t_k) - x_k| + h \left| \frac{\partial f(t_k, \xi_k)}{\partial x} \right| |x(t_k) - x_k| \\ &+ \frac{h^2}{2} \left| \left( \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} \right) (\tau_k, x(\tau_k)) \right|. \end{aligned}$$

I, per tant, tenint en compte les cotes estipulades al principi per a la funció  $f$  i les seves derivades al rectangle  $R$ :

$$|x(t_{k+1}) - x_{k+1}| \leq |x(t_k) - x_k| + hL|x(t_k) - x_k| + \frac{Nh^2}{2}.$$

Si prenem, com abans,

$$e_k = |x(t_k) - x_k|, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

hem obtingut que

$$e_{k+1} \leq (1 + hL)e_k + \frac{Nh^2}{2}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

A més, hem pres  $x_0 = x(t_0)$ , i per tant  $e_0 = 0$ .

D'aquí deduem la cota donada per a  $e_k$ , utilitzant un resultat sobre *inequacions en diferències*, que demostrem a l'apèndix, i que ens diu que si

$$\begin{aligned} e_{k+1} &\leq ae_k + b, \quad \text{i } e_0 = 0, \quad \text{llavors} \\ e_k &\leq \frac{b}{a-1}(a^k - 1). \end{aligned}$$

En el nostre cas  $a = 1 + hL$  i  $b = Nh^2/2$ , i així obtenim el que cercàvem:

$$e_k \leq \frac{Nh}{2L}((e^{hL})^k - 1), \quad \text{ja que } 1 + hL < e^{hL}.$$

I d'aquí tenim, doncs, que la solució aproximant obtinguda pel mètode d'Euler tendeix uniformement a la solució de l'equació a l'interval  $I$  quan  $h \rightarrow 0$ .

## 9.15 Mètodes numèrics per a aproximar solucions d'equacions diferencials

El mètode d'Euler per a trobar aproximacions a les solucions d'una equació diferencial no és el més eficaç, en el sentit que necessitem més feina per fer l'error més petit que l'acceptable que si fem servir d'altres procediments.

A tots ells, però, com al mètode d'Euler, es tracta de donar els valors aproximats de les solucions a punts  $t_k$ , amb  $t_{k+1} = t_k + h_k$ , on generalment  $h_k$  és constant, igual a  $h$ , diguem, de manera que els punts  $t_k$  resulten homogèniament espaiats.

El mètode d'Euler és un cas especial del *mètode de la sèrie de Taylor*, si ens quedem només amb el terme d'ordre 1. Aquest altre mètode consisteix a suposar la solució desenvolupada en sèrie de Taylor:

$$x(t_k) = x(t_{k-1}) + hx'(t_{k-1}) + \frac{h^2}{2}x''(t_{k-1}) + \dots$$

Coneixem la primera derivada:  $x'(t_{k-1}) = f(t_{k-1}, x(t_{k-1}))$ , i derivant podem calcular les altres derivades

$$x''(t_0) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}x' = f_t + f_x f,$$

tot avaluat a  $(t_{k-1}, x_{k-1})$

$$x'''(t_0) = f_{tt} + f^2 f_{xx} + 2f f_{tx} + (f_t + f f_x) f_x$$

etc., on hem abreujat  $\frac{\partial f}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ , etc. per  $f_t$ ,  $f_x$ ,  $f_{xx}$ , etc.

És clar que aquest mètode és molt oneros quan l'ordre és gran, a causa de la necessitat de calcular tantes derivades.

Amb aquest mètode donem el valor aproximat de la solució  $x_k$  al punt  $t_k$  coneguda  $x_{k-1}$  al punt  $t_{k-1}$ . Començant amb  $k = 1$ , obtenim una aproximació de la solució que val  $x_0$  a  $t_0$ .

D'utilització més pràctica són els *mètodes de Runge-Kutta*, que reben el nom de dos matemàtics que el van implementar fa prop de 100 anys.

El mètode, per exemple el d'ordre 2, consisteix a donar:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t_0) \\ x_k &= x_{k-1} + h(a_1 g_1 + a_2 g_2), \quad \text{on} \\ g_1 &= f(t_{k-1}, x_{k-1}) \\ g_2 &= f(t_{k-1} + \alpha h, x_{k-1} + \beta h g_1), \end{aligned}$$

i els paràmetres  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\alpha$  i  $\beta$  satisfan

$$a_1 + a_2 = 1, \quad \alpha a_2 = 1/2, \quad \alpha = \beta.$$

Per exemple podem triar  $a_1 = 0$  i  $a_2 = 1$ , de manera que queden  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , o bé  $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ , que donen  $\alpha = \beta = 1$ .



La justificació del mètode anterior es troba en el desenvolupament de Taylor de  $g_2$  centrat al punt  $(t_{k-1}, x_{k-1})$ . Trobem  $a_1, a_2, \alpha$  i  $\beta$  de manera que en substituir  $g_2$  a l'equació, coincideixi amb la sèrie de Taylor per a  $x(t_k)$  centrada a  $x(t_{k-1})$  donada abans, fins als termes en  $h^2$ .

Tenim

$$g_2 = f(t_{k-1}, x_{k-1}) + \alpha h f_t(t_{k-1}, x_{k-1}) + \beta h f(t_{k-1}, x_{k-1}) f_x(t_{k-1}, x_{k-1}) + \dots$$

Substituint aquest valor a la fórmula per a  $x_k$ , del mètode, queda

$$\begin{aligned} x_k = x_{k-1} &+ h a_1 f(t_{k-1}, x_{k-1}) \\ &+ h a_2 (f(t_{k-1}, x_{k-1}) + \alpha h f_t(t_{k-1}, x_{k-1}) \\ &+ h \beta f(t_{k-1}, x_{k-1}) f_x(t_{k-1}, x_{k-1}) + \dots) \end{aligned}$$

Igualant coeficients dels termes del mateix grau amb la sèrie de Taylor deduïda directament de l'equació diferencial suposant que  $x_k$  és la solució exacta a partir de  $x_{k-1}$ ,

$$\begin{aligned} x_k = x_{k-1} &+ h f(t_{k-1}, x_{k-1}) + \frac{h^2}{2} (f_t(t_{k-1}, x_{k-1}) \\ &+ f(t_{k-1}, x_{k-1}) f_x(t_{k-1}, x_{k-1})) + \dots \end{aligned}$$

queden les condicions per  $a_1, a_2, \alpha$  i  $\beta$  esmentades:  $a_1 + a_2 = 1, \alpha = \beta, \alpha a_2 = \frac{1}{2}$ .

D'una manera semblant es pot justificar un dels mètodes de Runge-Kutta d'ordre 4, que és dels més utilitzats:

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} + h \left( \frac{1}{6} g_1 + \frac{1}{3} g_2 + \frac{1}{3} g_3 + \frac{1}{6} g_4 \right) \\ g_1 &= f(t_{k-1}, x_{k-1}) \\ g_2 &= f \left( t_{k-1} + \frac{1}{2} h, x_{k-1} + \frac{1}{2} h g_1 \right) \\ g_3 &= f \left( t_{k-1} + \frac{1}{2} h, x_{k-1} + \frac{1}{2} h g_2 \right) \\ g_4 &= f(t_{k-1} + h, x_{k-1} + h g_3). \end{aligned}$$

Hi ha mètodes fins a ordre 8 que s'utilitzen correntment a la pràctica. Aquests mètodes donen aproximacions més bones com més gran és l'ordre, però és difícil posar el punt òptim. No entrarem aquí en l'estudi de l'error comès, ni de la complexitat dels càlculs.

Hi ha modificacions del mètode que permeten no prendre  $h$  igual a tots els passos (quan les derivades de  $f$  són petites es pot prendre  $h$  gran).

Una altra manera d'encarar el problema de la integració numèrica d'equacions diferencials és fer-ho amb els mètodes de *passos múltiples*, ja siguin del tipus *explícit* o *predictor* o del tipus *implícit* o *corrector*, o bé combinant-los en un mètode *predictor-corrector*.

Aquests mètodes calculen el valor de  $x_k$  tenint coneguts més d'un valor anterior, diguem, per exemple  $x_{k-1}, \dots, x_{k-m}$  ( $m \leq k$ ).

Junt amb aquests valors suposem que tenim calculats uns valors aproximats de  $x'(t_k)$ , que denotem per  $x'_k$ .

Aquí suposem  $x_k = x_0 + kh$ , amb  $k$  constant.

Tenim que

$$x(t_k) = x(t_{k-j}) + \int_{t_{k-j}}^{t_k} x',$$

i el que farem és aproximar la integral amb una fórmula per quadratures del tipus

$$\int_{t_{k-j}}^{t_k} x' \doteq h(b_1 x'(t_{k-1}) + \dots + b_m x'(t_{k-m})).$$

Utilitzant els valors anteriors coneguts aproximadament, definim

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-j} + h(b_1 x'_{k-1} + \dots + b_m x'_{k-m}), & i \\ x'_k &= f(t_k, x_k). \end{aligned}$$

Naturalment, la fórmula d'integració ha d'utilitzar només valors de la solució aproximada ja calculats abans.

Hem de trobar  $b_1, \dots, b_m$  de manera que la fórmula d'integració sigui exacta si  $x(t)$  és un polinomi de grau  $\leq m$ .

Podem utilitzar diversos valors de  $j$ . Si prenem  $j = 1$ , tenim les *fórmules d'Adams-Bashforth* o fórmules predictorores d'Adams.

(Recordem que *Adams* va poder predir al 1846 la posició de Neptú a partir de la diferència dels seus càlculs amb l'observació d'Urà!). (També *Leverrier* ho va fer quasi simultàniament).

Es pot generalitzar, fins a prendre

$$x_k = a_1 x_{k-1} + \dots + a_m x_{k-m} + h(b_1 x'_{k-1} + \dots + b_m x'_{k-m}).$$

Per a utilitzar-la hem de tenir  $k \geq m$ . S'ha de començar calculant  $m$  valors, primer, potser mitjançant el mètode de Runge-Kutta. Es tracta de determinar les  $a$  i les  $b$  de manera que la fórmula sigui exacta si la solució és un polinomi de grau  $\leq 2m - 1$ .

Per exemple

$$x_k = -4x_{k-1} + 5x_{k-2} + h(4x'_{k-1} + 2x'_{k-2}).$$

Resulta, però, que si es pren  $h$  molt petita no tendim a la solució. Es diu que el mètode és inestable, i no es pot fer servir.

Si prenem una fórmula d'integració en què entri el valor de  $x'_k$ , tenim el mètode implícit:

$$\int_{t_{k-j}}^{t_k} x' \doteq h(b_0 x'(t_k) + \dots + b_m x'(t_{k-m})),$$

que porta a

$$x_k = x_{k-j} + h(b_0 x'_k + \dots + b_m x'_{k-m})$$

on, com abans,  $x'_k = f(t_k, x_k)$ .

Més en general podem prendre

$$x_k = a_1 x_{k-1} + \dots + a_m x_{k-m} + h(b_0 x'_k + \dots + b_m x'_{k-m}).$$

Aquí hem de calcular  $x'_k$  resolent l'equació

$$x_k = a_1 x_{k-1} + \dots + a_m x_{k-m} + h(b_0 f(t_k, x_k) + \dots + b_m f(t_{k-m}, x_{k-m}))$$

per a  $x_k$ , que es pot fer numèricament per aproximacions successives:

De fet el que hem de proposar-nos és resoldre una equació de la forma  $x = \phi(x)$ , és a dir, trobar un punt fix de  $\phi$ . Ja sabem del capítol 5 que això anirà bé si  $|\phi'(x)| < 1$  a l'interval en què estiguin els valors  $x_k$ . En el nostre cas aquesta condició queda com

$$|f_x(t_k, x)| \leq K, \quad K < \frac{1}{hb_0}$$

per a  $x$  a l'interval on ens movem.

Amb  $j = 1$  i  $a_2 = \dots = a_m = 0$ , la fórmula és coneguda amb el nom d'*Adams-Moulton* o bé *fórmula correctora d'Adams*. Resulta exacta per a polinomis de grau  $\leq m + 1$ .

També podem trobar les constants  $a$  i  $b$  de manera que la fórmula resulti exacta per a polinomis de grau  $\leq 2k$ , però no és desitjable, ja que el mètode esdevé inestable.

A la pràctica es combinen amb profit els mètodes corrector i predictor:

Amb un predictor es calcula un valor aproximat  $\xi_{k_0}$  de  $x(t_k)$ , i amb ell s'avalua  $f(t_k, \xi_{k_0})$ , que s'utilitza en un corrector fent les aproximacions successives de què hem parlat abans, obtenint-se valors  $\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, \dots$ , fins que s'estabilitzen els valors (dins del marge d'error que ens hem fixat).

A la pràctica, però, n'hi ha prou amb prendre  $\xi_{k_2}$  com a valor aproximat de  $x_k$  per tirar endavant els càlculs i repetir el procediment anterior basant-nos en aquest valor per a calcular  $x_{k+1}$ .

Els mètodes predictor i corrector d'Adams (és a dir,  $a_2 = \dots = a_m = 0$ ) són estables, mentre que si això no és així, ja dèiem abans que ens podem trobar que per als valors de  $h$  petits els mètodes "exploten", és a dir, no solament no tendeixen a la solució, sinó que l'error es fa enormement gran.

La causa d'aquesta inestabilitat es troba en el comportament mateix de les fórmules d'integració, que no són més que *equacions en diferències*. Aquestes equacions poden tenir solucions que no corresponen a les de l'equació diferencial i que tendeixen a  $\infty$  o oscil·len sense cota. Qualsevol error, d'arrodoniment per exemple, o bé de truncació en calcular una funció, ens fa que aquestes solucions, que no apareixerien si tot fos exacte, dominin sobre la solució buscada, fent

que el càlcul perdi tota validesa. Per a més detalls s'ha de consultar un llibre especialitzat en càlcul numèric d'equacions diferencials.

Els mètodes de predictor-corrector requereixen aproximadament la meitat de la feina que els mètodes de Runge-Kutta per a obtenir la mateixa aproximació. Per a començar els càlculs amb un mètode corrector necessitem, però, utilitzar abans el mètode de Runge-Kutta per a obtenir els primers  $m$  valors aproximats de la solució. Les calculadores digitals són tan eficients però, que, realment, posats a fer, ja es pot seguir fent el càlcul amb Runge-Kutta, i no cal canviar de programa.

Hi ha altres mètodes d'integració d'equacions diferencials, d'entre els quals cal destacar els que utilitzen l'extrapolació de Richardson (vegeu el capítol 7) per a obtenir bones aproximacions amb valors de  $h$  més gran. (Fins i tot el mètode d'Euler combinat amb aquesta extrapolació dona bons resultats). També s'utilitzen amb profit els mètodes multipàs amb pas variable. Finalment hem d'esmentar el cas de les equacions "rígides" ("stiff" en anglès), en què les equacions tenen solucions molt properes a la nostra que se n'aparten ràpidament, i en què, per tant, tot petit error ens porta a solucions no volgudes. En aquests casos cal utilitzar mètodes més refinats. Referim el lector a les obres de Bulirsh-Stoer i de Stoer i Gear, incloses a la bibliografia, per a obtenir més detalls.

## Exercicis i problemes

1. Demostreu que  $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2/2} \cos(xt) dt$  val  $e^{-x^2/2}$ . Com a pas intermediari podeu verificar que  $f$  satisfà l'equació diferencial  $(e^{x^2/2}f(x))' = 0$ .
2. Trobeu el temps de buidatge d'un dipòsit amb un forat circular al fons ( $v = \sqrt{2gx}$ ):
  - (a) Si és cònic amb eix vertical i el forat a la part del vèrtex, que és cap avall.
  - (b) Si és esfèric.
  - (c) Si és un paraboloid de revolució, d'eix vertical i vèrtex cap avall.
3. Trobeu les solucions de  $dy/dx = -\sqrt{1-y^2}/\sqrt{1-x^2}$  i dibuixeu-ne les gràfiques.
4. Basant-vos en el signe de  $x'$  als diferents punts  $(t, x)$ , dibuixeu les gràfiques de les solucions de

$$x' = t + \frac{t^3}{x}.$$

Intenteu trobar una expressió en termes de funcions elementals per a les solucions.

5. Substituint formalment la sèrie infinita  $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$  en lloc de  $y(x)$  a l'equació de Riccati  $y' = 1 + xy^2$ , obtingueu l'expressió en sèrie de potències de la solució amb  $y(0) = 0$ .  
Calculeu numèricament  $y(1)$  mitjançant la sèrie (si és que hi convergeix), i compareu l'eficàcia del càlcul amb la utilització dels mètodes d'Euler, Runge-Kutta 4, Adams Bashforth i Adams-Moulton.
6. Expresses les solucions de  $xy' + (x+1)y = x^2 - x^3$  en termes de funcions elementals.
7. Considereu un circuit elèctric en el qual tenim una força electromotriu, un condensador de capacitància  $C$  i una resistència  $R$  situats en sèrie en una baga tancada. L'equació diferencial que regeix el comportament de  $q$ , la càrrega al condensador, en funció del temps, és  $Rq' + q/C = e$ , i la intensitat de corrent és  $i = q'$ . Si  $e(t) = 0$  per a  $t < 0$  i  $e(t) = 1$  per a  $t \geq 0$ , doneu  $i(t)$  en funció de  $t$ , suposant que  $q(0) = 0$ .

I si  $e(t) = e_0 \sin \omega t$ , quina és  $i(t)$ ?

8. Dibuixeu les gràfiques de les solucions de

$$x' = (x^2 - 1)/2, \quad x' = x^2 \cos t,$$

indicant si estan definides per a tota  $t \in \mathbb{R}$  i a què tendeixen quan  $t \rightarrow \infty$ .

9. Tenim una habitació de volum  $V$  plena d'aire amb una concentració  $\alpha$  de  $CO_2$ , que es manté homogènia gràcies a uns ventiladors. Renovem l'aire introduint un flux  $Q$  d'aire amb una concentració  $\beta$ , més petita que  $\alpha$ , de  $CO_2$ , i al mateix temps extraiem un flux  $Q$  de l'aire de l'habitació, ja barrejat. Trobeu la concentració de  $CO_2$  a l'habitació respecte del temps.

El mateix problema es pot plantejar amb un dipòsit contenint salmorra amb una certa concentració, en què es renova la solució.

10. Tenim la família de corbes al pla donada per l'equació  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ . Trobeu les equacions de les corbes ortogonals a les d'aquesta família. Feu el mateix prenent el signe  $-$  en lloc de  $+$ .

11. L'equació de Bernoulli és

$$x' = p(t)x + g(t)x^\alpha.$$

Per a trobar les solucions es pot posar  $y = x^{1-\alpha}$ . Discutiu-ne les solucions.

12. Trobeu les solucions de l'equació logística modificada per un terme d'immigració  $k$

$$x' = ax - bx^2 + k,$$

tant si  $k$  és negatiu com positiu. A què tendeix  $x$  quan  $t \rightarrow \infty$ ?

13. Suposem que en llançar-se en paracaiguda la resistència  $r(v)$  de l'aire és proporcional a la velocitat si aquest està tancat, i proporcional al quadrat de la velocitat si està obert; diguem  $r(v) = \alpha v$  i  $r(v) = \beta v^2$ , respectivament.

De l'equació  $mdv/dt = mg - r(v)$ , deduiu-ne la velocitat  $v$  en funció del temps  $t$  si el paracaiguda s'obre al cap d'un temps  $t_0$ . I amb quina velocitat s'arribarà al terra si l'altura inicial és  $h$ .

Tant si el paracaiguda s'obre com no, es tendeix a una velocitat constant de caiguda?

14. El creixement del volum d'un tumor, segons un model, ve donat per

$$v' = ae^{-bt}v.$$

Trobeu-ne  $v$  en funció del temps si  $v(t_0) = v_0$ .

## Apèndixs

### 1. Els lemes fonamentals del càlcul de variacions

Per tal d'obtenir la fórmula d'Euler del càlcul de variacions en la secció següent, necessitarem les següents proposicions.

L'anomenat *lema fonamental del càlcul de variacions* ens diu que si  $f$  és contínua a  $[a, b]$  i si  $\int_a^b fh = 0$  per a tota funció  $h$  contínua a  $[a, b]$  amb  $h(a) = h(b) = 0$ , llavors  $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$ .

Efectivament, suposem que  $f$  fos diferent de 0 en algun punt de  $[a, b]$ , diguem positiva. A causa de la continuïtat, també seria positiva en tot un entorn d'aquest punt. Escollint ara  $h$  de manera que sigui positiva en un interval contingut en aquest entorn i nul·la fora d'ell, s'arribaria que  $\int_a^b fh > 0$ , en contradicció amb la hipòtesi.

Un altre lema ens diu que si  $f$  és contínua a  $[a, b]$  i  $\int_a^b fh' = 0$  per a tota funció  $h$  amb derivada contínua a  $[a, b]$  tal que  $h(a) = h(b) = 0$ , llavors  $f(x)$  és constant a l'interval  $[a, b]$ .

Per a demostrar-ho prenem

$$c = \int_a^b f/(b-a) \quad \text{i} \quad h(x) = \int_a^x (f-c).$$

D'aquesta manera  $h$  té derivada contínua a  $[a, b]$  i  $h(a) = h(b) = 0$ .

Resulta ara que

$$\int_a^b (f-c)^2 = \int_a^b (f-c)h' = \int_a^b fh' - c \int_a^b h' = 0,$$

ja que cada una d'aquestes darreres integrals val 0: la primera per hipòtesi, i la segona perquè  $h(a) = h(b)$ . Per tant  $f$  és constant i igual a  $c$ .

Finalment tenim el lema que ens diu que si  $f$  i  $g$  són contínues a  $[a, b]$  i si

$$\int_a^b (fh + gh') = 0,$$

per a tota  $h$  amb derivada contínua a  $[a, b]$  i amb  $h(a) = h(b) = 0$ , llavors  $g$  és derivable i  $g' = f$ .

Per veure-ho fem

$$F(x) = \int_0^x f.$$

Integrant per parts, trobem

$$\int_a^b fh = - \int_a^b Fh'.$$

Per tant, de la hipòtesi, tenim

$$\int_a^b (-F + g)h' = 0.$$

D'acord amb el lema anterior això implica que  $g - F$  és constant, i per tant, tenint en compte la definició de  $F$ , que  $g' = f$ .

## 2. El càlcul de variacions

El 1696 *Johann Bernoulli* va proposar a la comunitat matemàtica el problema de determinar la forma d'una rampa seguint la qual un cos pesant sotmès a la força de la gravetat, però no a fricció, arribaria amb el mínim temps des d'un punt fins a un altre que no estigués més amunt que ell. La forma d'aquesta rampa vindria descrita per una corba que amb el temps s'ha denominat *braquistòcrona*.

Va ser resolt per diversos matemàtics de l'època, entre ells el seu germà Jakob, que a més va posar la idea bàsica del que amb els anys es va conèixer com el *càlcul de variacions*. La idea bàsica és la següent:

Suposem que tenim una funció  $y$  que està definida en un interval  $I = [a, b]$  i que compleix certes condicions. Suposem que tenim un número que depèn d'aquesta funció d'una manera definida. Llavors es tracta de trobar quina ha de ser aquesta funció  $y$  perquè aquest número sigui mínim, o màxim.

Per exemple ens podríem proposar de trobar per a quina funció  $y$  el número  $J(y) = \int_a^b y$  és mínim. Certament, si demanem que  $y$  sigui una funció derivable i positiva amb els valors  $y(a)$ ,  $y(b)$  als extrems de  $I$  donats i positius, el problema no té solució: Podem trobar una  $y$  que faci  $J(y) > 0$  tan petit com vulguem, però cap amb  $J(y) = 0$ .

Una aplicació  $J$  que associa a cada funció d'entre les permeses el número  $J(y)$ , s'anomena un *funcional*.

La idea de *Jakob Bernoulli* va ser la següent: si  $J$  assoleix un màxim o un mínim a la funció  $y$ , llavors  $J(y + \alpha h)$  és una funció d' $\alpha$  "horitzontal" per totes les funcions  $h$  que facin  $y + \alpha h$  permesa (almenys per a  $|\alpha|$  prou petit), és a dir

$$\frac{J(y + \alpha h) - J(y)}{\alpha} \longrightarrow 0 \quad \text{quan} \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

Si això no passa, és a dir, si per a alguna  $h$ ,  $J(y + \alpha h) - J(y)$  resulta aproximadament proporcional a  $\alpha$  (és a dir, excepte per termes d'ordre superior en  $\alpha$ ) amb coeficient de proporcionalitat diferent de 0, llavors certament no estem ni a un màxim ni a un mínim, puix que per  $y + \alpha h$  amb  $\alpha$  prou petit tindriem  $J$  més petit (o més gran) que  $J(y)$ .

Més endavant, el 1744, *Leonhard Euler* va publicar el primer tractat sistemàtic del mètode per a trobar les funcions que siguin "extrems" (és a dir, que satisfacin la condició de J. Bernoulli) d'un funcional. Una mica més endavant, *Lagrange* va fer més analítics els mètodes d'Euler i va donar al càlcul de variacions la forma que ha tingut fins a l'adveniment de la nova anàlisi funcional al principi d'aquest segle XX, i que encara es troba a força textos que s'utilitzen avui.



Un problema típic del càlcul de variacions consisteix a considerar funcionals de la forma

$$J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx,$$

on els valors de  $y(a)$  i  $y(b)$  estan donats d'antuvi, és a dir, es tracta de minimitzar (o maximitzar) la integral d'una funció que depèn de  $x$ , de  $y$  i de la primera derivada de  $y$  (de fet podríem afegir-hi les derivades de  $y$  fins a qualsevol ordre finit) i que pren valors donats a  $a$  i a  $b$ .

Per a aquest funcional, tenim el següent teorema degut a Euler:

Una condició necessària perquè  $J$  tingui un extrem en una funció  $y$  és que  $y$  satisfaci l'equació

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Aquesta és la coneguda *equació d'Euler*. La prova de la validesa del teorema és la següent:

Considerem una funció  $h$ , amb derivada contínua a l'interval  $[a, b]$ , i amb  $h(a) = h(b) = 0$ . Llavors,  $y + h$  és una funció acceptable per al funcional. Tenim que

$$J(y + h) - J(y) = \int_a^b (f(x, y + h, y' + h') - f(x, y, y')) dx.$$

Desenvolupant l'integrand amb la fórmula de Taylor, tenim

$$J(y + h) - J(y) = \int_a^b (f_y(x, y, y')h + f_{y'}(x, y, y')h') dx + \dots,$$

on hem designat amb subíndexs les derivades parcials de  $f$  respecte de  $y$  i de  $y'$ , i els punts suspensius representen termes d'ordre superior en  $h$  i  $h'$ .

Observem que si el funcional  $J$  ha de tenir un màxim o un mínim a  $y$ , llavors  $\int_a^b (f_y(x, y, y')h + f_{y'}(x, y, y')h') dx$ , que s'anomena la *variació* del funcional  $J$ , ha de ser zero. D'altra manera, per a una certa  $h$ , o per la seva negativa, el funcional  $J(y + h)$  seria més gran o més petit. Com que això ha de ser cert per a qualsevol  $h$ , llavors, necessàriament, d'acord amb la secció anterior,

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0,$$

que és l'equació d'Euler.

Observem que aquest teorema ens dona una condició necessària, però no ens assegura que si es compleix tinguem un màxim o un mínim. Aquestes condicions suficients són molt més difícils de trobar, tot i que ja Johann Bernoulli, en resoldre el problema de la braquistòcrona, mostra que la solució que troba resol efectivament el problema, és a dir, s'assoleix el mínim del funcional per a la funció trobada.

Altres problemes clàssics abordats pel càlcul de variacions són aquells en què es cerca una corba a l'espai, al llarg de la qual es minimitzi o maximitzi un cert funcional, però per comptes de demanar que els extrems de la corba siguin fixats (els valors de  $y(a)$  i  $y(b)$  al cas tot just considerat), demanem que pertanyin a una determinada línia o superfície.

També són problemes clàssics del càlcul de variacions els anomenats *problemes isoperimètrics*, en els quals es demana, a més de les condicions de què hem parlat, que la corba (gràfica de la funció) que minimitza el funcional compleixi una condició més, per exemple tenir la longitud donada d'antuvi. D'aquí ve el nom "isoperimètric" d'aquest problema: el problema més antic és el de trobar la corba de longitud fixada que tanca al pla l'àrea més gran.

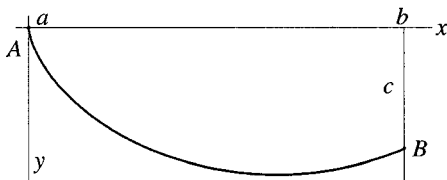
D'entre els problemes isoperimètrics destaca als inicis del càlcul de variacions el de la *catenària*: trobar la forma d'una cadena que penja amb els seus extrems a dos punts donats sota l'efecte de la gravetat. Matemàticament es tracta de trobar una funció  $y$ , amb  $y(a)$  i  $y(b)$  donades, i de longitud estipulada, que tingui el seu centre de gravetat al més baix possible. El resultat és que la cadena pren la forma de la gràfica del cosinus hiperbòlic.

Per a conèixer més sobre el càlcul de variacions clàssic, referim el lector a alguna obra més especialitzada, com pot ser el llibre de Gelfand i Fomin ressenyat a la bibliografia.

### 3. La braquistòcrona

Com a exemple paradigmàtic resoldrem el problema que va originar els estudis del càlcul de variacions, el de la *braquistòcrona*.

En aquest problema es tracta de minimitzar el temps que esmerça una partícula pesant a lliscar sense fricció al llarg d'una corba que uneix al pla dos punts  $A$  i  $B$  de coordenades  $(0, 0)$  i  $(b, c)$ ,  $c \leq 0$ , respectivament.



El temps esmerçat és

$$T(y) = \int_b^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}.$$

Per a trobar aquest temps ens hem basat en el fet que quan el mòbil està en la posició d'ordenada  $y$ , la seva velocitat és precisament  $\sqrt{2gy}$ , tal com va mostrar *Galileu* al segle XVII. Llavors el temps esmerçat a incrementar  $y$  és el quocient de l'increment corresponent de la longitud de la corba, que val

$\sqrt{1+y'^2}$  vegades l'increment de  $y$  en el límit, i de la velocitat,  $\sqrt{y}$  si prenem unitats de manera que  $2g$  valgui 1.

Hem de trobar  $y$  de manera que  $y(0) = 0$ ,  $y(b) = c$ , i que minimitzi el valor d'aquesta integral.

D'acord amb el teorema vist a la secció anterior, s'ha de complir necessàriament que

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0,$$

essent en aquest cas  $f = \sqrt{1+y'^2}/\sqrt{y}$ .

Si intentem escriure directament l'equació diferencial derivant  $f$  respecte de  $y$  i de  $y'$  i després  $f_{y'}$  respecte de  $x$ , ens trobem amb una expressió molt poc manejable.

Observem, però, que en no dependre  $f$  explícitament de  $x$ , resulta que

$$y' \left( f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) = \frac{d}{dx} (f - y' f_{y'}).$$

Efectivament, en aquest cas  $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = f_y - f_{yy'} y' - f_{y'y'} y''$ , i multiplicant per  $y'$  queda

$$f_y y' - f_{yy'} y'^2 - f_{y'y'} y' y'' = \frac{d}{dx} (f - y' f_{y'}).$$

Per tant, si es compleix l'equació d'Euler, tenim que aquesta darrera expressió val 0, és a dir que  $f - y' f_{y'}$  és constant.

Escrivint-ho explícitament per al nostre cas, queda

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{k}, \quad k \text{ constant.}$$

Simplificant, ens queda  $\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{k}$ , o sigui  $\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2} = k$ .

D'aquí obtenim finalment l'equació diferencial

$$y' = \pm \sqrt{\frac{k^2}{y} - 1}.$$

Si prenem  $y = \frac{k^2}{2}(1 - \cos \theta)$ , l'equació queda

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \theta} - 1} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

on ens hem quedat amb la branca positiva.

Com que  $\frac{dy}{d\theta} = \frac{k^2}{2} \sin \theta$ , resulta que  $\frac{dx}{d\theta} = \frac{k^2}{2}(1 - \cos \theta)$ , és a dir  $x = \frac{k^2}{2}(\theta - \sin \theta)$ , si volem que es faci 0 per a  $\theta = 0$ .

La corba donada paramètricament per aquests valors de  $x$  i de  $y$  és una cicloide (vegeu l'apèndix del capítol 4) generada per un cercle de radi  $k^2/2$ .

Si volem que  $y(b) = c$ , a més de  $y(0) = 0$ , que ja es compleix, hem de fer

$$\frac{k^2}{2}(1 - \cos \theta) = c, \quad \frac{k^2}{2}(\theta - \sin \theta) = b.$$

El valor de  $\theta$  el podem trobar de

$$c(\theta - \sin \theta) = b(1 - \cos \theta)$$

de manera única entre 0 i  $2\pi$  (exercici).

Una vegada tingut aquest valor de  $\theta$ , trobem  $k$  de qualsevol de les dues expressions que la relacionen amb  $\theta$  i  $b$  o  $c$ .

#### 4. L'equació de primera variació

Si tenim una equació diferencial  $x' = f(t, x)$  com les que hem estudiat al text, amb  $f$  diferenciable, podem saber el que passa prop d'una solució determinada mirant-nos l'anomenada *equació de primera variació* respecte d'aquesta solució.

Suposem que  $x^*$  és una solució i que, per tant, satisfà  $x^{*'} = f(t, x^*)$ . Si fem el canvi de variable  $y = x - x^*$ , els valors de  $y$  ens donen la diferència entre la solució  $x$ , que pot ser qualsevol, i la solució  $x^*$ . Per tant, el comportament d' $y$  ens diu com es comporten les solucions  $x$  respecte de la solució  $x^*$ .

Mirem quina equació diferencial ha de satisfer  $y$ :

$$y' = x' - x^{*'} = f(t, x) - f(t, x^*) = f(t, y + x^*) - f(t, x^*).$$

Si ara utilitzem el teorema de Taylor tenim

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t))y + g(t, y),$$

on  $g(t, y)$  és  $o(|y|)$  quan  $|y| \rightarrow 0$ , uniformement en  $t$  a tot interval finit si  $f$  és prou regular (per exemple derivable tant en  $t$  com en  $y$ ), és a dir, que  $|g(t, y)|/|y| \rightarrow 0$  quan  $|y| \rightarrow 0$ , uniformement en  $t$  per a  $t$  en intervals finits.

Si denotem  $f_x(t, x^*(t))$ , que certament és coneguda si coneixem  $x^*$ , per  $a(t)$ , l'equació queda  $y' = a(t)y + g(t, y)$ .

Essent  $g$  petita respecte de  $a(t)y$  quan  $y$  és petita, tenim l'esperança que el comportament de les solucions prop de 0 ens vingui determinat qualitativament pel terme lineal. L'equació lineal resultant de deixar de banda el terme d'ordre superior, és a dir, a

$$y' = a(t)y,$$

és anomenada *equació de primera variació* respecte de la solució  $x^*$ .

Observem que si  $a(t) \geq a_0 > 0$  per a tota  $t \geq t_0$ , i si  $g$  és  $O(|y|)$  quan  $|y| \rightarrow 0$ , uniformement per a tota  $t \geq t_0$ , llavors existeix  $\varepsilon > 0$  tal, que si  $|y(t)| < \varepsilon$ ,  $t \geq t_0$ , resulta que  $y'(t)$  té el mateix signe que  $y(t)$ .

Efectivament, si prenem  $\varepsilon > 0$  prou petita es compleix  $|g(t, y)| < a_0 y$  si  $|y| < \varepsilon$  per a  $t \geq t_0$ , i per tant  $y'(t) = a(t)y + g(t, y)$  té el mateix signe que  $y(t)$ . És a dir, les solucions són creixents per a  $0 < y \leq \varepsilon$ , i decreixents per a  $-\varepsilon \leq y < 0$ . A més, com que no poden tendir a un valor constant amb  $|y| < \varepsilon$  perquè en ser monòtones s'hauria de complir  $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = 0$ , resulta que per a totes les solucions amb valor inicial  $|y(t_0)| < \varepsilon$ , hi ha alguna  $t > t_0$  per a la qual  $|y(t)| > \varepsilon$ , és a dir, surten d'una faixa d'amplada  $\varepsilon$  al voltant de la solució nul·la.

Per cert, si  $g$  té el mateix signe que  $y$ , no cal la restricció que sigui  $O(|y|)$  per a obtenir aquest resultat!

Això ho fem servir a l'apèndix següent per a fer veure que l'equació de Riccati té una sola solució que separa els comportaments asimptòtics de les altres solucions quan  $t \rightarrow \infty$ .

El mateix tipus d'argument serveix per a veure que si  $a(t) \leq -a_0$ ,  $t \geq t_0$ , i  $g$  és  $O(|y|)$  quan  $|y| \rightarrow 0$ , uniformement per a  $t \geq t_0$ , llavors existeix  $\varepsilon > 0$  tal que, si  $|y(t_0)| < \varepsilon$ , tenim que  $y(t) \rightarrow 0$  quan  $t \rightarrow \infty$ .

## 5. Equacions no lineals. Una equació de Riccati

L'equació de Riccati és de la forma

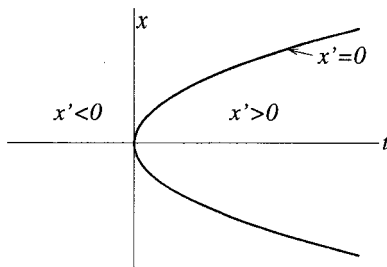
$$x' = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2.$$

Fa uns cent anys que *Sophus Lie* va demostrar que si coneixem tres solucions linealment independents d'una d'aquestes equacions, llavors per combinació lineal d'elles, les obtenim totes. El problema està en el fet que, en general, cap de les solucions no és expressable en termes de funcions elementals. Pitjor encara, no podem obtenir les solucions mitjançant quadratures, és a dir, reduint el problema a la integració d'alguna funció.

Considerarem un cas particular senzill, que mostra ja tota la problemàtica de les equacions diferencials que no podem reduir a quadratura. Per a trobar-ne les solucions no ens queden sinó els mètodes numèrics i el que anomenarem mètodes qualitatiu, que ens permetran dir a què tendeixen les solucions, si són creixents o decreixents, etc.

El cas particular que considerarem és  $x' = t - x^2$ .

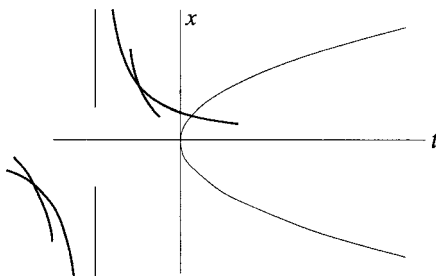
Com que no podem separar les variables ni és lineal, no sabem com integrar-lo. De fet no es pot. Sabem, però, algunes coses sobre les solucions. Per exemple sabem que  $x'(t) = 0$  si  $x^2(t) = t$ , és a dir, a la paràbola  $t = x^2$  del pla



També sabem que  $x'$  té el signe que s'indica a la figura en les dues regions del pla separades per aquesta paràbola.

Això no és suficient, però, per a determinar el comportament asimptòtic de les solucions. Per tal de fer-ho hem d'utilitzar altres mètodes, com pot ser comparar amb solucions conegudes d'altres equacions.

Per a  $t < 0$ , és clar que les solucions de  $x' = -x^2$  tenen pendent (negativa) de valor absolut més petit que les de  $x' = t - x^2$ , al mateix punt  $(t, x)$ . Ara bé, les solucions de  $x' = -x^2$  són hipèrboles amb asímptotes verticals. Això implica que les solucions



de  $x' = t - x^2$  també tendeixen a  $\infty$  quan  $t$  tendeix decreixent a un valor negatiu de  $t$  finit. O, en altres paraules, que per a una solució particular, quan  $x$  tendeix a  $\infty$ ,  $t$  tendeix a un valor finit negatiu, si hem començat amb  $x(t_0)$  per a  $t_0 \leq 0$ .

També és cert que si  $t_0$  és prou negatiu,  $x(t) \rightarrow -\infty$  quan  $t$  tendeix (creixent) a un valor finit de  $t$ .

Per a comprovar que totes les solucions, incloent-hi aquelles que només estan definides per a valors no negatius de  $t$ , tendeixen a  $\infty$  quan  $t$  tendeix decreixent a una  $t$  finita, podem comparar amb les solucions de  $x' = -x^{3/2}$ , que també tenen asímptotes verticals. Per a cada  $t > 0$  podem trobar  $x$  prou gran perquè  $-x^{3/2} > t - x^2$ , i d'això se segueix, tal com ho hem fet abans, el resultat cercat, i igualment per a  $x < 0$ .

Per altra banda les solucions que en créixer  $t$  "entren" a la paràbola (horitzontalment), ja no en poden sortir, i tendeixen totes a la branca superior de la paràbola. Existeix també una sola solució que ni entra a la paràbola ni tendeix a  $-\infty$  per a una  $t$  finita, sinó que tendeix a la branca inferior de l'esmentada paràbola, des de baix, quan  $t$  tendeix a  $\infty$ .

Per a demostrar aquestes afirmacions convé fer el canvi de variables  $z = x - \sqrt{t}$  si es vol estudiar un entorn de la branca superior de la paràbola. Resulta que  $z$  satisfà l'equació diferencial  $z' = -z(z + 2\sqrt{t}) - \frac{1}{2\sqrt{t}}$ .

Observem que per a  $z = 0$ ,  $z'$  és negativa, la qual cosa correspon a les solucions "entrant" a la paràbola per a  $t$  creixent. Resulta, però, que per a  $z$  negativa prou propera a 0,  $z'$  serà positiva per a  $t$  prou gran. Això implica que hi ha una faixa al voltant de la branca superior de la paràbola que és *positivament invariant*, és a dir, que totes les solucions que hi tenen algun punt de la gràfica, hi tenen la gràfica continguda per als valors de  $t$  més grans (és a dir, totes les que "toquen" la vora de la faixa hi entren i ja no en surten per a  $t$  creixent).

Pel que fa al comportament vora la branca negativa de la paràbola, fem el canvi de variable  $z = x + \sqrt{t}$ , de manera que resulta que  $z$  satisfà  $z' = -z(z - 2\sqrt{t}) + \frac{1}{2\sqrt{t}}$ .

Tenim ara que si  $z$  és no negativa i  $t$  és prou gran, llavors  $z' > 0$ , mentre que si  $z < 0$ ,  $z'$  és negativa per a  $t$  prou gran.

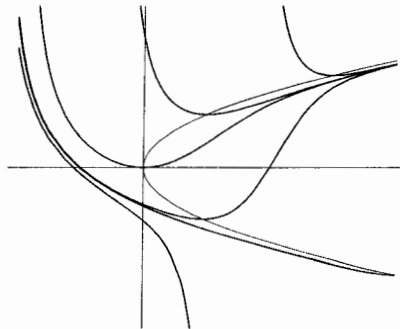
Això mostra que hi ha una faixa d'amplada  $\varepsilon$ , diguem, al voltant de la branca inferior de la paràbola d'on les solucions en "surten" per dalt i per baix a partir d'un cert valor de  $t$  quan  $t$  creix.

D'aquí deduím que hi ha almenys una solució que no surt d'aquesta faixa quan  $t$  tendeix a  $\infty$ .

Que aquesta solució és única segueix del fet que l'equació de primera variació d'una d'elles, diguem  $z^*$ , ve donada per  $y' = (-2z^* + 2\sqrt{t})y$ , i per a  $t$  prou gran el parèntesi és positiu a la faixa d'amplada  $\varepsilon$ . Això implica que totes les solucions, excepte  $z^*$  deixen la faixa per a  $t$  creixent.

Pel que fa al comportament de les solucions lluny de la paràbola, no hi ha problema, ja que  $z'$  té un signe ben definit i allunyat de 0, i això fa que les solucions vagin de la branca inferior cap a la superior o cap a  $-\infty$ , segons si es troben en una banda o l'altra de la *separatriu*  $x^*$ , que tendeix a la branca inferior quan  $t \rightarrow \infty$ .

Ajuntant tota la informació obtenim l'aspecte qualitatiu de totes les solucions il·lustrat en la figura



## 6. Una ineqüació de diferències

Suposem aquí que  $e_{k+1} \leq ae_k + b$  i que  $e_0 = 0$ , amb  $a, b > 0$ .

Si posem  $y_{k+1} = ay_k + b$ ,  $y_0 = 0$ , que és una *equació de diferències*, ens queda  $e_{k+1} \leq y_{k+1}$  per a tota  $k$  com es veu per inducció: per a  $k = 0$  és evident, ja que  $y_1 = ay_0 + b$ , i com que  $e_1 \leq ae_0 + b$ , resulta  $e_1 \leq y_1$ . Si ho suposem cert per a  $k$ , és a dir,  $e_k \leq y_k$ , tenim  $e_{k+1} \leq ae_k + b \leq ay_k + b = y_{k+1}$ .

Ara tractem amb l'equació de diferències.

Primer amb una de més senzilla:

$y_{k+1} = y_k + b_k$ , amb  $y_0$  fixada d'antuvi.

Sumant

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= b_0 \\ y_2 - y_1 &= b_1 \\ &\vdots \\ y_n - y_{n-1} &= b_{n-1}, \end{aligned}$$

obtenim  $y_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k$ , que és la seva solució.

Si ara prenem  $z_k = \frac{y_k}{a^k}$ ,  $k = 0, \dots, n$ , de  $y_{k+1} = ay_k + b$ , resulta

$$z_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{a^{k+1}} = \frac{y_k}{a^k} + \frac{b}{a^{k+1}} = z_k + \frac{b}{a^{k+1}},$$

i utilitzant el resultat anterior tenim

$$\begin{aligned} z_n &= z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b}{a^{k+1}} = y_0 + \frac{b}{a} \cdot \frac{1 - (1/a)^n}{1 - 1/a} \\ &= y_0 + \frac{b}{a-1} (1 - (1/a)^n). \end{aligned}$$

D'aquí se segueix que

$$y_n = a^n z_n = a^n y_0 + \frac{b}{a-1} (a^n - 1),$$

i, finalment

$$e_n \leq \frac{b}{a-1} (a^n - 1),$$

tal com volíem.



## Capítol 10

# Les equacions diferencials d'ordre dos i més gran

### 10.1 Introducció

L'estudi de les equacions diferencials es complica molt quan l'ordre de l'equació, és a dir, el màxim ordre de les derivades que hi apareixen, és més gran que  $u$ . Certament la majoria dels problemes interessants per a la pràctica corresponen precisament a aquests ordres més grans. Fins i tot el moviment d'una partícula sota l'acció d'una molla, o el d'un pèndol simple, ja són modelats per equacions de segon ordre. I, certament, les equacions de la mecànica celest, fins i tot en els casos més senzills, com pot ser el problema de tres cossos, pla, circular i reduït ja comporta un sistema de quatre equacions de primer ordre, equivalent en complexitat a una equació de quart ordre.

Tot i això, alguns dels resultats que hem trobat per a les equacions de primer ordre es poden traslladar, *mutatis mutandi* i sense problemes als sistemes d'equacions de primer ordre. Així passa, per exemple, amb els teoremes d'existència i unicitat de solucions, i amb els mètodes numèrics per a trobar aproximacions d'aquestes solucions.

Una mica com en el cas de les equacions de primer ordre, observem una gran diferència entre el tractament de les equacions integrables i aquelles que no ho són. Recordem les tècniques qualitatives que hem fet servir al capítol anterior per a tractar una equació de Riccati, no integrable, és a dir, que no podem reduir i trobar les solucions a una expressió on intervenen integrals de funcions elementals.

Pel que fa a les equacions lineals ja veurem que no hi ha gran diferència de tractament, si es tracta d'equacions autònomes, sigui quin sigui l'ordre de les equacions o sistemes: les fórmules que s'apliquen són les mateixes, encara que els càlculs poden ser molt més onerosos. En canvi, quan anem a sistemes no integrables, on s'utilitzen els mètodes qualitius, els sistemes d'ordre dos són molt més tractables que els d'ordre més gran. A causa d'això, hem considerat

al text els sistemes d'ordre 2, deixant per als apèndixs les equacions d'ordre més gran.

Hem de fer notar que l'estudi qualitatiu de les equacions diferencials es va iniciar de manera seriosa al final del segle passat amb els estudis de *Poincaré* i de *Liapunov*. En el curs d'aquest segle XX, els problemes tecnològics i el desig de tenir millors models per a entendre la natura han portat l'estudi de les equacions no lineals a primer terme. Al progrés en la seva comprensió i als seus mètodes associem els noms de *Birkhoff*, *Kolmogorov*, *Siegel*, *Smale*, *Arnold*, *Moser* i molts d'altres. Els mètodes qualitatius, inspirats en els resultats de les integracions numèriques de sistemes d'equacions que modelen esdeveniments naturals, han descobert fenòmens que no s'havien considerat abans, tal com són el caos, els atractors complicats i d'estructura fractal, i en general tota una sèrie de comportaments d'apariència aleatòria en sistemes deterministes. A aquests fenòmens s'associen els noms de *Lorenz* i *Rikitake* com a creadors dels models i per haver posat en evidència el comportament asimptòtic complicat de les equacions autònoms (sistemes de fet) d'ordre tres, complicacions aquestes que no es presenten en ordre més petit.

En aquest capítol estudiem les equacions de segon ordre (i sistemes de dues equacions de primer ordre) lineals amb cert detall, deixant per a l'apèndix la generalització a ordres (i sistemes) més grans. També considerem equacions (i sistemes) de segon ordre no lineals autònoms, tant en el cas integrable com en els que no ho són. En els casos no integrables hem d'introduir els mètodes qualitatius, cosa que no fem sistemàticament, sinó mitjançant uns quants exemples que considerem paradigmàtics. Deixem també per a l'apèndix el comentari d'algunes de les complicacions que apareixen en sistemes no lineals d'ordre més gran.

## 10.2 Equacions de segon ordre lineals amb coeficients constants i homogènies

Algunes lleis de la física són expressades per una relació entre una funció i les seves derivades de diversos ordres. Per exemple, el moviment d'una massa sota l'acció d'una molla, obeeix en una idealització, les lleis de Hooke: força proporcional a l'elongació, i de Newton: força igual a massa per acceleració. Essent l'acceleració la derivada de segon ordre de l'elongació, resulta que si  $x(t)$  representa la posició de la partícula al temps  $t$ , llavors s'ha de complir  $x''(t) = -kx(t)$ . Si a més la massa es trobés sotmesa a una força de fregament proporcional a la velocitat, l'equació resultant seria del tipus  $x''(t) = -kx(t) - ax'(t)$ .

Ens preguntem si a partir d'aquesta relació, podem deduir quin serà el moviment de la massa (que suposem concentrada a un partícula que ocupa el punt  $x(t)$  a  $\mathbb{R}$ ). La resposta, potser una mica sorprenent, és que sí, que si donem la posició i la velocitat de la partícula en un moment donat, diguem per a  $t = 0$ , podem trobar de manera única una funció  $x(t)$  que compleix aquestes

condicions i també l'equació diferencial. És a dir, podem determinar la posició de la partícula per a tota  $t \in \mathbb{R}$ .

Per veure que això és cert, considerem l'equació

$$a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0,$$

on  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ . Si suposem que  $a_2 \neq 0$  (si no seria una equació de primer ordre com les que hem tractat abans), podem escriure això com  $x'' + ax' + bx = 0$ , on hem pres  $a = a_1/a_2$ ,  $b = a_0/a_2$ .

Una d'aquestes equacions ja ha aparegut a l'apèndix del capítol 4, on hem vist que si  $x'' = x$  i  $x(0) = a$ ,  $x'(0) = b$ , llavors, necessàriament,

$$x(t) = b \sin t + a \cos t.$$

Per al cas més general, considerem una solució de la forma  $x(t) = e^{\lambda t}$ . Derivant, tenim,  $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$  i  $x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ . Substituint queda

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a \lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0, \quad \text{és a dir} \quad e^{\lambda t}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0.$$

Això es complirà si  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ .

Si les arrels d'aquesta darrera equació algebraica (anomenada *equació característica*) són reals, i diferents, diguem  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , llavors tant  $e^{\lambda_1 t}$  com  $e^{\lambda_2 t}$  són solucions, i tota combinació lineal d'elles, és a dir, tota funció de la forma  $\alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$  també ho és.

Si essent reals les arrels, resulta que  $\lambda_1 = \lambda_2$ , i això passa només en el cas que  $b = a^2/4$ , llavors a més de  $e^{-at/2}$ , resulta solució  $te^{-at/2}$ , com es pot comprovar directament. També tota combinació lineal d'aquestes dues és solució.

Els coeficients d'aquestes combinacions lineals queden determinats si coneixem  $x(0)$  i  $x'(0)$ , per exemple. De fet, en els casos anteriors, mitjançant aquestes combinacions lineals s'obtenen *totes* les solucions de l'equació, tal com veurem més endavant en un cas més general.

Si les arrels  $\lambda$  de l'equació característica no són reals, és a dir, si  $a^2 - 4b < 0$ , no podem procedir d'aquesta manera, i el que fem és prendre  $x(t) = e^{\alpha t} y(t)$ , d'on obtenim  $x' = \alpha e^{\alpha t} y + e^{\alpha t} y'$  i  $x'' = \alpha^2 e^{\alpha t} y + 2\alpha e^{\alpha t} y' + e^{\alpha t} y''$ , d'on se segueix que

$$y'' + (2\alpha + a)y' + (\alpha^2 + a\alpha + b)y = 0.$$

Si fem  $\alpha = -a/2$ , queda

$$y'' + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)y = 0.$$

Posant  $b - a^2/4 = \beta^2$ , ja que és positiu en el cas que considerem, ens queda  $y'' = -\beta^2 y$ , que si prenem  $y(0) = y_0$  i  $y'(0) = z_0$  com a valors de  $y$  i  $y'$  a  $t = 0$ , llavors comporta necessàriament

$$y(t) = y_0 \cos \beta t + \frac{z_0}{\beta} \sin \beta t.$$

Per veure això darrer podem procedir com a l'apèndix del capítol 4:

Fent  $y(t) = z(t) + y_0 \cos \beta t + \frac{z_0}{\beta} \sin \beta t$ , obtenim  $y'(t) = z'(t) - \beta y_0 \sin \beta t + z_0 \cos \beta t$ , i  $y''(t) = z''(t) - \beta^2 y_0 \cos \beta t - \beta z_0 \sin \beta t$ .

Si  $y'' = -\beta^2 y$  amb  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = z_0$ , resulta que  $z'' = -\beta^2 z$ , amb  $z(0) = 0$ ,  $z'(0) = 0$ .

Multiplicant per  $z'$  la darrera equació, resulta

$$0 = (z'' + \beta^2 z)z' = z'z'' + \beta^2 z z' = \frac{1}{2}(z'^2 + \beta^2 z^2)',$$

cosa que implica  $z'^2 + \beta^2 z^2$  constant, i per tant  $z = 0$ , ja que la constant val zero per a  $t = 0$ .

Per tant

$$y(t) = y_0 \cos \beta t + \frac{z_0}{\beta} \sin \beta t,$$

tal com volíem demostrar.

Com que les solucions de  $x'' + ax' + bx = 0$  són donades per  $x = e^{\alpha t} y$ , tenim que, en aquest cas, totes les solucions d'aquesta equació són

$$x(t) = e^{-at/2} \left( y_0 \cos \beta t + \frac{z_0}{\beta} \sin \beta t \right),$$

on

$$y_0 = y(0) = x(0) \quad \text{i} \quad z_0 = y'(0) = x'(0) + \frac{a}{2}x(0).$$

És a dir, totes les solucions són combinacions lineals de  $e^{-at/2} \cos \beta t$  i  $e^{-at/2} \sin \beta t$ .

### 10.3 Reducció d'una equació de segon ordre a un sistema de dues equacions de primer ordre. El retrat

Si posem  $x'(t) = y(t)$ , l'equació diferencial  $x''(t) + ax'(t) + b = 0$ , on  $a$ ,  $b$  i  $c$  són números reals, ens queda

$$y'(t) + ay(t) + bx(t) = 0.$$

Això ho podem escriure com el parell d'equacions

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -bx(t) - ay(t), \end{cases}$$

que anomenem un *sistema de dues equacions de primer ordre*, i llavors el problema consisteix a trobar funcions  $x$  i  $y$  que satisfacin les dues equacions per a cada valor de  $t$  on estiguin definides.

Aquest sistema d'equacions de primer ordre és equivalent a l'equació de segon ordre original: si  $x$  i  $y$  són solucions del sistema, llavors  $x$  és solució de l'equació original, i si  $x$  és solució d'aquesta darrera, i fem  $y = x'$ , llavors  $x$  i  $y$  són solucions del sistema.

En particular el problema de valor inicial, és a dir, trobar una solució amb  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = y_0$ , es tradueix a trobar una solució  $x, y$  del sistema amb  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ .

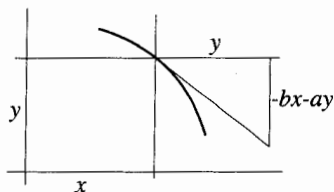
L'avantatge de considerar el sistema rau en el fet que podem identificar l'equació amb un camp vectorial i les seves solucions amb les corbes integrals corresponents. Això dóna noves eines de pensament i resulta útil per a estudiar les propietats qualitatives de les solucions.

Recordem que un parell de funcions  $x, y$ , definides a  $\mathbb{R}$ , defineixen una corba al pla parametritzada per  $t$ .

Efectivament, fem

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Ja hem vist al capítol anterior que podem interpretar  $(x'(t), y'(t))$  com el vector tangent "velocitat" a la corba  $\gamma$  al punt  $(x(t), y(t))$ . Si tenim un sistema d'equacions diferencials com l'anterior, les seves solucions representen, doncs, corbes al pla. El sistema d'equacions ens diu quina és la velocitat d'aquestes corbes a cada punt  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ :  $x' = y$ ,  $y' = -bx - ay$ .



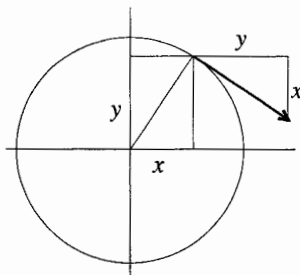
El que el sistema d'equacions ens diu és que les corbes solucions tenen a cada punt  $(x, y)$  la tangent de components  $(y, -bx - ay)$ . És a dir, el nostre sistema és equivalent a un camp vectorial, i les solucions són les anomenades *corbes integrals* del camp vectorial, o sigui les corbes que tenen a cada punt el vector del camp per derivada.

Considerem com a exemple senzill l'equació  $x'' = -x$  (que modela un oscil·lador harmònic).

El sistema equivalent és

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases}$$

Per tant, el camp vectorial corresponent és el que té components  $(y, -x)$  al punt de coordenades  $(x, y)$ . Gràficament queda



Tenim en aquest cas que  $\langle (x', y'), (x, y) \rangle = 0$ , i que  $|(x', y')|^2 = x^2 + y^2$ .

Ja veiem intuïtivament que les solucions es mouen sobre cercles centrats a l'origen. Per veure-ho més formalment, observem que, multiplicant les equacions banda per banda, queda  $yy' + xx' = 0$ , o sigui  $(x^2 + y^2)' = 0$  i per tant  $x^2 + y^2$  és constant.

A una solució,  $\gamma$ , se l'acostuma a anomenar una *trajectòria*, mentre que al conjunt de punts que són imatge del domini de  $\gamma$  sota  $\gamma$ , se l'anomena *òrbita*.

Una solució constant, és a dir, una solució amb tant  $x$  com  $y$  constants, té per òrbita un sol punt, que s'anomena *punt d'equilibri* o *punt crític* o *punt de repòs*.

A les òrbites, se'ls sol donar una orientació, és a dir, s'indica cap on es mou el valor de la solució quan  $t$  creix.

Per a cada condició inicial  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  tenim una solució diferent, però dues trajectòries (solucions) poden tenir la mateixa òrbita: a l'exemple anterior n'hi ha prou que  $x_0^2 + y_0^2$  sigui la mateixa per a dues solucions perquè aquestes tinguin la mateixa òrbita.

Observem en particular que les òrbites del sistema del nostre exemple són corbes que no es tallen, és a dir, que diferents òrbites no tenen punts en comú. Això és general per a totes les equacions que estem considerant, i es desprèn de la unicitat de les solucions amb condicions inicials donades. A l'exemple tenim explícitament totes les solucions, i veiem directament que són úniques: Per a un valor  $x_0$ ,  $y_0$  només hi ha una trajectòria passant-hi per a  $t = 0$ .

El conjunt de les òrbites d'un sistema i la seva ubicació relativa l'anomenem *retrat* del sistema. En el pla l'esquematzem dibuixant algunes òrbites, de manera que siguin suficients per suggerir com són totes les altres i quines són les seves posicions relatives.

## 10.4 Exemples de sistemes de dues equacions lineals amb coeficients constants i homogènies

Per tal d'estudiar la mena d'òrbites que tenen les nostres equacions, considerarem sistemes lleugerament més generals que el que hem estudiat a les dues seccions anteriors.

Prendrem

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

on es tracta de trobar funcions  $x$  i  $y$  que satisfacin les dues equacions.

El camp vectorial associat a  $\mathbb{R}^2$  val  $(ax + by, cx + dy)$  al punt  $(x, y)$ . No és fàcil veure immediatament com és el *retrat* del sistema, és a dir, el conjunt d'òrbites a  $\mathbb{R}^2$  determinades per les solucions.

Els casos més senzills són aquells en què les dues equacions estan desacoblades:

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by. \end{cases}$$

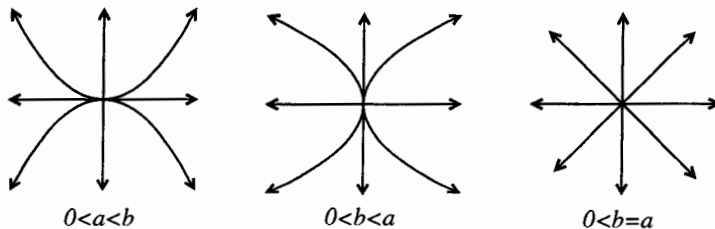
Les solucions d'una i altra vénen donades per  $x(t) = x_0 e^{at}$ ,  $y(t) = y_0 e^{bt}$ ,  $x_0 = x(0)$ ,  $y_0 = y(0)$ .

Eliminem  $t$  de les expressions de les solucions:

Tenim  $\ln(x/x_0) = at$  i  $\ln(y/y_0) = bt$ , i per tant, si  $a \neq 0$ ,

$$y = y_0 \exp \ln \left( \frac{x}{x_0} \right)^{b/a} = y_0 \left( \frac{x}{x_0} \right)^{b/a}.$$

Segons els signes de  $a$  i de  $b$  tenim diverses possibilitats, il·lustrades a les figures

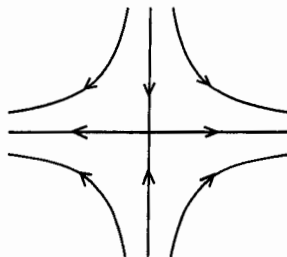


Aquí les fletxes a les òrbites indiquen cap a on va la solució en créixer  $t$ .

Quan estem en aquesta situació diem que l'origen, que és un punt d'equilibri (solució constant), és un *nus inestable*. (Les solucions tendeixen a 0 quan  $t \rightarrow -\infty$ ).

Si  $a$  i  $b$  fossin  $< 0$  hauríem de canviar el sentit de les fletxes: les solucions tendrien a 0 quan  $t \rightarrow \infty$ , i diríem que tenim un *nus estable*.

Si  $b < 0 < a$ , llavors la situació és



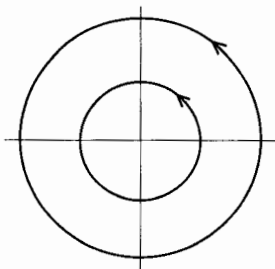
i canviant el sentit de les òrbites si  $a < 0 < b$ . En aquest cas tenim una *sella* o *coll*.

Deixem com a exercici dibuixar els retrats quan  $a$  i/o  $b$  són iguals a 0.

Un altre sistema del qual coneixem el retrat és

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x, \end{cases}$$

en què ja hem vist a la secció anterior (intercanviant  $x$  per  $y$ ) que les òrbites són cercles al voltant de l'origen.



En aquest cas diem que l'origen és un *centre*.

## 10.5 Anàlisi dels sistemes de dues equacions lineals amb coeficients constants i homogènies. Notació matricial

Per tal d'analitzar quins són tots els casos possibles, adoptarem la *notació matricial*. El sistema de dues equacions diferencials lineals amb coeficients constants de primer ordre homogeni, l'escriurem

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases}$$

Això ens permet escriure'l

$$x' = Ax,$$

on  $x$  és la matriu de  $2 \times 1$   $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $A$  és la matriu de  $2 \times 2$   $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $x'$  és la matriu de  $2 \times 1$   $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ , i on  $Ax$  expressa el producte matricial d'una matriu de  $2 \times 2$  per una de  $2 \times 1$ , que resulta, com ha de ser, en una matriu  $2 \times 1$ .

Ara, si  $P$  és una matriu de números reals de  $2 \times 2$  i no singular (és a dir, amb determinant diferent de zero), llavors defineix un canvi lineal de coordenades a



a  $\mathbb{R}^2$  prenent  $x = Py$ . És a dir, és una aplicació lineal bijectiva a  $\mathbb{R}^2$  que ens porta  $y$  a  $Py = x$ , i la seva inversa  $P^{-1}$  ens porta a  $P^{-1}x = y$ .

Essent  $x$  una funció de  $t$ , tenim que les regles de derivació ens diuen que si canviem  $x$  a  $Py$ , llavors  $x'$  canvia a  $Py'$ , de manera que en fer el canvi a l'equació ens queda  $x' = Py' = APy$ , i d'aquí, aplicant  $P^{-1}$  a les dues bandes, obtenim

$$y' = P^{-1}APy.$$

La nova matriu  $P^{-1}AP$ , la denotem per  $B$ , i finalment el nostre sistema, en les noves coordenades, queda

$$y' = By.$$

amb condició inicial  $y(0) = P^{-1}x(0)$ .

Si resollem aquest sistema i trobem  $y(t)$ , llavors, per trobar  $x(t)$ , solució del sistema original, només cal prendre  $x(t) = Py(t)$ .

L'interessant del canvi de coordenades rau en un teorema que ens diu que sigui quina sigui  $A$ , podem trobar  $P$  de manera que  $P^{-1}AP = B$  sigui d'una de les següents tres formes:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{iii) } \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

on  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \alpha$  i  $\beta$  són números reals.

La prova que això és així es pot fer directament considerant les equacions que resulten de posar  $AP = PB$ , però no cal, perquè és un cas particular del teorema de la *forma canònica de Jordan*, que val per a matrius de  $n \times n$ . L'enunciat del teorema, el donem a l'apèndix, i la demostració es troba en els llibres d'àlgebra lineal. Fem notar que, en general, trobarem el teorema en forma complexa, i llavors només es consideren dues formes normals, la i) i la ii), però es permet que  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  no siguin reals. La forma iii) correspon a aquest darrer cas.

En la resta d'aquesta secció considerarem els sistemes  $y' = By$  amb  $B$  en forma canònica.

Quan  $B$  és del tipus i) ens trobem en el primer cas tractat a la secció anterior, i les equacions, que queden desacoblades, són

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

i les solucions són  $y_1(t) = y_1(0)e^{\lambda_1 t}$ ,  $y_2(t) = y_2(0)e^{\lambda_2 t}$ .

Quan  $B$  és de la forma ii) queda

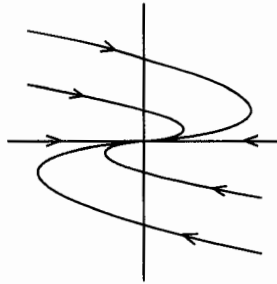
$$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2. \end{cases}$$

De la segona equació, que ha quedat desacoblada, obtenim  $y_2(t) = y_2(0)e^{\lambda t}$ , que posat a la primera dona  $y_1' = \lambda y_1 + y_2(0)e^{\lambda t}$ .

Aquesta és una equació de primer grau lineal i no homogènia, i li podem aplicar la fórmula de variació de paràmetres, de la qual obtenim

$$y_1(t) = y_1(0)e^{\lambda t} + y_2(0) \int_0^t e^{\lambda(t-s)} e^{\lambda s} ds = y_1(0)e^{\lambda t} + y_2(0)te^{\lambda t}.$$

El retrat resulta, per a  $\lambda < 0$



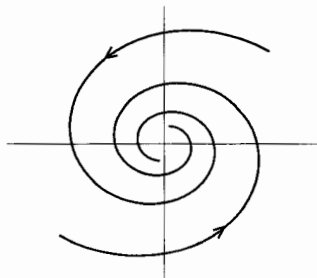
Per a  $\lambda > 0$  invertiríem les sagetes. Deixem com a exercici fer el retrat per a  $\lambda = 0$ .

El cas amb  $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$  és més complicat, ja que requereix o bé la noció d'exponencial d'una matriu, o bé la introducció dels números complexos per tal de posar-lo en la forma  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$  i aconseguir desacoblar les equacions. Deixem, doncs, aquestes deduccions per a l'apèndix, i donem el resultat final, que comprovem directament que satisfà l'equació

$$y' = By, \quad y(0) = y_0.$$

$$y(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} y(0).$$

El retrat, en aquest cas, ens queda



on hem pres  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ .

El nom d'aquest retrat és *focus estable*.

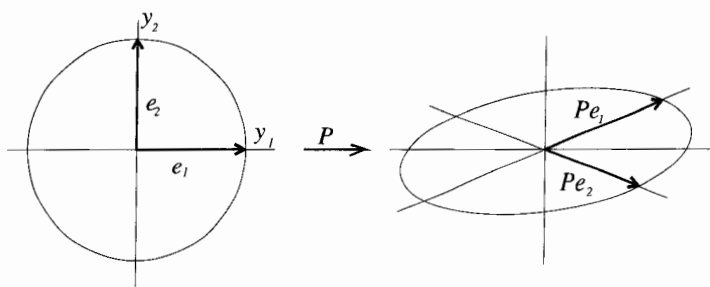
Si  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ , invertim l'orientació de les òrbites al mateix dibuix, i obtenim un *focus inestable*.

En general, si  $\alpha < 0$  (resp.  $\alpha > 0$ ), llavors les solucions tendeixen a 0 quan  $t \rightarrow \infty$  (resp.  $t \rightarrow -\infty$ ), i si  $\beta > 0$  (resp.  $\beta < 0$ ), les òrbites giren en sentit directe (resp. en el sentit de les busques del rellotge).

Si  $\alpha = 0$ ,  $\beta \neq 0$  tenim un *centre*.

Una vegada vist el que passa amb les equacions en forma canònica, ens queda veure quin és l'efecte del canvi  $x = Py$ , sobre el retrat.

Essent  $P$  una matriu no singular, el que fa la transformació  $x = Py$  és portar els cercles  $|y| = \text{const}$  en el·lipses i les rectes en rectes, conservant el paral·lisme. De fet  $P$  porta els vectors  $e_1$  i  $e_2$  en dos nous vectors  $Pe_1$ ,  $Pe_2$  que defineixen una el·lipse



L'el·lipse és tal que la tangent en el punt  $Pe_i$  és paral·lela al vector  $Pe_j$  amb  $i \neq j$ .

Notem que

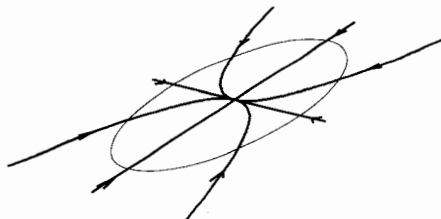
$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}, \quad i$$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix},$$

és a dir les columnes de  $P$  ens donen precisament els vectors  $Pe_i$  i  $Pe_2$ .

El retrat corresponent al sistema  $x' = Ax$  és el corresponent a  $y' = By$ , torçat de manera que els cercles són portats en el·lipses.

Per exemple, si tenim un nus estable per l'equació canònica, per a l'original tindríem un retrat com el següent



És com si ens miréssim el retrat de  $y' = By$  projectat sobre un pla diferent a l'espai.

Per saber a què dels tipus es redueix la matriu  $A$  després del canvi  $P$ , i per a obtenir tant  $P$  com  $B$ , hem de començar per determinar-ne els valors propis.

Aquests valors propis són els números  $\lambda$  (en general complexos), que permeten que hi hagi un vector  $p$  diferent de zero que compleixi

$$Ap = \lambda p.$$

Això és equivalent a demanar que el determinant de la matriu  $A - \lambda I$  sigui diferent de 0, és a dir, que

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

la qual cosa dóna l'anomenada *equació característica* de la matriu  $A$ :

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$

que també podem escriure de forma més elegant:

$$\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = 0.$$

Aquesta equació de segon grau admet dues arrels reals i diferents, una sola arrel real o dues arrels complexes conjugades, segons que el discriminant  $(\text{tr } A)^2 - 4 \det A$  sigui més gran, igual o més petit que 0.

Quan les arrels, els valors propis, siguin reals i diferents,  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , estarem al cas i). Quan siguin complexes conjugades  $\lambda$  i  $\bar{\lambda}$ , estarem al cas iii) amb  $\lambda = \alpha + i\beta$ , i quan sigui una sola arrel real, estarem al cas i) o ii) depenent de la matriu  $A$ .

Una vegada trobats els valors propis es troba la matriu  $P$  a partir de  $PB = AP$ .

En el cas que  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  són reals i diferents s'ha de complir

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

que podem escriure com

$$(\lambda_1 p_1 \quad \lambda_2 p_2) = (Ap_1 \quad Ap_2)$$

si  $p_i$  representa la columna  $i$ -èsima de  $P$  i  $(p_1, p_2)$  representa la matriu que té per columnes els vectors  $p_1$  i  $p_2$ .

Veiem que es compleix, com havia de ser, que  $\lambda_i p_i = Ap_i$ , és a dir que  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  són valors propis de  $A$ , i a més això ens diu que  $p_i$  és un vector propi de la matriu  $A$  corresponent a  $\lambda_i$ , tot per a  $i = 1, 2$ .

Per tant podem prendre com a  $P$  qualsevol matriu que tingui per columnes vectors propis de la matriu  $A$  corresponents a  $\lambda_1$  i a  $\lambda_2$  (que seran linealment independents, i per tant  $P$  serà no singular).

En el cas que  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  siguin iguals, diguem-ne  $\lambda$ , real, llavors estarem al cas i) o ii) segons que la matriu  $A$  tingui o no dos vectors propis linealment independents. Això dependrà de si  $(A - \lambda I)p = 0$  es verifica per a tot vector  $p$  a  $\mathbb{R}^2$ , o bé només per als vectors  $p$  que són múltiples reals d'un sol vector diferent de 0. En el primer cas tots els vectors de  $\mathbb{R}^2$  diferents de 0 són vectors propis i, certament, en podem escollir dos de linealment independents. Ens trobem, doncs, al cas i). En el segon cas no podem trobar dos vectors propis linealment independents i hem de recórrer a la forma ii) (la primera forma implica necessàriament que  $p_1$  i  $p_2$  són vectors propis linealment independents, ja que  $P$  és no singular).

Per a obtenir la forma ii) hem de trobar  $p_1$  i  $p_2$  que satisfacin  $PB = AP$ , o sigui

$$(\lambda p_1 \quad p_1 + \lambda p_2) = (Ap_1 \quad Ap_2),$$

és a dir  $\lambda p_1 = Ap_1$ , que ens diu que  $p_1$ , la primera columna de  $P$ , és un vector propi de  $A$ . La segona condició que s'ha de complir és  $p_1 + \lambda p_2 = Ap_2$ , o, escrit d'una altra manera,  $(A - \lambda I)p_2 = p_1$ .

Aquest vector  $p_2$ , diferent de 0, sempre es pot trobar perquè  $A - \lambda I$  porta tots els vectors del pla a múltiples de  $p_1$ . Si escollim un vector  $p$  independent de  $p_1$ , anirà a parar a un múltiple de  $p_1$ . Multiplicant-lo per una constant  $\alpha$  de manera que  $\alpha p$  vagi a  $p_1$  tindrem el vector  $p_2 = \alpha p$  volgut.

Quan els valors propis són  $\lambda$  i  $\bar{\lambda}$ , no reals, llavors la forma escaient és la iii) amb  $\alpha$  i  $\beta$  la part real i imaginària respectivament de  $\lambda = \alpha + i\beta$ . Per a trobar  $P$  també hem de satisfer  $PB = AP$ , que ens proporciona equacions per als elements de  $P$  que podem resoldre.

Una manera de veure-ho, també, és fer com al cas i), però prenent  $\lambda_1 = \lambda$  i  $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ . Obtenim així una matriu  $P$  complexa que porta  $A$  a  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ .

Ara, mitjançant un canvi de coordenades addicional  $Q = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ , es porta aquesta forma diagonal a la forma iii). A l'apèndix tractem aquesta situació amb detall per a sistemes de  $n$  equacions.

Tenim doncs que en la forma canònica la solució s'obté multiplicant una matriu que depèn de  $t$  pel vector de les condicions inicials. En els diferents casos aquesta matriu és

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Multiplicant a l'esquerra per  $P$  obtenim la solució de  $x' = Ax$  en forma d'una matriu aplicada a les condicions inicials.

En el cas del sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay \end{cases}$$

que equival a la nostra equació lineal de segon ordre amb coeficients constants

(secció 3)  $x'' + ax' + bx = 0$ , ens trobem que la matriu  $A$  ve donada per

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}.$$

Els valors propis resulten les arrels  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  de l'equació característica  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ , que s'obté de l'equació diferencial posant  $\lambda^2$  per  $x''$ ,  $\lambda$  per  $x'$  i 1 per  $x$ .

Observem que en aquesta situació particular en què el sistema prové d'una sola equació, no es pot donar el cas i) quan  $\lambda_1 = \lambda_2$ , sinó que necessàriament la forma canònica és  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .

La raó es troba en el fet que  $A$  no té més que un vector propi independent. Efectivament, si

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

llavors, resulta  $p_2 = \lambda p_1$ .

Observem que hem estat prenent els valors inicials de les solucions per a  $t = 0$ . Això és degut al fet que per a les equacions que considerem, on la banda dreta no depèn explícitament de  $t$ , sinó que ho fa a través de  $x$ , si  $x(t)$  és la solució que satisfà  $x(0) = x_0$ , llavors  $y(t) := x(t - t_0)$  és la solució que satisfà  $x(t_0) = x_0$ .

## 10.6 Solucions com a exponencials de matrius

La solució del sistema  $x' = Ax$  estudiat a la secció anterior amb  $x(0) = x_0$  s'obté, com hem vist, multiplicant una matriu per  $x_0$ . Això se sol expressar per

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

on  $e^{At}$  és una matriu de  $2 \times 2$ , per analogia amb el cas  $x' = ax$ .

La justificació d'aquesta notació exponencial es troba en la definició de  $e^{At}$ , que també escriurem  $\exp At$ , com una suma infinita de matrius:

$$e^{At} := I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots$$

Que aquesta sèrie coincideix amb la matriu solució es pot comprovar primer quan tenim l'equació en forma canònica. Efectivament, en el cas i) ens queda

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

i tenim la sèrie.

En el cas ii) ens queda

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix},$$

que, també correspon a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} t^2 + \dots,$$

i per tant també en aquest cas les dues definicions de  $e^{At}$  són equivalents.

Per al cas iii) podem prendre  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ , treballar com en els dos casos anteriors i després fer el canvi de variables complex que necessitem per a posar la matriu en forma real, o millor, per a no complicar-ho ara amb números complexos, podem comprovar la igualtat

$$\exp \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} t = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix},$$

on recordem (capítol 6) que

$$\begin{aligned} \cos \beta t &= 1 - \frac{\beta^2 t^2}{2!} + \frac{\beta^4 t^4}{4!} - \dots \\ \sin \beta t &= \beta t - \frac{\beta^3 t^3}{3!} + \frac{\beta^5 t^5}{5!} - \dots \end{aligned}$$

Per al cas que  $A$  no estigui en forma canònica, observem directament de la definició que

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP.$$

Efectivament

$$\begin{aligned} I &+ P^{-1}AP + \frac{(P^{-1}AP)^2}{2} + \dots + \frac{(P^{-1}AP)^n}{n!} \\ &= I + P^{-1}AP + P^{-1}\frac{A^2}{2}P + \dots + P^{-1}\frac{A^n}{n!}P \\ &= P^{-1}\left(I + A + \frac{A^2}{2} + \dots + \frac{A^n}{n!}\right)P, \end{aligned}$$

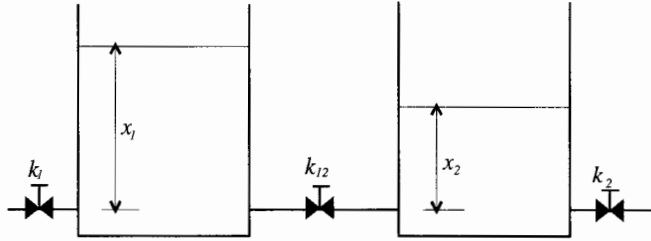
i en el límit en fer tendir  $n$  a  $\infty$  tenim la igualtat cercada.

Per tant,  $e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}$ , que ens dóna la solució de  $x' = Ax$ , ja que

$$x = Py = Pe^{Bt}P^{-1}x_0 = e^{At}x_0.$$

## 10.7 Exemple: Dipòsits comunicats

Considerem un model de dos dipòsits cilíndrics del mateix radi contenint líquid, i interconnectats entre ells i amb l'exterior, segons l'esquema de la figura



Suposem que les vàlvules són tals que el flux a través d'elles és proporcional a la diferència de pressió als seus extrems, amb constants de proporcionalitat  $k_1$ ,  $k_{12}$  i  $k_2$ .

Essent cilíndrics els dos tancs, els volums continguts per sobre de les vàlvules són proporcionals als nivells  $x_1$  i  $x_2$ , i procedint de manera anàloga al que hem fet a la secció 9.5, obtenim que el model matemàtic de la situació és

$$\begin{aligned}x_1' &= -k_1 x_1 - k_{12}(x_1 - x_2) \\x_2' &= +k_{12}(x_1 - x_2) - k_2 x_2, \quad k_1, k_{12}, k_2 > 0\end{aligned}$$

en què els termes de la forma  $kx$  ens donen la taxa de canvi de nivell degut al flux per les vàlvules.

Tenim, doncs, un sistema de dues equacions de la forma  $x' = Ax$ , en què

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 - k_{12} & k_{12} \\ k_{12} & -k_{12} - k_2 \end{pmatrix}.$$

Aquesta és una matriu simètrica, que tindrà per tant els seus valors propis reals. Calculem-los. L'equació característica és

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + (\det A) = 0$$

( $\operatorname{tr} A =$  traça de  $A$ , és la suma dels termes de la diagonal) o sigui

$$\lambda^2 + (k_1 + 2k_{12} + k_2)\lambda + k_1 k_{12} + k_1 k_2 + k_{12} k_2 = 0,$$

és a dir  $\lambda^2 + a\lambda + b$ , amb  $a = k_1 + 2k_{12} + k_2 > 0$  i  $b = k_1 k_{12} + k_1 k_2 + k_{12} k_2 > 0$ .

D'on obtenim  $a^2 - 4b = (k_1 - k_2)^2 + 4k_{12}^2$ , que és  $> 0$ , com ja sabíem perquè els valors propis són reals.

Per tant, estem al cas i) amb

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b}) < 0 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b}) < 0.\end{aligned}$$



I, així, la forma canònica correspon a la i):  $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . Utilitzant  $AP = PB$  arribem a

$$p_{11} = 1, \quad p_{21} = \frac{\lambda_1 + k_1 + k_{12}}{k_{12}} =: p_1,$$

$$p_{12} = 1, \quad p_{22} = \frac{\lambda_2 + k_1 + k_{12}}{k_{12}} =: p_2.$$

Com que suposem  $k_{12} \neq 0$ , això va bé.

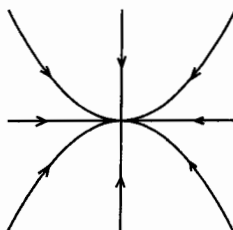
Tenim, per als valors propis,  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , que

$$\lambda_1 + k_1 + k_{12} = \frac{1}{2}(k_1 - k_2 + \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4k_{12}^2}) > 0,$$

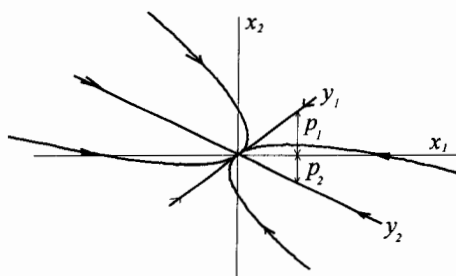
$$\lambda_2 + k_1 + k_{12} = \frac{1}{2}(k_1 - k_2 - \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4k_{12}^2}) < 0,$$

que ens diu que  $p_1 > 0$  i  $p_2 < 0$ .

Com que  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  si  $k_1 + k_2 > 0$ , el retrat de  $y' = By$  és



i  $P$  ens ho porta a

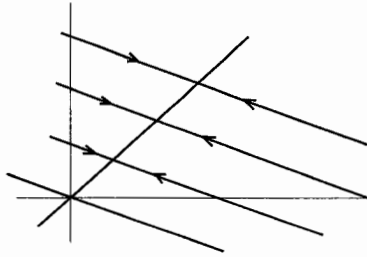


on els vectors  $(1, p_1)$  i  $(1, p_2)$  són respectivament  $Pe_1$  i  $Pe_2$ .

El retrat ens mostra quines són les trajectòries (solucions)  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ . Com que l'únic realista és començar al primer quadrant, veiem que el nivell pot créixer per un moment en un dels tancs, però que, naturalment, tots dos nivells tendeixen a 0 quan  $t \rightarrow \infty$  si  $k_1 + k_2 > 0$ . Si  $k_1 = k_2 = 0$  resulta que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & p_1 &= 1, & p_2 &= -1 \\ \lambda_2 &= -2k_{12} < 0 \end{aligned}$$

i el retrat queda llavors:



on tots els punts sobre la recta  $x_2 = x_1$  són d'equilibri, i, segons les condicions inicials, es tendeix a un o altre.

## 10.8 L'equació no homogènia. Fórmula de variació de paràmetres

Considerem ara el sistema de dues equacions  $x'(t) = Ax(t) + f(t)$ , on  $A$  és una matriu  $2 \times 2$  com a les seccions anteriors, i  $f$  és un 2 vector dependent de  $t$ , considerat com a matriu d'una sola columna.

Es tracta de trobar una solució  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  que el satisfaci, junt amb la condició inicial  $x(t_0) = x_0$ . Observem aquí que no donem la condició inicial per a  $t = 0$ , sinó que estipulem una  $t_0$  que pot ser diferent de 0. La raó rau en el fet que en dependre  $f$  de  $t$ , no passa com abans, que si  $x(t)$  és la solució que satisfà  $x(t_0) = x_0$ , llavors  $x(t + t_0)$  és la solució que satisfà  $x(0) = x_0$ , i per tant no importava gaire per a quina  $t$  donàvem la condició inicial.

Hem vist que la solució del sistema homogeni  $x' = Ax$  ve donada per  $x(t) = e^{A(t-t_0)}x(0)$ . Provem ara, per al nostre sistema no homogeni, una solució de la forma  $x(t) = e^{A(t-t_0)}c(t)$ , on  $c$  no és una constant com  $x(0)$ , sinó una funció de  $t$  (per això el mètode es coneix com de *variació de constants* o de *paràmetres* i és fonamentalment degut a Lagrange al segle XVIII).

Inscrivint això al sistema, obtenim

$$Ae^{A(t-t_0)}c(t) + e^{A(t-t_0)}c'(t) = Ae^{A(t-t_0)}c(t) + f(t),$$

o sigui  $c'(t) = e^{-A(t-t_0)}f(t)$ , on  $e^{-A(t-t_0)}$  és la matriu inversa de  $e^{A(t-t_0)}$ .

Aquí hem derivat  $(e^{At})' = Ae^{At}$ , la qual cosa es justifica directament mitjançant la definició de  $e^{At}$ . Si de cas, fent-ho primer per a  $A$  en forma canònica, i després fent el canvi  $P$  (exercici).

Si volem que  $c(t)$  s'anulli per a  $t = t_0$ , fem

$$c(t) = \int_{t_0}^t e^{-As} f(s) ds.$$

Tenim, per altra banda, que si sumem a una solució de l'equació homogènia qualsevol solució de la no homogènia, obtenim una solució d'aquesta darrera:

$$(x(t) + c(t))' = x' + c' = Ax + Ac + f = A(x + c) + f.$$

Per tant, una solució de  $x' = Ax + f$  que prengui el valor  $x_0$  per a  $t = t_0$ , ve donada per

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} f(s) ds,$$

que és la desitjada *fórmula de variació de paràmetres*.

En el cas de l'equació  $x'' + ax' + bx = g(t)$  ho reduïm primer a un sistema  $x' = Ax + f$  on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}, \quad \text{i} \quad x = x_1, \quad x' = x_2.$$

Per portar el sistema a forma canònica el que fem és posar  $x = Py$ , com abans. Queda  $x' = Py' = APy + f$ , i aplicant  $P^{-1}$  per l'esquerra:

$$y' = P^{-1}APy + P^{-1}f = By + P^{-1}f,$$

i la fórmula de variacions de paràmetres queda

$$y(t) = e^{B(t-t_0)}y(t_0) + e^{Bt} \int_{t_0}^t e^{-Bs} P^{-1}f(s) ds.$$

Generalment és força més senzill tractar les equacions en forma canònica, i després prendre  $x = Py$ .

En el cas dels dipòsits, si  $f_1$  i  $f_2$  representen les taxes instantànies degudes a aportacions de líquid d'una font externa, calculem  $P^{-1}$  i tenim  $P^{-1} = \frac{1}{p_2 - p_1} \begin{pmatrix} p_2 & -1 \\ -p_1 & 1 \end{pmatrix}$ , on  $p_1$  i  $p_2$  són els valors que hem calculat abans.

Fem notar que en no ser autònom el sistema, si  $f$  no és constant, ja no podem identificar l'equació amb un camp vectorial a  $\mathbb{R}^2$ , i per tant no té sentit parlar de retrat com abans.

### 10.8.1 La unicitat de les solucions

Tornem ara a la unicitat de les solucions, que no hem considerat encara en el cas d'un sistema o en el cas no homogeni.

Suposem que hi hagués dues solucions  $x$ ,  $y$  amb el mateix valor inicial a  $t_0$ . Prenem la diferència  $z = x - y$ . És una funció que s'anulla per a  $t = t_0$ , i que satisfà  $z' = Az$ .

Fem  $e^{A(t-t_0)}u = z$ .

Derivem:

$$Ae^{A(t-t_0)}u + e^{A(t-t_0)}u' = z' = Az = Ae^{A(t-t_0)}u,$$

d'on se segueix que  $e^{A(t-t_0)}u' = 0$ , o sigui que  $u' = 0 \forall t$ , ja que  $e^{A(t-t_0)}$  no és singular per a cap valor de  $t$ .

D'aquí se segueix que  $u = k$ , una constant, i per tant  $z = e^{A(t-t_0)}c$  amb  $z(t_0) = 0$ , és a dir que  $k = 0$ , i per tant  $z = 0$ .

## 10.8.2 Exemples. Ressonància

Aquests tipus d'equacions lineals serveixen de models a molts processos de la ciència i la tecnologia, entre els quals els sistemes mecànics amb molles, amortidors, masses i forces externes, els circuits elèctrics amb resistències, inductàncies, capacitàncies i forces electromotrius, els dipòsits intercomunicats dels quals volem conèixer com evolucionen els volums de líquids o les concentracions de substàncies dissoltes. Deixem per als exercicis alguns d'aquests exemples. A continuació explicitem un cas força sorprenent, el de la *ressonància*.

Considerem l'equació

$$x'' + \beta^2 x = a \cos \beta t$$

que modelitza, per exemple, un pes penjant d'una molla sobre el qual, a més de la força de la gravetat, actua una força vertical sinusoidal.

D'acord amb les seccions anteriors, el que fem és escriure-la com un sistema de dues equacions de primer ordre:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= -\beta^2 x_1 + a \cos \beta t. \end{aligned}$$

El sistema  $x' = Ax + f$  té

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ a \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

A té per valors propis  $\lambda_1 = \beta i$ ,  $\lambda_2 = -\beta i$ .

Cerquem, doncs, una matriu  $P$  que ens faci  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = B$ , o equivalentment

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim, de les equacions que ens resulten, que  $p_1 = \beta$ ,  $p_2 = -\beta$ , i per tant

$$P^{-1} = -\frac{1}{2\beta} \begin{pmatrix} -\beta & -1 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Si fem, doncs, el canvi  $x = Py$ , obtenim  $y' = By + P^{-1}f(t)$ , amb

$$P^{-1}f(t) = \begin{pmatrix} \frac{a}{2\beta} \cos \beta t \\ -\frac{a}{2\beta} \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

I ara, aplicant la fórmula de variació de paràmetres, prenent  $t_0 = 0$ :

$$y(t) = e^{Bt}y(0) + \int_0^t e^{B(t-s)}f(s) ds.$$

Com que

$$e^{Bt} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix},$$

resulta

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(0) \cos \beta t - y_2(0) \sin \beta t \\ y_1(0) \sin \beta t + y_2(0) \cos \beta t \end{pmatrix} + \frac{a}{2\beta} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos^2 \beta s - \sin \beta s \cos \beta s \\ -\sin \beta s \cos \beta s - \cos^2 \beta s \end{pmatrix} ds.$$

Fent les operacions queda finalment

$$y(t) = e^{Bt}y(0) + \frac{at}{4\beta} \begin{pmatrix} \cos \beta t + \sin \beta t \\ \sin \beta t - \cos \beta t \end{pmatrix} + \frac{a}{4\beta^2} \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix}.$$

Obtenim  $y(0)$  a partir de  $x(0)$  mitjançant  $y(0) = P^{-1}x(0)$ , i  $x(t)$  ve donada per

$$x(t) = Py(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} y(t).$$

Finalment  $x_1(t)$ , que és la solució cercada, és, doncs, igual a  $y_1(t) + y_2(t)$ , de manera que queda

$$x_1(t) = x_1(0) \cos \beta t + \frac{x_1'(0)}{\beta} \sin \beta t + \frac{at}{2\beta} \sin \beta t.$$

Ens resulta, així, una solució que és suma d'una funció de tipus sinusoidal de període  $2\pi/\beta$ , i d'una funció oscil·latòria d'amplitud creixent amb  $t$ , de fet proporcional a  $t$ . Aquest fenomen d'obtenir solucions no acotades quan tant la dinàmica del sistema autònom (sense forces externes), com la força externa són acotades, es coneix amb el nom de *ressonància*. És el que pot produir, per exemple, oscil·lacions catastròfiques en bigues o ponts quan es troben sotmesos a forces periòdiques de la mateixa freqüència que la d'oscil·lació natural del pont o biga. El pont de Tacoma a l'estat de Washington dels Estats Units d'Amèrica va caure fa uns seixanta anys a causa d'una oscil·lació ressonant produïda pel vent.

En canvi, si la freqüència de  $f$  és diferent de la freqüència de les solucions de  $x' = Ax$ , el fenomen de ressonància no es produeix i les solucions resulten acotades:

Si prenem l'equació

$$x'' + \beta_0^2 x = a \cos \beta t,$$

amb  $\beta_0 \neq \beta$ , obtenim

$$x(t) = c_1 \cos \beta_0 t + c_2 \sin \beta_0 t + \frac{a}{\beta_0^2 - \beta^2} \cos \beta t,$$

on podem determinar  $c_1$  i  $c_2$  a partir de les condicions inicials.

Aquesta solució és quasiperiòdica (vegeu l'apèndix al final del capítol 6), i per tant acotada: no es produeix el fenomen de ressonància.

### 10.8.3 Resolució abreujada de l'exemple anterior

El mètode de variació de paràmetres es pot aplicar directament, sense necessitat de reduir l'equació de segon ordre de l'exemple de la secció anterior a un sistema, i sense necessitat de fer i desfer el canvi de variables que porta la matriu  $A$  a forma normal.

El que fem, donada l'equació  $x'' + \beta^2 x = a \cos \beta t$ , és considerar primer l'equació homogènia  $x'' + \beta^2 x = 0$ . Les arrels característiques d'aquesta equació són les de  $\lambda^2 + \beta^2 = 0$ , és a dir  $\lambda = \pm \beta i$ . Resulta llavors, segons hem vist a la secció 5, que les solucions de l'equació homogènia són totes les combinacions lineals de  $\sin \beta t$  i de  $\cos \beta t$ , és a dir, funcions de la forma  $b_1 \sin \beta t + b_2 \cos \beta t$ .

Sumant a aquesta solució qualsevol solució de l'equació no homogènia, obtindrem totes les solucions d'aquesta darrera. Com a candidat per a aquesta solució particular, proposem una funció de la forma

$$x(t) = c_1(t) \sin \beta t + c_2(t) \cos \beta t.$$

Si derivem obtenim

$$x'(t) = c_1' \sin \beta t + c_2' \cos \beta t + c_1 \beta \cos \beta t - c_2 \beta \sin \beta t.$$

Si derivéssim una altra vegada, obtindríem una expressió on apareixerien derivades segones de  $c_1$  i de  $c_2$ . En imposar la condició que  $x$  compleixi l'equació diferencial, això ens donaria un sistema de dues equacions diferencials de segon ordre per  $c_1$  i  $c_2$ , i no hauríem avançat gens.

Ara bé, si posem condicions sobre  $c_1$  i  $c_2$  de manera que

$$c_1' \sin \beta t + c_2' \cos \beta t = 0,$$

llavors a l'expressió de  $x''$  no hi entrarien segones derivades de  $c_1$  ni de  $c_2$ . Suposem que ho hem aconseguit i derivem  $x$  una altra vegada:

$$x''(t) = c_1' \beta \cos \beta t - c_2' \beta \sin \beta t - (c_1 \beta^2 \sin \beta t + c_2 \beta^2 \cos \beta t),$$

i substituint a l'equació queda

$$x'' + \beta^2 x = c_1' \beta \cos \beta t - c_2' \beta \sin \beta t = a \cos \beta t.$$

De les dues equacions lineals que ens queden per a  $c'_1$  i  $c'_2$ , obtenim, multiplicant la primera per  $-\beta \sin \beta t$ , la segona per  $\cos \beta t$  i restant:

$$c'_1 \beta (\sin^2 \beta t + \cos^2 \beta t) = c'_1 \beta = a \cos^2 \beta t.$$

I multiplicant la primera per  $\beta \cos \beta t$ , la segona per  $\sin \beta t$  i restant també:

$$c'_2 \beta (\sin^2 \beta t + \cos^2 \beta t) = c'_2 \beta = -a \sin \beta t \cos \beta t.$$

D'aquí, procurant que  $c_1(0) = c_2(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{a}{\beta} \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin 2\beta t}{4\beta} \right) \\ c_2(t) &= -\frac{a}{2\beta} \left( -\frac{\cos 2\beta t}{2\beta} + \frac{1}{2\beta} \right), \end{aligned}$$

i la solució queda

$$x(t) = b_1 \sin \beta t + b_2 \cos \beta t + c_1(t) \sin \beta t + c_2(t) \cos \beta t.$$

Els coeficients  $b_1$  i  $b_2$  es determinen fent servir les condicions inicials i, certament, obtenim la mateixa solució que a la secció anterior, en la forma

$$x(t) = x_0 \cos \beta_0 t + \frac{x'(0)}{\beta} \sin \beta_0 t + \frac{a}{\beta_0^2 - \beta^2} (\cos \beta_0 t - \cos \beta t).$$

Igualment obtenim la solució per a l'equació sense ressonància del final de la secció anterior.

El mètode tot just utilitzat es pot fer servir de manera general per a l'equació

$$x'' + ax' + bx = f(t).$$

Tal com hem fet a l'exemple de més amunt, trobem les arrels de l'equació característica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

i segons que  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  siguin reals diferents, reals iguals o no reals, considerem les solucions generals de l'equació homogènia (és a dir,  $f = 0$ ) respectives, totes de la forma  $b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t)$ :

$$\begin{aligned} &b_1 e^{\lambda_1 t} + b_2 e^{\lambda_2 t} \\ &b_1 e^{\lambda t} + b_2 t e^{\lambda t} \\ &b_1 e^{\alpha t} \sin \beta t + b_2 e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad \lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta. \end{aligned}$$

El que fem llavors és trobar una solució particular de la forma corresponent, prenent per comptes de  $b_1$  i  $b_2$ , funcions de  $t$ ,  $c_1(t)$  i  $c_2(t)$ .

Per tal que no apareguin segones derivades ni de  $c_1$  ni de  $c_2$  quan substituïm aquest candidat en l'equació, demanem que

$$c'_1(t)x_1(t) + c'_2(t)x_2(t) = 0.$$

Com a segona condició sobre  $c_1$  i  $c_2$ , substituïm  $c_1x_1 + c_2x_2$  a l'equació, i tenint en compte la condició anterior, ens queda

$$c'_1(t)x'_1(t) + c'_2(t)x'_2(t) = f(t).$$

A partir d'aquestes dues equacions obtenim  $c'_1(t)$  i  $c'_2(t)$  i, integrant, la solució cercada.

Per cert que el determinant  $x_1(t)x'_2(t) - x'_1(t)x_2(t)$  del sistema lineal anterior rep el nom de *wronskià* (pel matemàtic *Wronsky*).

Tot i això, el mètode no deixa de comportar la integració de les expressions que hem obtingut per  $c'_1$  i  $c'_2$ , la qual pot resultar força onerosa en alguns casos.

Per tal d'evitar-se aquesta tasca, hi ha mètodes més directes, que sota els noms de *coeficients indeterminats* o bé *elecció assenyada* es troben als llibres d'equacions diferencials (vegeu el llibre de Braun, per exemple). Aquests mètodes pressuposen que en molts casos ja sabem quina forma tindrà la solució particular, i només cal determinar-ne unes constants.

Així, si a la darrera equació considerada tenim  $f(t) = P_n(t)e^{\lambda t}$ , on  $P_n$  és un polinomi de grau  $n$ , encarem la solució  $x(t)$  en la forma  $Q_n(t)e^{\lambda t}$ , amb  $Q_n$  un altre polinomi de grau  $n$ , si  $\lambda \neq \lambda_1$ ,  $\lambda \neq \lambda_2$ , en la forma  $tQ_n(t)e^{\lambda t}$  si  $\lambda = \lambda_i$  per a  $i = 1$  o  $i = 2$ , i  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , i en la forma  $t^2Q_n(t)e^{\lambda t}$  si  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ .

## 10.9 Les equacions lineals de coeficients no constants

Considerem ara equacions, com les que han aparegut a la secció anterior per trobar  $c_1$  i  $c_2$ , que són lineals, però els seus coeficients no són constants.

Com a la resta d'aquest capítol considerarem el cas d'ordre dos, encara que els resultats són vàlids per equacions d'ordre tan gran com vulguem.

Distingim, com en el cas dels coeficients constants, entre *equacions homogènies* i *equacions no homogènies*. L'equació homogènia que considerarem és del tipus

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0,$$

mentre que a l'equació no homogènia apareix una funció de  $t$ ,  $f(t)$ , a la banda dreta, en comptes de 0. Suposem que tant  $a$  com  $b$  i  $f$  són contínues a l'interval on cerquem les solucions.

Com en el cas dels coeficients constants, l'equació homogènia es pot posar en forma de sistema de primer ordre fent  $x'(t) = y(t)$ , de manera que queda

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -b(t)x - a(t)y, \end{aligned}$$

o, d'una manera més general,

$$x' = A(t)x,$$



on  $x$  és la matriu columna  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , amb  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ , i  $A(t)$  és la matriu

$$\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix},$$

que depèn de  $t$ .

Així com al cas en què  $A$  era constant teníem una fórmula explícita,  $x' = e^{At}x(0)$ , que ens donava totes les solucions, ara ens trobem que aquesta fórmula general no existeix.

Per exemple, l'equació  $x'' + \frac{1}{t}x' + x = 0$ , que és una cas particular d'*equació de Bessel*, no té les solucions (per a  $t \neq 0$ ) expressables ni en termes de les funcions elementals ni de les seves integrals. Resulta, però, que conegudes dues de les solucions, anomenades *funcions de Bessel*, totes les altres solucions es troben com a combinació lineal d'elles.

Aquesta propietat és general per a totes les equacions lineals homogènies de segon ordre o sistemes lineals de dues equacions de primer ordre: donades dues solucions  $\bar{x}$ ,  $\tilde{x}$  linealment independents, és a dir, tals que  $\alpha\bar{x} + \beta\tilde{x} \neq 0$  per a totes les parelles de valors  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , diferents de  $(0, 0)$ , llavors, totes les solucions són combinació lineal d'aquestes dues.

Que la combinació lineal de dues solucions és solució, és comprovable directament, ja que  $(\alpha\bar{x} + \beta\tilde{x})' = \alpha\bar{x}' + \beta\tilde{x}'$ , i  $A(t)(\alpha\bar{x} + \beta\tilde{x}) = \alpha A(t)\bar{x} + \beta A(t)\tilde{x}$ .

Que no n'hi ha més se segueix del fet que si donem les condicions inicials  $x(t_0)$ , llavors prenent  $\alpha$  i  $\beta$  de manera que  $\alpha\bar{x}(t_0) + \beta\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$ , obtenim una solució, i que donat el valor inicial  $x(t_0)$ , la solució és única. Aquesta darrera propietat, la unicitat, és proporcionada pel teorema d'existència i unicitat, del qual hem parlat pel cas d'ordre  $n$ , i en parlarem més endavant pels sistemes més generals.

És interessant notar que d'aquesta unicitat se segueix que si per a un valor determinat de  $t = t_0$ , els vectors  $\bar{x}(t_0)$  i  $\tilde{x}(t_0)$  són linealment independents, llavors, aquesta independència lineal es manté per a tots els valors de  $t$ .

Efectivament, si per a un valor  $t_1$  de  $t$  tinguéssim  $\alpha\bar{x}(t_1) + \beta\tilde{x}(t_1) = 0$  amb  $\alpha$  i/o  $\beta$  diferents de 0, és a dir  $\bar{x}(t_1) = \frac{\beta}{\alpha}\tilde{x}(t_1)$  (o  $\tilde{x}(t_1) = \frac{\alpha}{\beta}\bar{x}(t_1)$ ), llavors per a tota  $t$  (també per a  $t = t_0$ ) tindriem  $\bar{x}(t) = \frac{\beta}{\alpha}\tilde{x}(t)$ , ja que són dues solucions amb el mateix valor inicial per a  $t = t_1$ .

Sigui com sigui el problema de trobar les dues solucions que generen totes les altres, en no poder-se reduir a quadratures s'ha de tractar, o bé numèricament (hi ha taules de funcions de Bessel, per exemple), o bé mitjançant sèries de potències. Aquest darrer mètode, que no tractarem amb detall, consisteix a suposar que les components de la solució són funcions analítiques i per tant expressables com a sèries de potències:  $x_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}t^k$ . Substituint aquestes sèries a l'equació (derivant terme a terme), trobem, en igualar termes del mateix grau en  $t$ , una successió recurrent d'equacions algebraïques, que permeten anar trobant els coeficients  $a_{ik}$  començant amb els ordres més baixos. Certament, si el que ens interessa és trobar numèricament les solucions,

aquest mètode no resulta gaire pràctic: per exemple, la sèrie pot tenir un radi de convergència petit, o pot convergir molt lentament.

Amb les dues solucions  $\bar{x}$  i  $\tilde{x}$  linealment independents podem formar una matriu  $X$  que les tingui per columnes, i llavors, qualsevol solució  $x = \alpha\bar{x} + \beta\tilde{x}$  es pot expressar com  $x = X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . La matriu  $X$  és anomenada *solució fonamental* de l'equació.

Si prenem per  $\bar{x}$  i  $\tilde{x}$  les solucions que satisfan precisament  $\bar{x}(t_0) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  i  $\tilde{x}(t_0) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , és a dir, si  $X(t_0) = I$ , resulta que la solució  $x$  que té per valor inicial  $x(t_0)$ , ve donada per

$$x(t) = X(t)x(t_0).$$

Una *matriu fonamental*, se l'anomena *principal* a  $t = t_0$ .

Les equacions lineals amb coeficients no constants són importants en la pràctica. D'una banda les equacions de Bessel i d'altres tenen rellevància en problemes físics amb diverses simetries. De l'altra, apareixen de manera natural en estudiar el moviment dels astres del sistema solar, en què els coeficients solen ser funcions periòdiques com a les equacions de Hill (per a l'estudi del moviment de la Lluna) i Mathieu.

Quan els coeficients són funcions periòdiques hi ha un *teorema de Floquet* que ens diu que tota solució fonamental és de la forma  $X(t) = P(t)e^{Bt}$ , on  $P$  és periòdica i  $B$  és constant.

Quan l'equació no és homogènia, és a dir, quan tenim

$$x' = A(t)x + f(t),$$

llavors també tenim una *fórmula de variació de paràmetres*, sobre la qual no insistirem:

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0) + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s) ds.$$

En el cas que  $A(t)$  sigui la matriu constant  $A$ , observem que  $X(t) = e^{At}$  és la solució fonamental principal per a  $t_0 = 0$ .

## 10.10 Equacions no lineals de segon ordre integrables

Considerem ara una equació de segon ordre de la forma

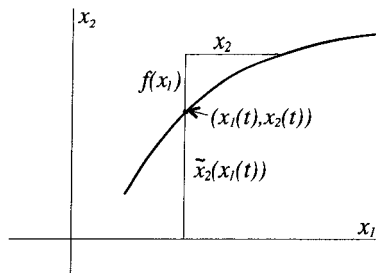
$$x'' = f(x),$$

on  $f$  sigui una funció amb derivada contínua.

Per tal de trobar-ne les solucions, el que fem és expressar-la com un sistema de dues equacions de primer ordre, tal com hem fet en el cas lineal. Si fem  $x = x_1$  i  $x' = x_2$ , queda

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = f(x_1). \end{cases}$$

Suposem que  $(x_1(t), x_2(t))$  és una solució d'aquest sistema. Aquesta solució, la podem concebre com una corba al pla parametritzada per  $t$ , que té per "velocitat" al punt  $(x_1, x_2)$ , el vector  $(x_2, f(x_1))$ . Suposem també que per a un cert interval de  $t$  podem reparametritzar la corba per  $x_1$  per comptes de  $t$  (el teorema de funció implícita ens garanteix que en un entorn de cada punt és parametritzable o bé per  $x_1$  o per  $x_2$ ). Diguem, doncs, que hem obtingut la funció  $\tilde{x}_2(x_1) = x_2(\tilde{t}(x_1))$ , on  $\tilde{t}$  és la funció que ens dóna  $t$  en funció de  $x_1$  al tram on la corba és projectable a l'eix  $x_1$ .



Sota aquestes condicions tenim per la regla de la cadena que

$$\frac{d\tilde{x}_2}{dx_1} = \frac{dx_2}{dt} \cdot \frac{d\tilde{t}}{dx_1} = f(x_1) \cdot \frac{1}{x_2}.$$

És a dir,

$$\frac{d\tilde{x}_2}{dx_1} = \frac{f(x_1)}{x_2}.$$

Per contra, si la corba solució fos projectable sobre  $x_2$ , hauríem obtingut

$$\frac{d\tilde{x}_1}{dx_2} = \frac{x_2}{f(x_1)}.$$

Formalment doncs, el que hem fet és dividir les dues equacions del sistema, simplificant  $dt$  de l'expressió

$$\frac{dx_1}{\frac{dx_2}{f(x_1)}} = \frac{x_2}{f(x_1)}.$$

Resulta ara que aquesta és una equació de primer ordre de variables separables, que es resol de la manera que hem exposat anteriorment:

$$\int_{\tilde{x}_2(x_1(0))=x_2(0)}^{\tilde{x}_2(x_1)} \xi_2 d\xi_2 = \int_{x_1(0)}^{x_1} f(\xi_1) d\xi_1.$$

O sigui

$$\frac{(\tilde{x}_2(x_1))^2}{2} - \frac{\tilde{x}_2(x_1(0))^2}{2} = \int_{x_1(0)}^{x_1} f,$$

o bé

$$\tilde{x}_2(x_1) = \sqrt{x_2(0)^2 + 2 \int_{x_1(0)}^{x_1} f}.$$

D'aquesta manera obtenim, no la *solució*, però sí l'*òrbita*, és a dir el conjunt de punts que són imatge de la solució, parametritzats per  $x_1$  (o per  $x_2$ , si comencem amb  $d\tilde{x}_1/dx_2$ ).

Per tal d'obtenir la solució en termes de  $t$ , el que hem de fer és substituir aquest valor de  $\tilde{x}_2(x_1)$  en la primera equació del sistema, de manera que queda

$$x_1' = \tilde{x}_2(x_1),$$

i integrant-lo

$$\int_{x_1(0)}^{x_1(t)} \frac{d\xi_1}{\tilde{x}_2(\xi_1)} = t.$$

Observem que la solució quedarà determinada de manera única si especifiquem  $x_1(0)$  i  $\tilde{x}_2(x_1(0))$ , és a dir,  $x_2(0)$ . Això és equivalent a donar els valors de  $x(0)$  i  $x'(0)$  en l'equació de segon ordre inicial.

### 10.10.1 Un exemple: el pèndol simple

De la física tenim que el moviment d'un pèndol simple sense fricció obeeix l'equació

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta =: -k \sin \theta,$$

on  $\theta$  és l'angle (en radians) que forma el fil del pèndol amb la vertical cap avall,  $g$  és l'acceleració de la gravetat i  $l$  és la longitud del fil.

Procedint com hem indicat a la secció anterior obtenim el sistema (posem  $x, y$  en comptes de  $x_1, x_2$  per estalviar-nos índexs)

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -k \sin x. \end{aligned}$$

L'òrbita de la solució  $\tilde{y}(x)$ , on sigui projectable sobre l'eix  $x$ , haurà d'oobeir

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = -\frac{k \sin x}{y},$$

i, per tant

$$\int_{y_0}^{\tilde{y}(x)} \eta d\eta = -k \int_{x_0}^x \sin \xi d\xi,$$

on hem posat

$$\begin{aligned}y(0) &= y_0, \\x(0) &= x_0,\end{aligned}$$

és a dir,

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = k(\cos x - \cos x_0).$$

D'aquí

$$y = \sqrt{y_0^2 + 2k(\cos x - \cos x_0)},$$

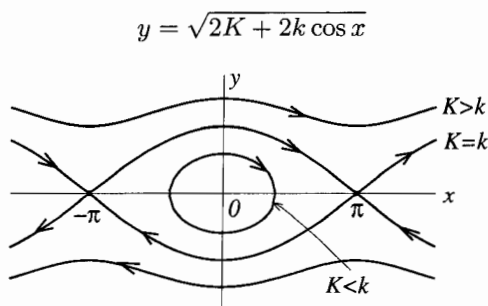
d'on podem obtenir les òrbites en el pla  $x, y$ .

És millor, però, escriure l'expressió anterior en la forma

$$F(x, y) = \frac{y^2}{2} - k \cos x = \frac{y_0^2}{2} - k \cos x_0 = F(x_0, y_0) =: K$$

que ens mostra que a l'òrbita determinada pels valors inicials  $x_0$  i  $y_0$ , la funció  $F$  és constant. És a dir, l'òrbita per a  $(x_0, y_0)$  és una corba de nivell de la funció  $F$ .

Trobar les corbes de nivell de  $F$  en el nostre cas no és gaire difícil (ho deixem com a exercici), i resulta en el diagrama (retrat) que es mostra en la figura



Els punts de coordenades  $(2p\pi, 0)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  corresponen a mínims de  $F$ , mentre que els  $((2p+1)\pi, 0)$ , corresponen a selles de  $F$ . Són els punts on s'anulla grad  $F(x, y) = (y, k \sin x)$ .

De moment tenim les òrbites no parametritzades per  $t$ . De fet, sense fer més càlculs, el més que podem fer és posar les fletxes que hem dibuixat, per mostrar com varia  $(x(t), y(t))$  quan  $t$  augmenta (ja que sabem que  $x' = y$ , i que per tant  $x$  és una funció creixent de  $x$  per a  $y$  positiu i decreixent per a  $y$  negatiu).

Al retrat obtingut, observem les òrbites corresponents a oscil·lacions d'amplitud (màxim angle) menor que  $\pi$ , que són periòdiques, i que corresponen a valors petits de  $K$ , perquè el radicand es torna negatiu per a valors grans de  $x$  quan  $K$  és petita. També s'observen les òrbites que tendeixen als punts

d'equilibri corresponents al pèndol en posició invertida, tant per  $t$  tendint a  $\infty$  com a  $-\infty$ .

Per a valors de  $K$  més gran, el pèndol dóna voltes en la mateixa direcció indefinidament.

### 10.10.2 El període d'oscil·lació del pèndol

*Galileu Galilei*, al segle XVII, va fer l'observació que les petites oscil·lacions són isòcrones, en el sentit que el període d'oscil·lació no depèn de l'amplitud. Tot i que era ben conscient que això només era cert aproximadament, *Huygens* va utilitzar el pèndol per a construir rellotges d'una precisió desconeguda fins aquell moment. És més, va inventar un rellotge amb pèndol "cicloidal" que sí que era isocrònic, almenys en teoria, però que per raons pràctiques resultà molt menys satisfactori.

A la secció anterior hem trobat les òrbites del pèndol. Per tal de tenir les solucions hem de tenir els valors de  $x$  i de  $y$  en funció de  $t$ .

Per a fer-ho substituïm el valor de  $y(x)$  trobat a la primera equació del sistema, i obtenim

$$x' = \sqrt{2(K + k \cos x)},$$

d'on

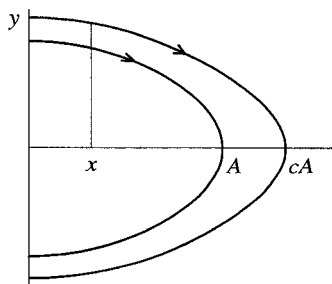
$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2(K + k \cos x)}} = t.$$

Resulta, però, que la integral obtinguda és del tipus el·líptic (vegeu el capítol 4) i no podem expressar-la en terme de les funcions elementals.

No queda altre remei per a calcular  $x(t)$  que avaluar aquesta integral numèricament.

Aquesta dificultat no treu, però, que puguem determinar analíticament si els períodes d'oscil·lació corresponents a dues amplituds diferents són iguals o no.

Per aconseguir-ho considerem les dues peces d'òrbites oscil·latòries de la figura, una amb amplitud  $A$  i l'altra amb amplitud  $cA$  amb  $c > 1$ .



Si per  $y_1(x)$  denotem l'òrbita d'amplitud  $A$  i per  $y_2(x)$  la d'amplitud  $cA$ , per  $T_1$  un quart del període d'oscil·lació de la primera, i per  $T_2$  el de la segona,

tenim

$$\frac{y_1^2(x)}{2} = + \int_x^A k \sin \xi \, d\xi,$$

ja que  $y_1(A) = 0$ , i per tant

$$T_1 = \int_0^A \frac{dx}{y_1(x)} = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{2 \int_x^A k \sin \xi \, d\xi}}.$$

Curiosament, resulta que l'èxit del procediment que utilitzarem per a calcular  $T_1$  i  $T_2$  rau precisament a no efectuar explícitament la integral sota el radical!

Per a l'òrbita d'amplitud  $cA$  tenim

$$\frac{y_2^2(x)}{2} = \int_x^{cA} k \sin \xi \, d\xi,$$

i per tant

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_0^{cA} \frac{dx}{y_2(x)} = \int_0^A \frac{c \, d\xi}{\sqrt{2 \int_{c\xi}^{cA} k \sin \eta \, d\eta}} \\ &= \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{2 \int_x^A \frac{k}{c} \sin c\xi \, d\xi}}. \end{aligned}$$

Una vegada hem reduït les integrals al mateix interval, només ens queda comparar els integrands, i resulta que  $c \sin \xi > \sin c\xi$  per a  $c > 1$  per un cert interval de  $\xi$ , perquè per a  $\xi = 0$  són iguals i les seves derivades compleixen  $c \cos \xi > c \cos c\xi$ , essent ambdós valors positius, a l'interval  $(0, \pi/2c)$ .

Per a aquests valors de  $A$  podem assegurar, doncs, que  $T_1 < T_2$ , és a dir que el període augmenta amb l'amplitud. Deixem com a exercici l'extensió de l'interval de validesa d'aquesta afirmació.

## 10.11 El sistema de Lotka-Volterra

Al principi del segle XX Lotka i Volterra van interessar-se pels models matemàtics de l'evolució de la població de dues espècies que interaccionen entre elles. Així, si  $x(t)$  representa la població en un temps donat  $t$  d'una espècie vivent, en un cert ambient, i  $y(t)$  la població d'una altra espècie que s'alimenta de la primera, es va proposar el següent sistema d'equacions diferencials de primer ordre per a descriure l'evolució d'aquestes poblacions

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha - \gamma y)x \\ y' &= (-m + \delta x)y, \end{aligned}$$

amb  $x(t), y(t) \geq 0$ ;  $\alpha, \gamma, m, \delta > 0$ .

Aquest sistema es pot tractar de la mateixa manera que el del pèndol simple acabat d'estudiar. Efectivament, podem escriure, dividint una equació per l'altra:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(\alpha - \gamma y)x}{(-m + \delta x)y},$$

i d'aquí

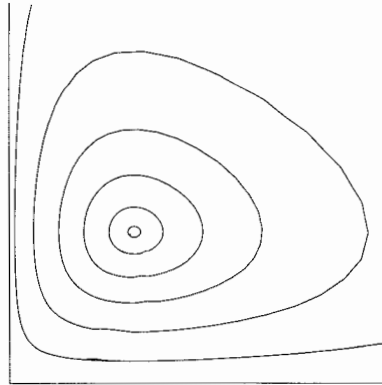
$$\int_{x_0}^x \frac{-m + \delta \xi}{\xi} d\xi = \int_{y_0}^y \frac{\alpha - \gamma \eta}{\eta} d\eta.$$

Integrant resulta que

$$\begin{aligned} F(x, y) &= -m \ln x + \delta x - \alpha \ln y + \gamma y \\ &= -m \ln x_0 + \delta x_0 - \alpha \ln y_0 + \gamma y_0 \end{aligned}$$

és una funció que té per corbes de nivell  $F(x, y) = K$  les òrbites del sistema d'equacions.

Observem que  $F$  té un mínim a  $x = m/\delta$ ,  $y = \alpha/\gamma$ , que és un punt d'equilibri del sistema, és a dir que  $x(t) = m/\delta$ ,  $y(t) = \alpha/\gamma$  per a tota  $t \in \mathbb{R}$  n'és una solució. A més,  $F$  tendeix a  $\infty$  quan tant  $x$  com  $y$  tendeixen a 0 o a  $\infty$ . De tot això, en resulta el següent retrat al primer quadrant



D'aquí se segueix l'oscil·lació de la població de sistemes de presa-predador que ha estat observada a certs ecosistemes.

## 10.12 Un sistema no integrable: presa-depredador

El problema de trobar les òrbites i les solucions d'un sistema de dues equacions no lineals de primer ordre canvia del tot quan el dividir una equació per l'altra, tal com ho hem fet a les seccions anteriors, no permet la separació de variables.



Podem prendre l'exemple anterior de presa i depredador, afegint un terme a la primera equació que tingui en compte la competència intraespecífica que es produeix quan la quantitat d'aliment de la presa és limitada, és a dir, de forma que si no hi hagués depredador l'equació seria la logística i no la de Malthus.

En aquest cas ens queda

$$\begin{aligned}x' &= (\alpha - \beta x - \gamma y)x = f(x, y), & \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \\y' &= (-m + \delta x)y = g(x, y), & x(t), y(t) > 0.\end{aligned}$$

En no poder integrar l'equació quocient

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(\alpha - \beta x - \gamma y)x}{(-m + \delta x)y},$$

ens quedem sense la funció  $F$ , les corbes de nivell de la qual ens proporcionaven les òrbites, i tot el mètode s'encalla: en no poder obtenir  $y$  en funció de  $x$ , o  $x$  en funció de  $y$ , no podem substituir i obtenir ni l'una ni l'altra en funció de  $t$ .

Els mètodes que s'utilitzen són, doncs, de dos tipus: o bé *numèrics*, obtenint les solucions utilitzant els mètodes de Runge-Kutta o Adams-Bashforth o d'altres, i en aquest cas obtenim taules que ens donen  $x(t)$ ,  $g(t)$  amb tanta aproximació com vulguem per als valors de  $t$  que desitgem, o bé *qualitatius*, i llavors no obtenim valors numèrics de  $x(t)$  i  $y(t)$ , sinó propietats *qualitatives* de les òrbites i solucions, és a dir, si són acotades, si són periòdiques, a què tendeixen, si són estables, etc.

Els dos mètodes són ben diferents i tenen camps d'aplicació prou distingits. Així, si el que volem és conèixer  $x(t)$  i  $y(t)$  amb certa precisió per a un determinat valor de  $t$ , haurem d'utilitzar mètodes numèrics (per exemple si es vol calcular l'òrbita d'un coet a la Lluna). En canvi, si volem saber com estan relacionades unes òrbites amb altres, és a dir, si volem el retrat, haurem d'emprar els mètodes qualitatius.

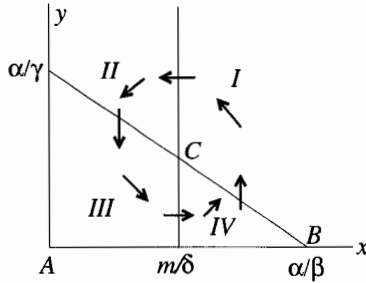
Les eines amb què comptem per a determinar el retrat d'un sistema no lineal al pla són les que desenvolupem a les següents subseccions:

### 10.12.1 Regions per al camp vectorial al pla

Determinem diferents regions del pla on les components del camp vectorial,  $f$  i  $g$ , tenen una propietat especial.

En el nostre cas observem que els punts d'equilibri són  $A = (0, 0)$ ,  $B = (\alpha/\beta, 0)$ , i  $C = (m/\delta, (\alpha - \beta m/\delta)/\gamma)$  (estem al primer quadrant, i suposem que  $\alpha\delta > \beta m$ ).

Per altra banda tenim que  $x'$  s'anul·larà tant si  $x = 0$  com si  $y = (\alpha - \beta x)/\gamma$ , i  $y'$  ho farà si  $y = 0$  i si  $x = m/\delta$ . Això ens dona *isoclines*.



Per a la resta, sabem que  $x = 0$  és una òrbita (correspon a  $y' = -my$ ), i que per a  $y = 0$  tenim l'equació logística  $x' = (\alpha - \beta x)x$ , que té les òrbites tendint a  $\alpha/\beta$  quan  $t \rightarrow \infty$ , tal com es mostra. Per altra banda a les regions I, II, III i IV el camp té les direccions que es mostren amb les fletxes, és a dir, a I  $x$  és decreixent, mentre que  $y$  és creixent, etc.

Una vegada fet això sabem que les solucions són corbes tangents al camp vectorial a tot punt, però sense més bagatge teòric és molt difícil que tan sols amb el dibuix que hem fet puguem deduir el retrat.

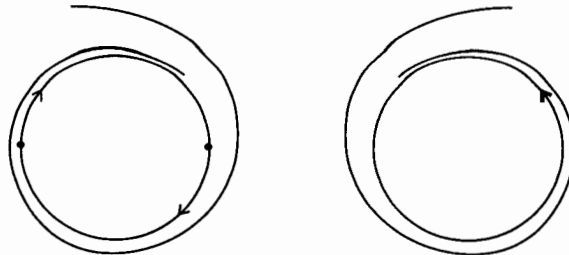
### 10.12.2 El teorema de Bendixson-Poincaré

La següent propietat és que si només hi ha un nombre finit de punts d'equilibri i tenim una òrbita positivament acotada (és a dir que  $P(x(t), y(t))$  roman a dins d'un disc quan  $t \rightarrow \infty$ ), llavors la solució tendeix o bé a un punt d'equilibri, o bé a un conjunt format per punts d'equilibri i òrbites connectant-los entre ells formant un conjunt connex, o bé a una òrbita tancada, és a dir a l'òrbita d'una solució periòdica (és a dir que  $\exists T$  tal que  $(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$ ) quan  $t \rightarrow \infty$ .

La qual cosa vol dir que  $(x(t), y(t))$  tendeixi a un punt d'equilibri  $(x^*, y^*)$ , diguem, és prou clar:  $x(t) \rightarrow x^*$  i  $y(t) \rightarrow y^*$  quan  $t \rightarrow \infty$ .

Que  $(x(t), y(t))$  tendeixi a un conjunt  $M$  vol dir que per a cada punt  $(x^*, y^*)$  del conjunt  $M$  hi ha una successió  $\{t_n\} \rightarrow \infty$  de manera que  $(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow (x^*, y^*)$ .

Així, podem imaginar les següents situacions



En el primer dibuix  $(x(t), y(t))$  tendeix a un conjunt format per punts crítics i òrbites que els connecten, al segon tendeix a una òrbita tancada (una òrbita tancada sempre té un punt d'equilibri a dins).

Aquest resultat (que també val *mutatis mutandis* per a  $t \rightarrow -\infty$  si la solució és acotada quan  $t \rightarrow -\infty$ ) és conegut com a *teorema de Bendixson-Poincaré*. I no és vàlid per a sistemes no plans, ja que es basa en el fet que una corba tancada divideix el pla en dues regions desconnectades. Utilitzant-lo en el nostre cas podem deduir que una solució que comença a la regió II passa a la regió III. Efectivament, la solució té  $y' < 0$ ,  $x' < 0$  mentre sigui a II, i no pot travessar l'eix de les  $y$  (per unicitat de solució per un punt les òrbites no es poden travessar!). Per tant, si no sortís de II cap a III seria acotada i hauria de tendir a  $C$  (no pot haver-hi ni òrbites tancades ni conjunts de punts d'equilibri amb òrbites interconnectant-los totalment continguts a II). Però no pot tendir a  $C$ , perquè per fer-ho hauria de tenir  $x' > 0$ , i això no passa a la regió II.

D'una manera semblant deduïm que una solució que comenci a III o bé passa a IV o bé tendeix a  $C$ . Aquí aquesta darrera possibilitat no es pot eliminar, ja que hi ha direccions que van a  $C$  amb  $x' > 0$ ,  $y' < 0$ , que és la condició a III.

Així mateix, una solució que comença a IV passa necessàriament a I.

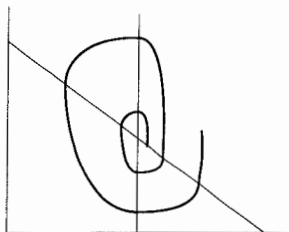
Ens queda considerar les solucions que comencen a I. Aquí ens trobem amb un petit problema per forçar les solucions a passar a II. Tot i així és de fàcil solució, perquè com que per a una tal solució,  $x'(t) < 0$ , mentre sigui a I, o bé passa a II, o bé en ser monòtona decreixent tendeix a un valor  $x^* \geq m/\delta$ . Si l'òrbita fos acotada això implicaria que hauria de tendir a un punt d'equilibri (tenim  $y' > 0$ ). Com que no n'hi ha cap, això implica que  $y(t) \rightarrow \infty$ , i per tant  $dy/dx \rightarrow -\infty$ , monòtonament. Però llavors tenim de les equacions que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-m + \delta x)y}{(\alpha - \beta x - \gamma y)x} \rightarrow \frac{-m + \delta x^*}{-\gamma x^*}$$

quan  $t \rightarrow \infty$ , que és finit. Contradicció.

Resulta, doncs, d'aplicar aquest criteri, que les solucions van voltant en sentit contrari a les busques del rellotge al voltant del punt d'equilibri  $C$ , amb la possibilitat de tendir cap a  $C$  directament des de les regions I i III o bé en espiral en anar voltant.

D'això no podem deduir encara que totes les òrbites són acotades: podem imaginar-nos una òrbita que tot donant voltes vagi descargolant-se



Aquesta possibilitat quedarà eliminada en utilitzar la següent poderosa eina matemàtica.

### 10.12.3 Retrat local a partir de la part lineal

Es tracta d'un teorema que ens diu com és el retrat d'un entorn d'un punt d'equilibri en base a la part lineal del camp en aquest punt.

La part lineal del camp vectorial  $(f(x, y), g(x, y))$  en un punt  $(x^*, y^*)$  on aquest s'anulla és la diferencial d'aquest camp al punt, és a dir el camp definit a  $(\xi, \eta)$  per

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} =: J(x^*, y^*) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

donat per l'aplicació a  $(\xi, \eta)$  de la matriu jacobiana de  $(f, g)$  avaluada a  $(x^*, y^*)$ .

Llavors el teorema ens diu que si els valors propis de la matriu  $A$  tenen tots dos part real diferent de 0, llavors el retrat d'un entorn del punt  $(x^*, y^*)$  per a l'equació original  $x' = f(x, y)$ ,  $y' = g(x, y)$ , és el mateix que el retrat de l'entorn del 0 per a l'equació lineal  $\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = J(x^*, y^*) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ .

Amb precisió, això vol dir que hi ha una aplicació contínua amb inversa contínua entre els dos entorns que porta òrbites en òrbites conservant l'orientació. Pels nostres propòsits n'hi ha prou amb dir que si tenim un nus, un focus (estables o inestables) o una sella al sistema lineal, llavors tenim el mateix respectivament al punt  $(x^*, y^*)$  pel sistema no lineal.

Apliquem-ho al sistema del nostre exemple.

Resulta que

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta x - \gamma y & -\gamma x \\ \delta y & -m + \delta x \end{pmatrix}.$$

D'on obtenim

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix},$$

que implica que el punt d'equilibri  $A = (0, 0)$  és una sella.

$$J\left(\frac{\alpha}{\beta}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\alpha & -\gamma\alpha/\beta \\ 0 & -m + \delta\alpha/\beta \end{pmatrix}.$$

Com que  $\alpha > 0$  i  $\delta\alpha/\beta > m$ , resulta que  $B = (\alpha/\beta, 0)$  és una sella.

Finalment

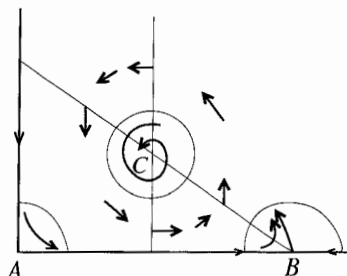
$$J\left(\frac{m}{\delta}, \frac{\alpha - \beta m/\delta}{\gamma}\right) = \begin{pmatrix} -\beta m/\delta & -\gamma m/\delta \\ \delta(\alpha - \beta m/\delta)/\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Els valors propis són les arrels de

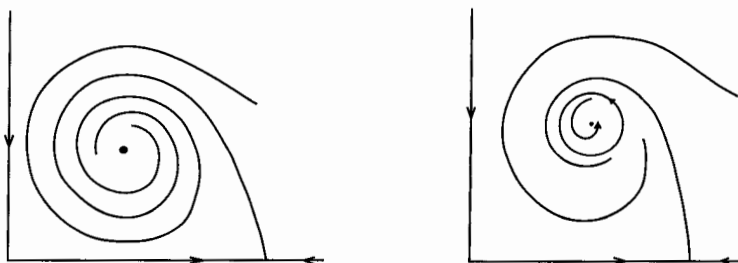
$$\lambda^2 - (\text{tr } J)\lambda + \det J = 0.$$

Com que  $\text{tr } J = -\beta m/\delta < 0$  i  $\det J = m(\alpha - \beta m/\delta) > 0$ , resulta que si  $(\text{tr } J)^2 - 4 \det J \geq 0$  tindrem un nus estable, mentre que si és  $< 0$  tenim un focus estable. En qualsevol dels dos casos tenim un *atractor* local, és a dir, les solucions que comencen prou a prop de  $C$  tendeixen a  $C$  quan  $t \rightarrow \infty$ .

D'aquestes consideracions resulta que del retrat ja en coneixem més elements:



Aquest coneixement ens permet ara assegurar que totes les solucions són acotades per a  $t \geq 0$ . Efectivament, la solució a l'entorn de  $B$  que tendeix a  $B$  quan  $t \rightarrow -\infty$  serveix de barrera perquè hi hagi solucions que es vagin descarregant sense cota. De fet, si seguim aquesta òrbita fent créixer  $t$ , aquesta s'ha de cargolar necessàriament cap a dins, i per tant només podrà tendir a  $C$  o bé a una òrbita tancada al voltant de  $C$ .



Totes les solucions que comencin amb  $x > 0$ ,  $y > 0$  estan, doncs, forçades per aquesta particular solució, a tendir a  $C$  o bé a una òrbita tancada al voltant de  $C$ .

#### 10.12.4 El retrat global. Ús de la divergència

Per a tenir el retrat complet només falta esbrinar l'existència o no d'aquestes òrbites periòdiques.

Un criteri que pot ser útil és el següent: si  $\text{div } X = f_x + g_y$  és negativa a tota una regió, no pot haver-hi òrbites tancades a aquesta regió. Efectivament, el teorema de la divergència, que estudiarem al capítol vinent, ens diu que si  $\Omega$  és una regió amb frontera de classe  $C^1$ , i  $X$  és un camp vectorial de classe  $C^1$  a  $\Omega$  amb tot i frontera, llavors  $\int_{\Omega} \text{div } X = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle$ , on  $\nu$  és la normal exterior

a la frontera de  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ . Sense entrar ara en el significat general d'això, notem que si tenim una òrbita tancada  $\gamma$ ,  $X$  és el camp  $(f, g)$  i  $\Omega$  és la regió del pla limitada per l'òrbita tancada, llavors  $\partial\Omega = \gamma$ , i  $\langle X, \nu \rangle = 0$  a  $\gamma$ , amb la qual cosa queda  $\int_{\Omega} \operatorname{div} X = 0$ .

Per tant, si  $\operatorname{div} X < 0$  en una regió, és clar que  $\int_{\Omega} \operatorname{div} X < 0$  a tota  $\Omega$  continguda a la regió, i aquesta no pot contenir òrbites tancades (similarmet si  $\operatorname{div} X > 0$ ).

Calculem  $\operatorname{div} X$  al nostre cas. És precisament  $\operatorname{tr} J = \alpha - m + (\delta - 2\beta)x - \gamma y$ .

Serà  $< 0$  a tot el primer quadrant si imposem la condició suplementària  $m > \alpha$  i  $2\beta > \delta$ , la qual cosa és compatible amb la condició que hem imposat abans perquè  $C$  estigui al primer quadrant.

Amb aquest criteri obtenim, doncs, que no hi haurà òrbites periòdiques i totes les solucions que comencin amb  $x > 0$ ,  $y > 0$  tendeixen a  $C$  quan  $t \rightarrow \infty$ , si  $\alpha\delta > \beta m$ ,  $m > \alpha$  i  $2\beta > \delta$ .

### 10.12.5 El retrat global. Ús de la funció de Liapunov

Tot i això, encara ens queda el dubte del que passa quan no es compleix aquesta condició suplementària.

Aquí introduïm la nostra darrera eina: una *funció de Liapunov*.

A la secció 11 teníem que la funció

$$F(x, y) = -m \ln x + \delta x - \alpha \ln y + \gamma y$$

romania constant al llarg de les òrbites del sistema de Lotka-Volterra (que correspon al nostre amb  $\beta = 0$ ).

Aquesta funció ateny el seu mínim al punt d'equilibri  $C$  amb  $\beta = 0$ , és a dir a  $(m/\delta, \alpha/\gamma)$ . La podem modificar de manera de tenir en compte que ara  $\beta$  és diferent de 0, i que el mínim ha de ser a  $C = (m/\delta, (\alpha - \beta m/\delta)/\gamma)$ . Això ho aconseguim prenent la funció

$$V(x, y) = -m \ln x + \delta x - \left(\alpha - \beta \frac{m}{\delta}\right) \ln y + \gamma y.$$

No costa gaire veure que, efectivament, aquesta funció té un mínim a  $C$ , i tendeix a  $\infty$  quan  $x, y$  tendeixen tant a  $\infty$  com a 0. És a dir, les seves corbes de nivell són com les del sistema de Lotka-Volterra, però amb el mínim col·locat al nou punt  $C$ .

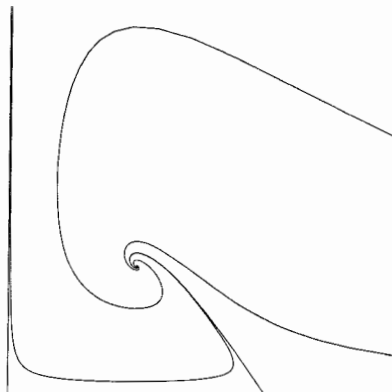
Observem ara que  $\tilde{V}(t) = V(x(t), y(t))$  decreix quan  $t$  creix, és a dir, calculem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' \\ &= \left(-\frac{m}{x} + \delta\right) (\alpha - \beta x - \gamma y)x \\ &+ \left(-\left(\alpha - \beta \frac{m}{\delta}\right) \frac{1}{y} + \gamma\right) (-m + \delta x)y \\ &= -\beta\delta \left(\frac{m}{\delta} - x\right)^2 < 0 \quad \text{si } x \neq \frac{m}{\delta}, \quad i = 0 \quad \text{si } x = \frac{m}{\delta}. \end{aligned}$$

Tenim, doncs, que  $V$  és decreixent al llarg de les trajectòries, encara que la derivada s'anulli quan  $x = m/\delta$ , ja que la solució només té un punt on  $\tilde{V}'(t) = 0$ .

Això elimina la possibilitat que hi hagi òrbites periòdiques. Per tant, la condició  $\alpha\delta > \beta m$  és suficient perquè totes les solucions amb condició inicial  $x > 0$ ,  $y > 0$  tendeixin a  $C$  quan  $t \rightarrow \infty$ .

A la figura següent il·lustrem algunes de les òrbites obtingudes amb ordinador per a  $\alpha = 2$ ,  $\beta = \gamma = m = \delta = 1$ .



## 10.13 El cas general. Existència i unicitat. Mètodes numèrics

Les equacions no lineals de segon ordre (incloent sota aquesta designació els sistemes de dues equacions de primer ordre) que hem considerat fins ara en aquest capítol són del tipus *autònom*, és a dir, reduïbles a la forma  $x' = f(x)$ , essent  $x = (x_1, x_2)$  i  $f = (f_1, f_2)$ , on  $f$  no depèn explícitament de  $t$ . Això ha permès associar-los un camp vectorial a  $\mathbb{R}^2$ , i les corresponents corbes integrals o òrbites, és a dir, un *retrat*. Quan  $f$  depèn explícitament de  $t$  i ens queda un sistema de la forma  $x' = f(t, x)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $f = (f_1, f_2)$ , el camp vectorial associat depèn de  $t$ , la qual cosa ja no permet parlar d'òrbites a  $\mathbb{R}^2$ .

Si de cas el que podem fer és afegir  $t$  com una coordenada més, i escriure un sistema de 3 equacions diferencials de primer ordre

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ t' = 1, \end{cases}$$

on ara suposem  $x$  i  $t$  com a funció d'una variable  $s$ . Prenent  $s(t_0) = 0$ , obtenim  $t = s + t_0$  de la darrera equació. És a dir,  $s$  és  $t$  incrementat en  $t_0$ , i si  $s$  s'anulla,  $t$  val  $t_0$ .

Podem llavors concebre l'equació com un camp vectorial a  $\mathbb{R}^3$ , amb les seves corresponents corbes integrals. Notem, però, que ara no pot haver-hi

punts d'equilibri, és a dir, no hi ha solucions constants, puix que  $t'$  no és zero mai.

Per a aquestes equacions més generals podem assegurar l'existència i unicitat en algun interval de solucions que compleixin una condició inicial  $x(t_0) = x_0$ . La demostració d'aquest fet és exactament la mateixa que hem presentat al capítol anterior per equacions de primer ordre, *mutatis mutandis*. De fet, l'únic que cal canviar és que cada vegada que escrivim  $|x|$  o  $|f|$  no ens referim al valor absolut d'un número real, sinó que denotem la *longitud* o *norma euclidiana* dels vectors  $x$  o  $f$  respectivament, és a dir,  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

Pel que fa als mètodes numèrics, la situació és anàloga: les fórmules són exactament les mateixes i només hem de tenir en compte que es tracta de vectors i no de números cada vegada que apareix  $x$  o  $f$ .

Certament, això que acabem de dir per a equacions de segon ordre i sistemes de dues equacions de primer ordre és vàlid per a equacions o sistemes d'ordre  $n$ , per qualsevol valor de  $n$  a  $\mathbb{N}$ .



## Exercicis i problemes

1. Trobeu les solucions de

$$x'' + x = t \cos t.$$

2. Considereu un sistema de dos dipòsits amb salmorra, que inicialment contenen volums  $V_1$  i  $V_2$  amb concentracions de sal  $c_1$  i  $c_2$  respectivament. Al primer tanc hi entra un flux  $\phi$  d'aigua pura. Aquest mateix flux passa del primer tanc al segon i del segon a fora del sistema. Quina és la concentració al segon tanc en funció del temps? (Suposem que a cada tanc la sal es reparteix uniformement d'una manera instantània).

3. Suposem un circuit elèctric amb una inductància  $L$ , un condensador de capacitat  $C$ , una resistència  $R$  i una força electromotriu  $e$  situades en sèrie al voltant d'una baga. Si  $q$  és la càrrega elèctrica al condensador, l'equació que satisfà és  $Lq'' + Rq' + q/C = e$ . El corrent que circula és  $i = q'$ . Suposant un corrent  $i(0) = i_0$  i  $q(0) = 0$ , digueu quant val  $i(t)$  si  $e = 0$  i si  $e = e_0 \sin \omega t$ .

Podeu donar un exemple de ressonància en el cas que  $R = 0$ ?

4. Dos circuits elèctrics acoblats amb inducció mútua satisfan el sistema d'equacions

$$\begin{cases} e_1 = L_1 i_1' + M i_2' \\ e_2 = L_2 i_2' + M i_1' \end{cases}, \quad M^2 < L_1 L_2.$$

Suposant  $e_1$  i  $e_2$  sinoidals amb la mateixa freqüència, trobeu  $i_1$  i  $i_2$  en funció del temps.

5. *El pèndol de Foucault*

Tenint en compte les forces de Coriolis produïdes per la rotació de la Terra, les equacions per a les petites oscil·lacions d'un pèndol són donades per les solucions de

$$\begin{aligned} x'' &= -\omega^2 x + 2y'\Omega_\varphi \\ y'' &= -\omega^2 y - 2x'\Omega_\varphi \end{aligned}$$

on  $\omega^2 = g/l$ ,  $x$ ,  $y$  són les coordenades nord, est, de la posició del pèndol respecte al peu de la vertical del punt de subjecció, i  $\Omega_\varphi = |\Omega| \sin \varphi$ , essent  $\Omega$  la velocitat angular de rotació de la Terra i  $\varphi$  la latitud geogràfica del punt  $(0, 0)$ .

Suposant que  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , mostreu en quin sentit es pot interpretar que el pla d'oscil·lació del pèndol gira amb una velocitat angular  $\Omega_\varphi$ .

Sugerim trobar la solució i utilitzant que  $\Omega_\varphi$  és molt més petita que  $\omega$ , veure que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega_\varphi t & \sin \Omega_\varphi t \\ -\sin \Omega_\varphi t & \cos \Omega_\varphi t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

s'hi aproxima molt.

6. Les equacions del moviment del centre de gravetat d'un disc giratori muntat sobre un eix elàstic suportat als seus extrems són

$$\begin{aligned} x'' + \omega^2 x &= e\omega^2 \cos \varphi \\ y'' + \omega^2 y &= e\omega^2 \sin \varphi \\ I\varphi'' &= M + em\omega^2(y \cos \varphi - x \sin \varphi). \end{aligned}$$

Si la rotació és uniforme llavors  $\varphi = \omega_0 t$  i les dues primeres equacions queden desacoblades:

$$\begin{aligned} x'' + \omega^2 x &= e\omega^2 \cos \omega_0 t \\ y'' + \omega^2 y &= e\omega^2 \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

En el cas que  $\omega_0$ , la freqüència de rotació, i  $\omega$  la freqüència natural del sistema són iguals, sabem que  $x(t)$  i  $y(t)$  no són acotades (hi ha ressonància). Mostreu que si volem mantenir constant aquesta velocitat, llavors  $M'$ , la derivada respecte del temps del parell motor, ha de tenir un valor proper a  $e^2 m \omega^3 / 2$ . Per a superar aquesta velocitat crítica abans que  $x(t)$ ,  $y(t)$  siguin massa grans cal, doncs, fer  $M'$  més gran que aquest valor.

7. Considereu l'equació de Bessel per a funcions d'ordre 0,  $x'' + \frac{1}{t}x' + x = 0$ .

Per a trobar-ne la solució que satisfà  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ , considereu la sèrie de potències  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  i calculeu-ne els coeficients recursivament fent que satisfaci formalment l'equació. Comproveu que és una funció entera, i que, per tant, defineix una funció que satisfà l'equació amb les condicions inicials donades. Aquesta funció és designada *funció de Bessel de primera classe d'ordre 0* i es denota per  $J_0$ . No és la primitiva de cap funció expressable en termes de funcions elementals.

8. Una molla "fluixa" és aquella per la qual  $x'' = -a(x)x$ , amb  $a(x)$  decreixent, mentre que per a una molla "dura" tenim  $a(x)$  creixent. Feu el retrat en ambdós casos, i digueu si el període d'oscil·lació creix o decreix amb l'amplitud, si aquesta és petita.

9. Huygens, el 1673, publicà la demostració que les oscil·lacions d'una partícula que es mou sota l'efecte de la gravetat sobre una cicloide (vegeu l'apèndix del capítol 4) invertida tenen una freqüència independent de l'amplitud. Si  $y = \phi(x)$  és tal que la component tangencial de la força és proporcional a la longitud  $s$  de la gràfica de  $\phi$  a partir del seu punt més baix, tindrem que les oscil·lacions tenen període independent de l'amplitud. Demostreu que sota aquestes condicions la gràfica de  $\phi$  és una cicloide.
10. Volem aturar un vehicle de massa fixada que va a una velocitat determinada en una distància també fixada. Suposant que l'acceleració màxima de frenada és limitada, quina tàctica hem de seguir per frenar en el mínim temps? Suposant que poguéssim accelerar abans de frenar, ens convindria fer-ho per a escurçar el temps?
- Suposem ara que volem frenar en un temps fixat, de manera que el desgast dels frens, que és proporcional al quadrat de la força de frenatge, sigui mínim. Quina seria la tàctica?
11. Doneu l'equació diferencial que modeli el moviment d'una partícula de massa  $m$  que, sotmesa a l'efecte de la gravetat, es mou sobre un cercle de radi  $R$  que gira amb velocitat angular  $\omega$  respecte d'un diàmetre vertical. Considereu tant el cas en què la partícula es mou sense fricció sobre el cercle, com el cas en què hi ha una fricció proporcional a la velocitat.
12. Considereu el sistema de dues equacions diferencials  $x' = f(x)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f \in C^1$ , i el sistema lineal associat  $y' = Df(0)y$ . Si els valors propis de  $Df(0)$  són  $\pm i\omega$ , demostreu que la velocitat angular de les solucions del primer sistema tendeix a la de les solucions del segon quan  $|x| \rightarrow 0$ .
13. Considereu l'equació  $x'' = f(x)$ , amb  $f(x) = -(x+1)x$ . Feu-ne el retrat al pla  $(x, y)$  prenent  $y = x'$ .
- Estudieu el problema de trobar solucions  $x$  que compleixin  $x(0) = 0$ ,  $x(\alpha) = 1$  per a diferents valors de  $\alpha$ .
14. Feu el retrat de l'equació

$$x'' = F(x) - kx',$$

on  $F = -dU/dx$ ,  $U$  un polinomi de 4<sup>t</sup> grau al pla  $(x, E = (x')^2/2 + U(x))$ . Al problema de Kepler en dimensió 1, es tracta de l'atracció d'una partícula a l'origen amb  $U = -\frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}$  (i  $k = 0$ ). Dibuixeu-ne el retrat al pla  $(x, x')$ .

15. Dibueixeu el retrat de

$$\begin{aligned}x' &= -\rho xy - \sigma x \\y' &= \rho xy - \tau u,\end{aligned}$$

que representa un model epidemiològic en què  $x$  és la població infectiva,  $y$  la susceptible i  $\sigma$  és el coeficient de vacunació. Feu-ho per a  $\sigma = 0$  i per a  $\sigma > 0$ .

16. Diem que el sistema  $x' = f(x, y)$ ,  $y' = g(x, y)$  és *conservatiu* si existeix una funció  $\phi(x, y)$  que s'anomena *integral primera* que es manté constant al llarg de les òrbites del sistema. També diem que el sistema és *hamiltonià* si existeix una funció  $H(x, y)$  tal que  $f = H_y$  i  $g = -H_x$ . Demostreu que un sistema hamiltonià és conservatiu i que si un sistema és conservatiu, existeix una funció  $\psi(x, y)$  de manera que el sistema  $x' = \psi f$ ,  $y' = \psi g$  és hamiltonià. La funció  $\psi$  és anomenada *factor d'integració*. Si el sistema és hamiltonià, l'equació diferencial  $dy/dx = -H_x/H_y$  s'anomena *exacta*.

Digueu sota quines condicions el factor d'integració depèn només de  $x$  o de  $y$ , i, en aquests casos digueu com trobar-lo.

17. El
- regulador de velocitat de Watt*
- per a màquines de vapor té per model matemàtic:

$$\begin{aligned}\theta' &= \varphi \\ \varphi' &= \alpha^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta - \frac{b}{m} \varphi \\ \omega' &= \frac{k}{I} \cos \theta - \frac{F}{I}.\end{aligned}$$

Una solució constant és  $\theta = \theta_0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\omega = \omega_0$  (calculeu-la). Determineu-ne l'estabilitat.

18. Considereu l'equació

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0,$$

coneguda com a *equació de Van der Pol*, que modela el comportament d'un circuit electrònic oscil·lant. Escrivint-lo en la forma

$$\begin{aligned}x' &= y - \mu F(x) \\ y' &= -x,\end{aligned}$$

amb  $F = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)$ , mostreu, calculant els valors propis de la part lineal a l'origen, i veient que a la regió limitada per  $\{x = x^*, 0 \leq y \leq F(x^*)\}$ ,  $\{y = F(x^*), 0 \leq x \leq x^*\}$ ,  $\{y = F(x^*)(x - x^*)/x^*, 0 \leq x \leq x^*\}$ , per a  $x^*$  prou gran, i per les rectes simètriques respecte de 0, per a  $x \leq 0$ , totes

les òrbites que atenyen la vora hi entren, que hi ha almenys una òrbita periòdica al voltant de 0.

Ja com a empresa prou difícil, mostreu que aquesta òrbita periòdica és tal que totes les òrbites excepte la idènticament  $(0, 0)$  hi tendeixen quan  $t \rightarrow \infty$ .

19. En els models d'interacció entre dues espècies amb un substrat alimentari comú, expressats pel sistema

$$\begin{aligned}x' &= \alpha(x, y)x \\y' &= \beta(x, y)y, \quad x, y \geq 0\end{aligned}$$

doneu condicions sobre  $\alpha$  i  $\beta$  per tal que puguin coexistir estacionàriament ambdues espècies. I quina condició s'ha de complir perquè aquesta solució estacionària de coexistència sigui asimptòticament estable?

20. Considereu el sistema presa-depredador modelat pel sistema d'equacions

$$\begin{aligned}x' &= \alpha(x)x - \gamma(x, y) \\y' &= \beta(x, y)y \quad \text{per a } x, y \geq 0,\end{aligned}$$

on  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  compleixen

- (a)  $\alpha(0) > 0$ ,  $\alpha' < 0$ ,  $\alpha(x_0) = 0$  per a alguna  $x_0 > 0$ .  
 (b)  $\gamma(0, y) = \gamma(y, 0) = 0$ ,  $\gamma_x > 0$ ,  $\gamma_y > 0$  i  $\gamma(x, y) \rightarrow \infty$  quan  $y \rightarrow \infty$ .  
 (c)  $\beta(0, y) = -M$  amb  $M > 0$ ,  $\beta_x > 0$  i  $\beta(x, y) \rightarrow \beta_0 > 0$  quan  $x \rightarrow \infty$  amb  $y$  fixada. A més demanem que  $\beta_y \leq 0$  i que  $\beta(x, y) \rightarrow -M$  quan  $y \rightarrow \infty$ .

Farem la hipòtesi addicional que les corbes on  $x' = 0$  i  $y' = 0$  es tallen en un sol punt, amb  $x > 0$ ,  $y > 0$ , que correspondrà a un equilibri de coexistència.

Estudieu les possibilitats per al retrat del sistema.

## Apèndixs

### 1. Les equacions lineals amb coeficients constants d'ordre més gran que dos

Tal com hem reduït una equació d'ordre dos, quan podem expressar la derivada de segon ordre en termes de la funció i de la seva primera derivada, a un sistema de dues equacions de primer ordre, també podem reduir una equació en què tenim la derivada d'ordre  $n$ , a un sistema de  $n$  equacions de primer ordre

Efectivament, si per a cada  $t$  s'ha de complir

$$x^{(n)} = a_1x + a_2x' + \dots + a_nx^{(n-1)},$$

podem posar  $x = x_1$ ,  $x' = x_2$ ,  $\dots$ ,  $x^{(n-1)} = x_n$ , i ens queda el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = a_1x_1 + \dots + a_nx_n. \end{cases}$$

Certament si  $x$  és solució de la 1a equació, llavors  $x_1 = x$ ,  $x_2 = x'$ ,  $\dots$ ,  $x_n = x^{(n-1)}$  ho és del sistema i viceversa.

Aquest sistema és un cas particular de

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

que es pot escriure abreujadament com

$$x' = Ax,$$

on per  $x$  entenem un  $n$  vector, que escrivim com una matriu d'una sola

columna  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , i  $A$  és una matriu de  $n \times n$  de números reals

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ , i  $Ax$  és el producte matricial de  $A$  per  $x$ . Enten-

nem que  $x'$  és el vector que té per components les derivades de les components de  $x$ .

La teoria desenvolupada a les seccions anteriors per a sistemes de dues equacions es pot generalitzar al cas present.

En particular les solucions vénen donades per  $x'(t) = e^{At}x(0)$ , on

$$e^{At} = I + A + \frac{A^2 t^2}{2} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots$$

és una sèrie de matrius convergent per a tota  $t \in \mathbb{R}$ .

Per a justificar que aquesta és la solució podem utilitzar aproximacions successives.

Començant amb  $X_0(t) = I$ , fem  $X_n(t) = I + \int_0^t AX_{n-1} ds$ .

El procés ens dona

$$X_n(t) = I + \int_0^t \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k A^{k+1}}{k!} \right) ds = \sum_{k=0}^n \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Aquesta sèrie convergeix uniformement sobre tots els intervals acotats. Per tant, la matriu límit  $X(t)$  compleix  $X(t) = I + \int_0^t AX(s) ds$ , que és la condició necessària i suficient perquè la columna  $j$ -èsima de  $X(t)$  sigui la solució de l'equació que val  $e_j$  per a  $t = 0$ .

Tal com hem fet amb els sistemes d'ordre 2, la manera més convenient de trobar la solució en un cas determinat, és escriure la matriu  $A$  en forma canònica de Jordan. És a dir, mitjançant un canvi lineal de variables del tipus  $x = Py$ , on  $P$  és una matriu no singular, obtenim un nou sistema d'equacions diferencials per al  $n$ -vector  $y$  de funcions:

$$Py' = APy,$$

o, equivalentment

$$y' = P^{-1}APy.$$

Un teorema d'àlgebra ens diu que existeix una matriu  $P$  que fa que  $P^{-1}AP =: B$  sigui de la forma  $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_k)$ , és a dir  $B$  té les matrius  $B_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , de dimensió  $d_j \times d_j$  a la diagonal i zeros a tota la resta:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_k \end{pmatrix}.$$

Les matrius  $B_j$  depenen de la matriu  $A$ , i en particular dels seus valors propis.

Recordem de l'àlgebra lineal que els valors propis de  $A$  són els números  $\lambda$  que fan que  $Ax = \lambda x$  per a algun vector  $x$  amb alguna component diferent de zero.

Això és equivalent a dir que  $\det(A - \lambda I) = 0$ . El determinant de  $A - \lambda I$  és conegut com a *polinomi característic* de  $A$ , i les seves arrels els *valors propis* de

A. Un vector  $x$  diferent de 0, per al qual  $Ax = \lambda x$  s'anomena un *vector propi* de  $A$ . El polinomi característic serà de la forma

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Així es pot expressar com un producte de polinomis de primer i segon grau, amb coeficients reals:

$$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_\beta)^{m_\beta} (\lambda^2 + a_1 \lambda + b_1)^{n_1} \dots (\lambda^2 + a_q \lambda + b_q)^{n_q},$$

on suposem que els factors de segon grau no tenen arrels reals. De fet suposem que els zeros de  $\lambda^2 + a_j \lambda + b_j$ , que han de ser complexos conjugats, són  $\alpha_j + i\beta_j$  i  $\alpha_j - i\beta_j$ , i són els valors propis no reals de la matriu  $A$ .

A cada valor propi real li corresponen un o més vectors propis linealment independents. A cada vector linealment independent li correspon la matriu  $B_k$  de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

La suma de totes les dimensions de les matrius corresponents a  $\lambda_j$  és  $m_j$ , la multiplicitat de  $\lambda_j$ .

Pel que fa als valors propis complexos, els corresponen vectors propis complexos, i segons el nombre d'aquests que siguin linealment independents, els associarem, junt amb els seus conjugats, matrius reals de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_j & 1 & 0 & -\beta_j & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & & \ddots \\ 0 & & & \alpha_j & 0 & -\beta_j \\ \beta_j & & & 0 & \alpha_j & 1 & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & \ddots & & & \ddots & 1 \\ 0 & & \beta_j & 0 & & & \alpha_j \end{pmatrix}.$$

La suma de les dimensions d'aquestes matrius corresponents a les arrels  $\alpha_j + i\beta_j$  i  $\alpha_j - i\beta_j$  és  $2n_j$ , és a dir, el doble de la multiplicitat de cada una d'elles.

La manera de trobar  $P$  a partir d' $A$  no és senzill en general: hem de resoldre el sistema d'equacions

$$PB = AP,$$



és a dir, calcular els valors i vectors propis. En dimensions altes, això pot ser força complicat.

Si tenim l'equació en forma canònica  $y' = By$ , es tracta ara de calcular  $e^{Bt}$ . D'aquí recuperem  $e^{At}$ , ja que

$$P^{-1}A^kP = P^{-1}APP^{-1}AP \dots P^{-1}AP = B^k,$$

i substituint això a cada terme de la sèrie que defineix l'exponencial obtenim

$$P^{-1}e^{At}P = e^{Bt}.$$

Observem que

$$\begin{aligned} Ae^{At} &= e^{At}A, \text{ i si } A \text{ i } B \text{ són tals que } AB = BA, \\ e^Ae^B &= e^{A+B}. \end{aligned}$$

Ara bé,  $e^{Bt} = \text{diag}(e^{Bt}, \dots, e^{B_k t})$ , i com en el cas de  $\lambda_j$  real tenim  $B_j = \lambda_j I_j + K_j$ , on  $I_j$  és la matriu identitat de  $d_j \times d_j$ , mentre que

$$K_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

també de  $d_j \times d_j$ , resulta  $e^{\lambda_j I_j t} = e^{\lambda_j t} I_j$ ,

$$e^{K_j t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{d_j-1}}{(d_j-1)!} \\ & & \ddots & \\ & & & t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ i } e^{B_j t} = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{d_j-1}}{(d_j-1)!} \\ & & \ddots & \\ & & & t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

En el cas de  $\lambda_j$  complex, la situació és una mica més enredada.

Per obtenir la fórmula comencem amb la forma complexa, associant els blocs de Jordan

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ i } \bar{C} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & 0 \\ & & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & \bar{\lambda} \end{pmatrix},$$

amb  $\lambda = \alpha + i\beta$ .

Tenim que

$$\frac{1}{2}(C + \bar{C}) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix} \text{ i}$$

$$\frac{i}{2}(C - \bar{C}) = i \begin{pmatrix} i\beta & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta \end{pmatrix}$$

Ara volem passar de

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{Ct} & 0 \\ 0 & e^{\bar{C}t} \end{pmatrix} \text{ a } e^{Bt},$$

amb  $B$  real, mitjançant un canvi  $Q$

$$Q^{-1}e^{Dt}Q = e^{Q^{-1}DQ} = e^{Bt}$$

Prenent

$$Q = \begin{pmatrix} I & iI \\ iI & I \end{pmatrix},$$

resulta

$$Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -iI \\ -iI & I \end{pmatrix},$$

$$Q^{-1}DQ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} C + \bar{C} & i(C - \bar{C}) \\ -i(C - \bar{C}) & C + \bar{C} \end{pmatrix},$$

i

$$Q^{-1}e^{Dt}Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{Ct} + e^{\bar{C}t} & i(e^{Ct} - e^{\bar{C}t}) \\ -i(e^{Ct} - e^{\bar{C}t}) & e^{Ct} + e^{\bar{C}t} \end{pmatrix},$$

que és la forma desitjada.

Tenim ara que

$$e^{Ct} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

i per tant

$$e^{Bt} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cos \beta t & -\sin \beta t & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \sin \beta t \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cos \beta t & 0 & & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \sin \beta t & \cos \beta t & \dots & -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cos \beta t \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \sin \beta t & 0 & & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Déu n'hi do!

Això justifica la forma utilitzada a la secció 5.

Si tenim una sola equació d'ordre  $n$ ,

$$x^{(n)} + a_n x^{(n-1)} + \dots + a_1 x = 0,$$

tenim el sistema equivalent, prenent  $x = x_1, x' = x_2, x'' = x_3, \dots, x^{(n-1)} = x_n$ :

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x_n \\ x'_n &= -(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n). \end{aligned}$$

En aquest cas, cada valor propi només té un vector propi linealment independent (sigui real o complex). Per tant en la forma canònica de Jordan de la matriu  $A$  del sistema només hi ha un bloc de Jordan  $B$  per a cada valor propi.

Efectivament, si  $p = (p_1, \dots, p_n)$  és un vector propi corresponent al valor propi  $\lambda$ , tenim

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

de la qual cosa anem deduint:

$$p_2 = \lambda p_1, \quad p_3 = \lambda p_2, \dots, p_n = \lambda p_{n-1},$$

$-a_1 p_1 \dots - a_n p_n = \lambda p_n$ . Resulta, doncs, que el vector propi és necessàriament de la forma  $p_1(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1})$ . La darrera equació és la característica.

## 2. Criteris d'estabilitat dels sistemes lineals autònoms

D'acord amb el que acabem de veure, totes les solucions d'una equació del tipus  $x' = Ax$  tendeixen exponencialment a zero quan  $t$  tendeix a  $\infty$  (és a dir  $|x(t)| < Me^{-at}$ , per a algunes  $M$  i  $a$  positives), si les solucions de l'equació característica  $\det(A - \lambda I) = 0$  tenen totes part real negativa. Així mateix, tal com hem dit en tractar els darrers exemples, si  $x(t) = x^*$  és una solució constant de  $x' = f(x)$ , amb  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , llavors la part lineal de l'equació a  $x = x^*$ , és a dir, l'equació  $y' = Df(x^*)y$  (coneguda també com a *equació de primera variació*) pot determinar el comportament asimptòtic de les solucions properes a  $x^*$ : si  $\det(A - \lambda I) = 0$ , amb  $A = Df(x^*)$ , té totes les arrels amb part real negativa, aquestes solucions tendeixen exponencialment a  $x^*$  quan  $t \rightarrow \infty$ . Tot el que acabem de dir roman cert si canviem part real negativa per positiva i  $t \rightarrow \infty$  per  $t \rightarrow -\infty$ .

Resulta, doncs, interessant saber quan les arrels del *polinomi característic*  $\det(A - \lambda I)$ , que és de grau  $n$ , tenen part real positiva o negativa. Hi ha uns quants criteris per saber-ho, tots ells més o menys complets. Per tal que el lector tingui una eina pràctica donem sense demostració el criteri de *Routh-Hurwitz*:

Suposem l'equació polinomial

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad \text{amb } a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n.$$

Per tal de determinar el signe de la part real de les seves arrels, escrivim la següent taula, obtinguda recursivament d'acord amb les fórmules que donem al seu final.

$\lambda^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	$\dots$
$\lambda^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$\dots$
$\lambda^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$\dots$
$\lambda^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$\dots$
			$\vdots$		
$\lambda^2$	$e_1$	$e_2$			
$\lambda^1$	$f_1$				
$\lambda^0$	$g_1$				

on

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \dots,$$

i així successivament, de manera que cada element de la taula per sota de les dues primeres files s'obté a partir del determinant de la matriu que té per primera columna els primers elements de les dues files de sobre l'element que cerquem i per segona columna els elements d'aquestes mateixes dues files corresponents a la columna següent a aquest element buscat. Aquest determinant canviat de signe i dividit pel primer element de la fila que està sobre de l'element que estem calculant, ens dona aquest element.

Una vegada obtinguda la taula tenim que el nombre de canvis de signe de la primera columna dona el nombre d'arrels amb part real positiva. A més, si tots els números de la primera columna són del mateix signe, llavors totes les arrels tenen part real negativa. Apareixen arrels imaginàries si a la primera columna hi ha un 0 entre dos números del mateix signe. (Una demostració d'aquest criteri es troba al llibre de Hahn).

### 3. La fórmula de Liouville

Considerem l'equació lineal, no necessàriament autònoma,

$$x' = A(t)x, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Sabem que la solució fonamental  $X(t)$  és una matriu que té per columnes  $n$  solucions linealment independents a partir de les quals obtenim totes les solucions per combinació lineal. En el cas que  $A$  és constant, tenim que una solució fonamental és  $e^{At}$ . De fet és la solució fonamental principal, puix val  $I$  per  $t = 0$ . Si  $A$  no és constant la relació entre  $A$  i  $X$  no és gens senzilla i, en general, no es pot donar explícitament. La fórmula de Liouville dona una relació que, tot i ser molt parcial, ajuda en alguns casos a determinar el comportament asimptòtic de les òrbites. Aquesta fórmula és

$$\det X(t) = \det X(t_0) e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A},$$

on  $\operatorname{tr} A$ , la traça de  $A$ , denota  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ .

Per demostrar aquesta fórmula veurem que  $x(t) := \det X(t)$  és solució de

$$x' = (\operatorname{tr} A(t))x,$$

d'on el resultat se segueix directament per integració.

Si derivem el determinant com a funció alternada de les columnes, obtenim

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{j=1}^n \det(x_1 \dots x'_j \dots x_n) \\ &= \sum_{j=1}^n \det(x_1 \dots Ax_j \dots x_n), \end{aligned}$$

on els vectors entre parèntesis representen les columnes de matrius de  $n \times n$ .

Ara, com que les  $x_j(t)$  formen una base de  $\mathbb{R}^n$  per a cada  $t$ , resulta que existeixen números  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$  tals que

$$Ax_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)x_j(t),$$

de la qual cosa resulta

$$x'(t) = \sum_{i=1}^n \det \left( x_1 \dots \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \dots x_n \right).$$

Com que el valor de la traça és invariant amb el canvi de base, resulta que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ii},$$

i com que només quan  $i = j$  resulta que el sumand de la  $i$ -èsima columna és independent de les altres columnes, i que, per tant, només el determinant corresponent és diferent de 0, queda

$$x'(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \det(x_1 \dots x_n) = (\operatorname{tr} A(t))x(t),$$

tal com volíem provar.

#### 4. Transformació de Laplace

Un auxiliar que fan servir força els enginyers per a resoldre equacions lineals senzilles, sobretot quan el terme no homogeni inclou funcions no contínues i fins i tot termes impulsius, que no corresponen a funcions, sinó a les anomenades distribucions, és la *transformació de Laplace*.

Aquí no farem una anàlisi d'aquesta transformació, que correspon al territori de les funcions de variable complexa, i ens limitarem a mostrar molt esquemàticament en què consisteix la seva utilització.

Donada una funció  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definim la funció  $\mathcal{L}(x)$ , anomenada *transformada de Laplace* de  $x$ , mitjançant

$$\mathcal{L}(x)(s) =: X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt,$$

amb  $s$  complexa, és a dir  $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Per tal que la integral impròpia convergeixi cal que  $x$  no creixi massa de pressa quan  $t$  creix. De fet, si  $|x(t)| \leq Me^{ct}$ , amb  $M > 0$ , resulta que  $\mathcal{L}(x)$  està definida per a  $\operatorname{Re} s > c$ .

Com que si  $s = a + bi$  tenim

$$e^{-st} = e^{-at} e^{-ibt},$$

i per tant  $|e^{-st}| = |e^{-at}|$ , resulta que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^A e^{-st} x(t) dt \right| &\leq \int_0^A e^{-at} |x(t)| dt \\ &\leq M \int_0^A e^{-at} e^{ct} dt = \frac{M}{c-a} (e^{(c-a)A} - 1) \\ &\leq \frac{M}{a-c}. \end{aligned}$$

Una propietat interessant és que transforma la derivació en una multiplicació:

$$\mathcal{L}(x')(s) = s(\mathcal{L}x)(s) - x(0) = sX(s) - x(0).$$

Efectivament

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x')(s) &= \lim_{A \rightarrow \infty} [e^{-st} x(t)]_0^A + \lim_{A \rightarrow \infty} s \int_0^A e^{-st} x(t) dt \\ &= -x(0) + sX(s). \end{aligned}$$

Si fem el mateix per a  $x''$  surt

$$\mathcal{L}(x'')(s) = s^2 X(s) - sx(0) - x'(0).$$

Si ara volem resoldre l'equació diferencial

$$ax'' + bx' + cx = f(t),$$

amb les condicions inicials  $x(0) = x_0$ ,  $y'(0) = y_0$ , apliquem la transformació de Laplace i obtenim

$$a(s^2 X(s) - sx_0 - y_0) + b(sX(s) - x_0) + cX(s) = F(s), \quad F(s) = \mathcal{L}(f)(s),$$

d'on se segueix

$$X(s) = \frac{(as + b)x_0 + ay_0 + F(s)}{as^2 + bs + c}.$$

Per a obtenir  $x(t)$  hem de trobar de quina funció  $X(s)$  n'és la transformada, és a dir, necessitem la transformada inversa. Certament hi ha una fórmula per a trobar aquesta inversa, que fa servir la integració complexa, però no l'estudiarem pas aquí. De fet el que es fa és utilitzar taules on s'incorporen els casos més habituals.

Per exemple tenim

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(1)(s) &= \frac{1}{s}, & \operatorname{Re} s > 0. \\ \mathcal{L}(\exp(a \cdot))(s) &= \frac{1}{s-a}, & \operatorname{Re} s > a, \end{aligned}$$

on per  $a \cdot$  denotem la funció que aplica  $t$  a  $at$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos \omega \cdot)(s) &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \\ \mathcal{L}(\sin \omega \cdot)(s) &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},\end{aligned}$$

totes dues vàlides per a  $\operatorname{Re} s > 0$ .

Ara, si volem trobar la solució de  $x'' - 5x' + 4x = e^{2t}$ , amb  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ , tenim, aplicant la transformació de Laplace

$$(s^2 - 5s + 4)X(s) - 1 = \frac{1}{s - 2},$$

d'on

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s-4)} + \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-4)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-4},$$

i prenent la inversa de la transformada,

$$x(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{4t}.$$

A continuació donem unes quantes propietats de la transformada que ajuden a resoldre les equacions

$$\text{i) } \mathcal{L}(-tx)(s) = X'(s),$$

que surt de

$$X'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt = \int_0^\infty -te^{-st} x(t) dt.$$

Per exemple

$$\mathcal{L}(te^t) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

(Observem que per facilitat de notació hem posat  $tx$  o  $te^t$  en comptes de  $\cdot x$  o  $\cdot e^t$ ).

$$\text{ii) } \mathcal{L}(e^{at}x) = X(s-a).$$

Per exemple

$$\mathcal{L}(e^{2t} \sin t) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1}.$$

La utilitat de la transformada de Laplace rau en el fet que es pot emprar en cas que  $f$  no sigui contínua, i ni tan sols una funció, si és que d'alguna manera en podem definir la transformada.

Considerem per exemple la funció anomenada de Heaviside,  $H_c$ , definida per

$$H_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{per a } t \leq c \\ 1 & \text{per a } t > c. \end{cases}$$



Tenim, si  $c \geq 0$ ,

$$\mathcal{L}(H_c)(s) = \int_c^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0,$$

i també

$$\mathcal{L}(H_c x(\cdot - a)) = e^{-as} X(s), \quad \text{si } a \geq -c.$$

Fent servir les propietats que ja tenim, resulta, per exemple, que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s^2}\right) = (t-1)H_1(t),$$

on  $\mathcal{L}^{-1}$  representa la transformada inversa.

Un altre exemple d'interès és un *impuls* situat a un cert valor de  $t$ . El prenem com una “funció” que té per integral 1 i que val zero a tot arreu, llevat del punt que li serveix de suport. De fet, es tracta d'una *distribució*, i no d'una funció. Les distribucions es defineixen com a aplicacions que associen d'una manera lineal a cada funció derivable  $\varphi$  (de fet  $C^\infty$ ) amb suport en un interval acotat (és a dir, que la funció s'anulla fora d'aquest interval), un valor real. La funció  $\varphi$  s'anomena *funció de prova*.

Una funció  $f$  integrable a tot interval acotat (anomenada *localment integrable*) defineix una distribució  $u_f$  mitjançant

$$u_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f\varphi.$$

Observem que una funció  $f(x)$  que valgui  $1/x$  per a  $x \neq 0$  i que tingui el valor que vulguem per a  $x = 0$  no és localment integrable, i per tant no té associada una distribució  $u_f$ .

L'*impuls* o *delta de Dirac* al punt  $a$  és una distribució que no prové de cap funció localment integrable, i es defineix per

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a).$$

Amb analogia amb la distribució associada a una funció integrable, podem imaginar-la com una “funció” que compleix

$$\varphi(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a \varphi,$$

és a dir, com una funció que s'anulla per a  $x \neq a$ , però que la seva integral sobre tot interval obert que contingui  $a$  val 1.

D'aquesta manera podem calcular la seva transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}(\delta_a)(s) \left( = \int_0^\infty e^{-st} \delta_a(t) dt \right) = e^{-as},$$

i a partir d'aquí resoldre equacions diferencials amb  $f = \delta_a$ .

Així, per exemple, podem trobar la solució de  $x'' - 3x' - 4x = \delta_1$ , amb  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .

Prenent la transformada de Laplace, tenim

$$(s^2 - 3s - 4)X(s) - 1 = e^{-s},$$

d'on se segueix que

$$X(s) = \frac{1}{5} \left( \frac{1 + e^{-s}}{s - 4} - \frac{1 + e^{-s}}{s + 1} \right),$$

i d'aquí que

$$x(t) = \frac{1}{5}(e^{4t} - e^{-t} + (e^{4(t-1)} - e^{1-t})H_1(t)).$$

Es poden definir les derivades de qualsevol ordre de les distribucions, mitjançant la següent fórmula deduïda a partir de la integració per parts per a la distribució  $u_f$  associada a la funció localment integrable  $f$ :

$$u'_f(\varphi) = -u_f(\varphi).$$

D'aquesta manera resulta

$$\delta'_a(\varphi) = -\varphi'(a),$$

la qual cosa ens dóna la “derivada” de la delta de Dirac. Això, com també d'altres propietats de la transformació de Laplace, ens pot ajudar a tractar equacions diferencials lineals amb termes distribucionals. Nosaltres ho deixarem aquí.

## 5. Un model de competència

Mitjançant les equacions diferencials podem fer un model de la situació que es presenta quan dues poblacions de característiques diferents competeixen pel mateix aliment del qual només hi ha una quantitat limitada. Podem imaginar-nos conills i cargols vivint d'una quantitat d'enciam que se'ls proporciona en quantitat constant cada dia, diguem.

En estudiar l'equació logística al capítol anterior, ja hem vist que si hi hagués un sol tipus de població, aquesta tendeix a un equilibri, és a dir, a un número d'individus constant amb el temps. Què passa quan hi ha dues menes d'individus?

Sense entrar aquí en una anàlisi de la validesa del model suposem que aquest és

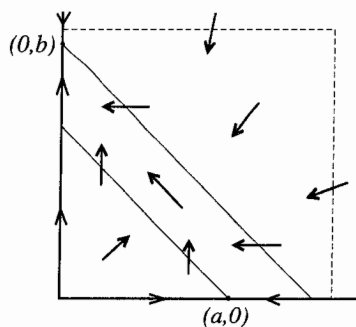
$$\begin{cases} x' = (a - (x + y))x \\ y' = (b - (x + y))y, \quad a, b > 0, x, y \geq 0. \end{cases}$$

on  $a$  i  $b$  representen les taxes de creixement de cada tipus si no hi hagués escassetesa d'aliment, i el terme  $x + y$ , que podria venir afectat de coeficients

(per exemple podria ser  $cx + dy$ , diguem), modifica aquestes taxes pel fet que l'aliment s'ha de repartir entre més individus.

Constatem que el sistema no és reduïble a quadratures en el sentit que en dividir una equació per l'altra, no obtenim una equació diferencial de primer ordre, per la qual cosa sabem expressar-ne les solucions mitjançant integracions. En particular no és una equació en què puguem separar-ne les variables. Per tant haurem de fer servir mètodes qualitius.

Per començar determinem els punts d'equilibri i dividim el pla (de fet en aquest cas només ens interessa el primer quadrant) en regions en què el camp vectorial té diferents direccions: cap a dalt o cap a baix, cap a l'esquerra o cap a la dreta. Així obtenim l'esquema il·lustrat a continuació, on hem suposat  $b > a$ .



Observem que totes les òrbites són positivament acotades (entrem en qual-sevol rectangle com ara l'assenyalat a la figura). Per tant, han de tendir a un punt d'equilibri, a una òrbita periòdica o un polígon d'òrbites. Una inspecció de la direcció del camp a les diferents regions, ens fa veure que no hi ha ni òrbites tancades ni polígons d'òrbites. Resulta doncs, que, excepte les òrbites contingudes a l'eix  $x$ , totes tendeixen al punt d'equilibri  $(0, b)$ . És a dir, la població d'individus del tipus assenyalat amb  $x$  tendeix a 0 quan  $x \rightarrow \infty$ .

Observem, anecdòticament, que per als individus de població  $x$ , resulta més nefasta la competència que un predador, on ens trobàvem amb un equilibri de coexistència.

## 6. El pèndol amb fricció

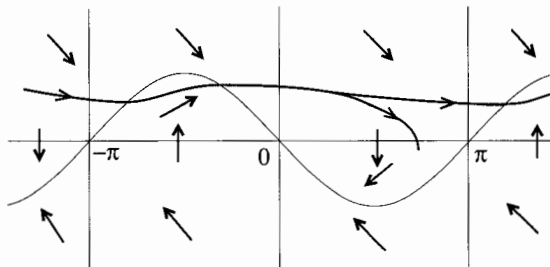
Considerem l'equació diferencial

$$x'' = -k \sin x - ax', \quad a, k > 0.$$

Correspon al moviment d'un pèndol amb fricció proporcional a la velocitat. Si ho escrivim en forma de sistema, queda

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -k \sin x - ay. \end{aligned}$$

Per començar observem que, de manera diferent al que passa amb el pèndol simple, sense fricció, ara no es pot integrar el sistema dividint les dues equacions i separant variables. Això vol dir que haurem d'utilitzar els mètodes qualitius que hem fet servir a la secció anterior. Primer de tot determinem quins són els punts d'equilibri i les línies del pla on el camp vectorial és vertical o horitzontal (és a dir o bé  $x'$  o bé  $y'$  és igual a 0). D'aquesta manera dividim el pla en regions on el camp és cap a la dreta i cap amunt, cap a l'esquerra i cap amunt, cap a la dreta i avall i cap a l'esquerra i avall. Obtenim una situació com la il·lustrada



Amb això obtenim una petita idea de com poden anar i com no poden anar les òrbites. Però no n'hi ha prou per a determinar el retrat. Per exemple una òrbita pot, només basant-nos en el que sabem ara, seguir amb  $x$  creixent indefinidament, amb  $y$  sempre positiva, o bé pot passar al semiplà inferior després d'arribar a una  $x$  màxima.

El següent coneixement que ens convé introduir és el que ens pot permetre de saber el tipus topològic dels entorns dels punts d'equilibri. És a dir, calculem la part lineal del camp vectorial a aquests punts, i segons quins siguin els valors propis associats, i si no tenen part real nul·la, podrem dir a quin tipus pertanyen.

Resulta així que la diferencial del camp al punt  $(x, y)$  ve donada per

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k \cos x & -a \end{pmatrix}.$$

Al punt d'equilibri  $(0, 0)$  (i a tots els punts  $(2k\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ), queda

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -a \end{pmatrix},$$

que té per valors propis

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4k}),$$

de part real menor que 0. Això ens diu que tenim un focus estable o un nus també estable, segons que  $a^2$  sigui més petit o no que  $4k$ .

En canvi als punts d'equilibri de la forma  $((2k+1)\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , tenim  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +k & -a \end{pmatrix}$ , i els valors propis són  $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 + 4k})$ .

Com que  $\lambda_+$  és real i positiu i  $\lambda_-$  és real i negatiu, concloem que tenim una sella a aquests punts. Les direccions de les separatrius d'aquestes selles estan forçades per les direccions del camp a les diferents regions que hem trobat abans.

Encara ens falta més informació per a obtenir el retrat, i és la que ens diu quin és el comportament global de les òrbites.

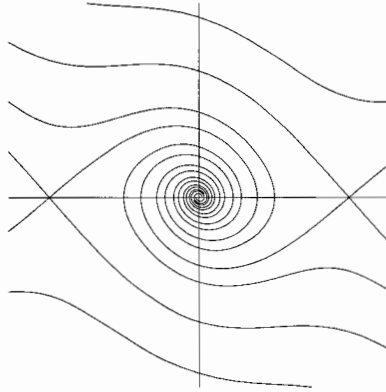
Aquí ens és útil el teorema de Bendixson-Poincaré que ens diu que les òrbites positivament acotades han de tendir a un punt d'equilibri, a un polígon d'òrbites o a una òrbita tancada, quan  $t \rightarrow \infty$ . Ara bé, al nostre cas resulta difícil d'establir l'acotació positiva de les òrbites, ja que sembla possible que vagin indefinidament cap a la dreta o cap a l'esquerra quan  $t$  creix, tot i que evidentment  $y(t)$  roman acotada quan  $t \rightarrow \infty$ . Per a superar d'una manera elegant aquest obstacle el que fem és aprofitar la periodicitat del camp vectorial, que es repeteix quan  $x$  s'incrementa en un múltiple de  $2\pi$ , i cercar el camp vectorial al cilindre que obtenim d'identificar  $x = -\pi$ , diguem, amb  $x = \pi$ . Resulta que la teoria de Bendixson-Poincaré també és vàlida sobre un cilindre, ja que tota corba tancada el divideix en dues parts desconnectades. Com que ara és clar que totes les òrbites són acotades per a  $t > 0$ , han de tendir a un punt d'equilibri, a un polígon d'òrbites, o a una òrbita tancada.

Que no hi ha òrbites tancades se segueix de fer servir el criteri de la divergència: com que la divergència del camp, que és la traça de  $J$ , val  $-a$ , és sempre negativa, i per tant el fet que hi hagués una òrbita periòdica que aïllés una porció  $D$  acotada del cilindre comportaria que la integral de la component normal del camp sobre l'òrbita, que és zero ja que el camp hi és tangent, en haver de ser igual a la integral de la divergència sobre  $D$ , hauria de ser també diferent de zero. Absurd. D'aquesta manera eliminem la possibilitat d'òrbites que aïllin porcions acotades del cilindre.

Encara hi ha, però, la possibilitat d'òrbites tancades que vagin al voltant del cilindre, dividint-lo en dues parts no acotades. Per veure que això no pot ser recorrem a un argument de simetria: el canvi que porta  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$  únicament canvia el sentit del camp vectorial, i per tant a tota òrbita tancada continguda totalment a l'hemiplà de dalt li'n correspon una de (anti) simètrica a l'hemisferi inferior. Aplicant el mateix criteri de la divergència a la regió acotada continguda entre les dues òrbites tancades, arribem a la mateixa contradicció d'abans i, per tant, la situació és impossible. No pot haver-hi cap òrbita tancada que tingui una part a dalt i l'altra a baix, ja que en travessar l'eix  $y = 0$  canvia el signe de  $x'$ , i això indica que hauria de dividir el cilindre en dues parts, una d'elles acotada, cosa que ja hem vist que no pot ser.

Amb aquests arguments eliminem totalment la possibilitat d'òrbites tancades. De la mateixa manera, ho deixem com a exercici, eliminem la possibilitat de polígons d'òrbites, és a dir de regions tancades per òrbites que tendeixen a punts d'equilibri per a  $t \rightarrow +\infty$  i per a  $t \rightarrow -\infty$ .

Concloem, doncs, que totes les òrbites tendeixen a un sol punt d'equilibri. Conjuminant això amb el que ja sabem sobre les direccions del camp vectorial i el tipus dels punts d'equilibri, obtenim el retrat



Si volem estudiar el pèndol quan la fricció és proporcional, no a la velocitat, sinó al seu cub, diguem, ens trobem amb el sistema

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -k \sin x - ay^3, \quad a, k > 0.\end{aligned}$$

Tot el que hem dit al cas anterior s'aplica a aquest, amb excepció de la determinació del tipus dels punts d'equilibri a  $(2k\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , ja que la matriu que correspon a la part lineal del camp en aquests punts és

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix},$$

que té propis imaginaris  $\lambda \pm = \pm i\sqrt{k}$ . Com que la part real és nul·la, no podem dir res definit sobre el tipus del punt d'equilibri. De fet sabem que les òrbites van girant al voltant del punt en sentit directe (contrari al moviment de les busques del rellotge), però no podem dir, sense més informació, si tendeixen o no al punt d'equilibri.

Per tal de resoldre aquesta qüestió, ens ajuda una *funció de Liapunov*. Efectivament, si considerem la funció que roman constant al llarg de les òrbites al pèndol simple sense fricció, és a dir,  $F(x, y) = y^2/2 - k \cos x$ , podem veure que disminueix de valor al llarg de les òrbites:

Tenim

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) &= F_x x' + F_y y' = kx' \sin x + yy' \\ &= ky \sin x - ky \sin x - ay^4 = -ay^4.\end{aligned}$$

Per tant aquesta derivada és negativa fora de l'eix  $y = 0$ , i zero en aquesta darrera situació. D'acord amb el teorema de Liapunov complementat per *La Salle*, les òrbites properes al punt d'equilibri tendeixen al màxim conjunt invariant contingut a la intersecció de  $y = 0$  amb un entorn d'aquest punt. Com

que les òrbites travessen la recta  $y = 0$ , excepte al punt d'equilibri, totes les òrbites han de tendir cap a aquest punt.

El retrat resulta, doncs, com al cas en què la fricció és proporcional a la velocitat.

## 7. Dinàmiques complicades

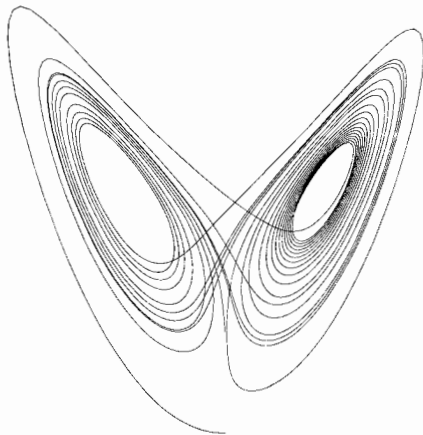
Els comportaments asimptòtics, és a dir, quan  $t$  tendeix a  $\infty$  o a  $-\infty$  de les solucions de les equacions tractades al text, no han estat gaire complicats. Recordem que el teorema de Bendixson-Poincaré, que hem utilitzat en tractar dels sistemes a  $\mathbb{R}^2$ , ens deia que si l'òrbita era positivament acotada i no hi havia una infinitat de punts d'equilibri, llavors o tendia a un punt d'equilibri, o a una òrbita periòdica, o a un "polígon" d'òrbites.

Aquest comportament ja no és tan senzill quan els nostres sistemes són de tres equacions, és a dir, quan el camp vectorial  $f$  de  $x' = f(x)$  és a  $\mathbb{R}^3$ . Ja fa força anys, de fet prop de 100, que *Poincaré* va fer notar l'extrema complicació que tenien les òrbites de les equacions del problema de tres cossos atraient-se mútuament per la força de la gravetat. Tot i això ha hagut de passar molt temps perquè els matemàtics hagin estat capaços d'explicar alguns aspectes d'aquestes complicacions. Actualment és un dels temes de recerca més vius. Un dels exemples més senzills de comportament complicat el va trobar *Lorenz* al 1963, quan va considerar un sistema de tres equacions de primer ordre, que representava de manera molt simplificada el moviment convectiu d'un fluid escalfat per sota. Aquestes equacions són

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y \\ y' = rx - y - xz \\ z' = -bz + xy \end{cases}$$

on  $\sigma$ ,  $r$  i  $b$  són paràmetres dels quals depèn el comportament del sistema. Lorenz ja comptava amb ordinadors digitals, i encara que les equacions, no lineals, no eren integrables analíticament, sí que, utilitzant mètodes numèrics, va poder obtenir el comportament aproximat de les solucions  $x(t)$ ,  $y(t)$  i  $z(t)$  del sistema.

El que es va observar és –projectant sobre el pla  $x, y$ , per exemple, les òrbites obtingudes– que aquestes giren un cert nombre de vegades al voltant d'un punt (d'equilibri de l'equació), i després passen a girar al voltant d'un altre punt (també d'equilibri), repetint-se indefinidament aquesta alternància en girar al voltant dels mateixos dos punts. A la figura s'il·lustra una part d'una òrbita prenent  $\sigma = 8$ ,  $b = 3$  i  $r = 30$ .



Si comptem el nombre de voltes que l'òrbita realitza al voltant de cada punt, obtenim una successió de números que sembla aleatòria, i que depèn dels valors inicials que hàgim pres per a determinar l'òrbita. Tot i que, certament, els càlculs només són aproximats i que la successió dels nombres de voltes computades pot no correspondre exactament al que realment correspon a l'òrbita, això suggereix un comportament asimptòtic que és molt diferent de tendir a un equilibri, o a una solució periòdica o d'anar-se'n a l'infinit.

Fent un model una mica idealitzat del sistema de Lorenz es veu que el fenomen correspon realment a un possible comportament de les òrbites i que no és el que s'anomena un *artefacte* del càlcul numèric. De fet es veu que si  $\{n_i\}$  representa la successió del nombre de voltes donades alternativament al voltant dels dos punts, resulta que escollint apropiadament les condicions inicials, podem fer que aquesta successió sigui qualsevol, tal que els seus elements compleixen una condició del tipus  $0 < m < n_i < M$  per a tota  $i \in \mathbb{N}$ , i per a alguna  $m$  i  $M$  també a  $\mathbb{N}$ .

Això dona una aparença aleatòria a un fenomen del tot determinista.

Un comportament d'aquest estil s'ha anomenat *caòtic* o *quasi-aleatori*, i sembla que es presenta normalment en molts sistemes de dimensió tres o més.

Estudiant el retrat a  $\mathbb{R}^3$  del sistema de Lorenz (idealitzat), resulta que hi ha un conjunt acotat al qual tendeixen totes les òrbites quan  $t \rightarrow \infty$ . Més precisament, hi ha un conjunt acotat, tancat (és a dir, que conté tots els seus punts d'acumulació) i *invariant* (vol dir que si conté un punt conté tota l'òrbita que passa per aquest punt), amb la propietat que totes les òrbites hi tendeixen quan  $t$  tendeix a  $\infty$ . Un conjunt amb aquestes propietats es coneix com un *atractor*.

Els atractors que contenen el límit d'òrbites amb comportament complicat, com en el sistema de Lorenz, són anomenats *atractors estranys*, encara que semblen prou abundants els sistemes que en tenen.

En el cas de Lorenz aquest atractor té l'aspecte d'un llibre amb una quantitat no comptable de fulls (que en travessar-los amb una recta l'intersecarien



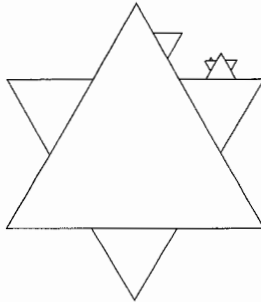
en un conjunt semblant al conjunt ternari de Cantor) (vegeu el capítol 2).

Una característica notable d'aquests atractors és la seva dimensió. L'atractor de Lorenz no és ni una superfície encabida a  $\mathbb{R}^3$ , que seria de dimensió 2, ni conté cap bola, que seria de dimensió 3. Si es defineix la dimensió adequadament, per exemple segons el criteri de Hausdorff, aquesta dimensió resulta fraccionària; intermèdia entre 2 i 3.

La *dimensió de Hausdorff* d'un conjunt a  $\mathbb{R}^n$  es defineix recobrint-lo amb boles de radi més petit que  $\varepsilon > 0$ , avaluant les sumes dels radis de les boles del recobriment elevats a un número real  $\alpha$ , prenent-ne l'ímfim sobre tots els possibles recobriments de radi més petit que  $\varepsilon$ , i fent tendir  $\varepsilon$  a 0. El valor de  $\alpha$  que fa que aquest límit no sigui ni 0 ni  $\infty$ , quan existeix i és únic, s'anomena la dimensió de Hausdorff.

Un conjunt de dimensió fraccionària és anomenat *fractal* i té propietats ben curioses pel que es refereix a la seva estructura "microscòpica".

Es poden "construir" conjunts fractals sense recórrer a les equacions diferencials amb dinàmica complicada. Mitjançant alguns processos iteratius no costa gaire d'obtenir-ne. Per exemple, el conjunt del pla conegut per *flor de neu*, que s'obté com a límit en anar afegint triangles equilàters al terç del mig dels costats lliures que van quedant, començant amb un sol triangle equilàter, té per frontera un conjunt que és de dimensió més gran que 1 i, no obstant, més petita que 2.



## 8. Equacions en derivades parcials de primer ordre quasilineals

L'estudi de les equacions en derivades parcials, és a dir d'aquelles funcions de múltiples variables, les derivades parcials de les quals compleixen certes relacions, no està a l'abast d'aquest llibre. Però hi ha un capítol, el corresponent a les equacions quasilineals de primer ordre, que podem abordar sense gaire dificultat a causa de la seva reducció quasi immediata a un sistema d'equacions diferencials de primer ordre.

Per a simplificar-ho notacionalment i fer imatges mentals més intuïtives, ens limitarem a funcions de dues variables reals  $u(x, y)$ . Una equació quasilineal és

una relació del tipus

$$a(x, y, u)u_x(x, y) + b(x, y, u)u_y(x, y) = c(x, y, u),$$

on, com és costum,  $u_x$  i  $u_y$  són les derivades parcials de  $u$  respecte de  $x$  i de  $y$ .

Notem que aquesta relació ens dona l'ortogonalitat entre els vectors  $(a, b, c)$  i  $(u_x, u_y, -1)$ :

$$\langle (a, b, c), (u_x, u_y, -1) \rangle = 0.$$

Si considerem la gràfica de  $u$ , el vector  $(u_x, u_y, -1)$  hi és normal i per tant resulta que  $(a, b, c)$  és un vector tangent a la gràfica. D'aquí tenim que aquesta gràfica conté les corbes integrals del camp  $(a, b, c)$  que passen pels seus punts, és a dir, que la gràfica de  $u$  és unió de corbes integrals d'aquest camp (o almenys de parts de corbes integrals).

D'aquesta manera, si donem una corba

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\mapsto (\bar{x}(s), \bar{y}(s), \bar{u}(s)), \end{aligned}$$

i considerem les corbes integrals que s'originen als punts d'aquesta corba, és a dir les solucions del sistema d'equacions, anomenades *equacions característiques*,

$$\begin{aligned} x' &= a(x, y, u) \\ y' &= b(x, y, u) \\ u' &= c(x, y, u) \end{aligned}$$

amb  $x(0, s) = \bar{x}(s)$ ,  $y(0, s) = \bar{y}(s)$ ,  $u(0, s) = \bar{u}(s)$ , obtenim solucions  $x(s, t)$ ,  $y(s, t)$ ,  $u(s, t)$ , que depenen tant de  $s$  com de  $t$ .

Les projeccions de les corbes integrals sobre el pla  $(x, y)$  es coneixen com a *corbes característiques* o senzillament *característiques*.

Si podem expressar  $s$  i  $t$  en termes de  $x$  i  $y$ , és a dir, si podem invertir l'aplicació de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donada per

$$(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t)),$$

llavors tindrem  $u$  en funció de  $x, y$ , tal com volíem. És a dir, hauríem resolt el problema de trobar una solució de l'equació diferencial que prenguéss valors determinats a la corba  $(\bar{x}(s), \bar{y}(s), \bar{u}(s))$ .

El teorema de funció inversa ens diu que l'aplicació anterior es pot invertir per a valors petits de  $t$  si la matriu

$$\begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix}_{t=0}$$

és no singular. Aquesta matriu és la mateixa que

$$\begin{pmatrix} \bar{x}'(s) & a(\gamma(s)) \\ \bar{y}'(s) & b(\gamma(s)) \end{pmatrix},$$

i per tant la condició d'invertibilitat i d'existència d'una solució que s'ajusti a  $\gamma$  ve donada per

$$\bar{x}'b(\gamma) - \bar{y}'a(\gamma) \neq 0.$$

A l'apèndix següent donem un exemple de l'aplicació d'aquests conceptes.

## 9. El trànsit en una carretera

Volem ara fer un model senzill del trànsit de cotxes per una carretera d'un sol carril, és a dir, on els cotxes no es poden avançar.

Suposarem que la carretera està parametritzada per  $x \in \mathbb{R}$ , i que té una densitat  $\rho$  de cotxes per unitat de longitud, que van a una velocitat  $v$  (tot en unitats adequades). Tant  $\rho$  com  $v$  seran funció de  $t$  i de  $x$ , el temps. En un punt i moment donat, el flux de cotxes per unitat de temps ve donat per  $q = \rho v$ . Al nostre model suposarem que tant  $\rho$  com  $v$  són funcions derivables amb derivades contínues.

Per tal d'obtenir el model utilitzem les lleis que governen el flux de cotxes. Una d'elles és la de conservació, que ens diu que la taxa de canvi del nombre de cotxes en un interval donat de la carretera, és igual als que entren menys els que surten pels extrems. És a dir

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(t, x) dx = q(a) - q(b),$$

o, derivant sota la integral:

$$\int_a^b \rho_t dx = \rho(a)v(a) - \rho(b)v(b) = \int_a^b -(\rho v)_x dx.$$

Com que això es realitza en tot interval  $[a, b]$ , tenim que s'ha de complir

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0,$$

perquè, si suposem que  $\rho$  i  $v$  són derivables amb continuïtat, si  $\rho_t + (\rho v)_x$  fos positiu, diguem, en un punt  $x$ , ho seria a tot un interval contenint  $x$ , i les integrals anteriors sobre aquest interval no coincidirien.

Una altra hipòtesi que fem és la del comportament dels vehicles, que ens dóna  $v$  en funció de  $\rho$ . De fet suposem que  $v$  és una funció decreixent de la densitat  $\rho$ , que pren un valor màxim quan  $\rho = 0$ , i el valor 0 quan  $\rho$  és màxima, és a dir, quan els cotxes estan pràcticament tocant-se.

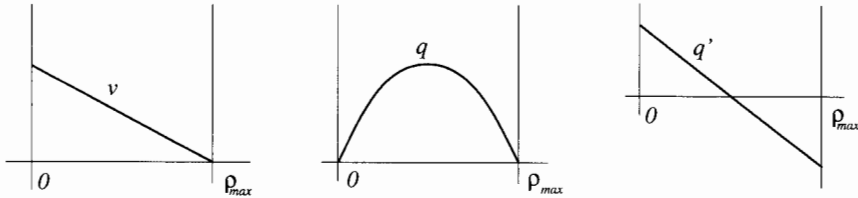
Amb aquesta hipòtesi l'equació anterior queda

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho v(\rho))_x &= 0, \quad \text{és a dir} \\ \rho_t + q' \rho_x &= 0, \end{aligned}$$

on  $q'$  representa la derivada respecte a  $\rho$  de  $q(\rho) = \rho v(\rho)$ .

D'acord amb la hipòtesi sobre  $v$ , tenim que  $q(\rho)$  és una funció que s'anulla a  $\rho = 0$  i a  $\rho = \rho_{\max}$ , i suposarem també que té un únic màxim a un punt

intermedi, que  $q'$  és una funció decreixent, des d'un valor positiu per a  $\rho = 0$  a un valor negatiu per a  $\rho = \rho_{\max}$ . La figura següent dóna el tipus de gràfiques d'aquestes funcions



Hem reduït, doncs, el nostre model a una equació en derivades parcials de primer ordre quasilineal.

Aquí el camp vectorial  $(a, b, c)$  de l'apèndix anterior es redueix a  $(1, q', 0)$ , i són les corbes integrals d'aquest camp les que ens generaran les solucions del problema, quan donem, per exemple, els valors de  $\rho$  en funció de  $x$  per a  $t$  igual a 0.

El nostre sistema d'equacions característiques és ara

$$\begin{aligned} dt/d\tau &= 1 \\ dx/d\tau &= q'(\rho) \\ d\rho/d\tau &= 0. \end{aligned}$$

Prenem ara les condicions inicials

$$t(0, s) = 0, \quad x(0, s) = s, \quad \rho(0, s) = \rho(s),$$

que corresponen al coneixement de  $\rho$  per a  $t = 0$ .

Les solucions són

$$\begin{aligned} t(\tau, s) &= \tau \\ x(\tau, s) &= s + q'(\rho(s))\tau \\ \rho(\tau, s) &= \rho(s). \end{aligned}$$

Per a expressar  $(\tau, s)$  en funció de  $(t, x)$ , tenim de la primera equació  $\tau = t$  i substituint a la segona queda

$$x = s + q'(\rho(s))t,$$

d'on podem deslliurar  $s$ , d'acord amb el teorema de funció implícita si

$$\frac{\partial}{\partial s}(s + q'(\rho(s))t) = 1 + q''(\rho(s))\rho'(s)t$$

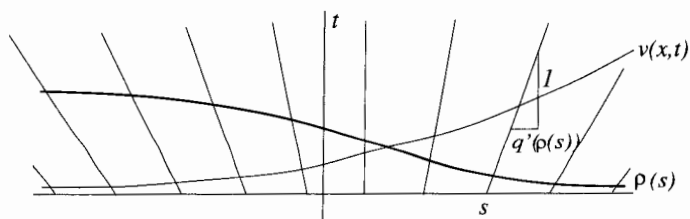
és diferent de 0.

Això serà així si

$$\rho'(s)t < -\frac{1}{q''(\rho(s))}.$$

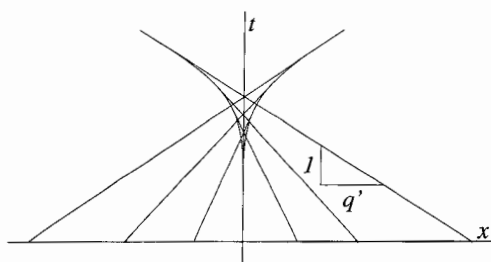
Recordem que  $s$  és el valor de  $x$  a  $t = 0$ , i la condició anterior representa la garantia que les característiques no es creuen, impedit la determinació unívoca de  $\rho$ .

A la figura següent s'indiquen les característiques corresponents a una  $\rho$  inicial decreixent amb  $x$ . Es veu que les característiques divergeixen per a  $t$  creixent. Com que  $\rho$  es manté constant sobre elles, resulta que per a trobar el valor de  $\rho$  en un punt  $(x, t)$ , només ens cal seguir la característica que passa per aquest punt fins a  $t = 0$ , i allà veure a quin valor de  $\rho$  correspon. Recordem que les característiques són rectes que tenen per pendent  $dx/dt = q'$ .



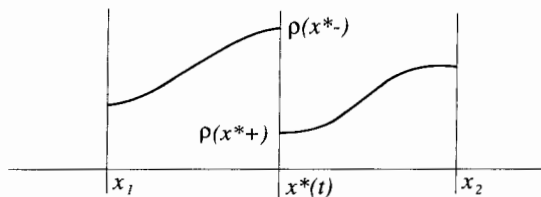
La velocitat  $v$  a cada punt ve determinada pel valor de  $\rho$ , i per tant la trajectòria d'un vehicle és una corba integral del camp  $v(x, t)$ .

Si  $\rho(0, x)$  és creixent en  $x$ , en lloc de decreixent, ens trobem que les característiques es creuen i en general tindrem tres maneres de tirar enrere; és a dir, la solució no queda unívocament determinada.



Per a resoldre aquest problema, o bé hem de canviar de model, o bé hem d'admetre solucions discontinües. Explorem una mica aquesta darrera possibilitat.

Considerem una discontinuïtat de  $\rho$  a  $x^*(t)$



Si exigim la conservació de vehicles, tenim

$$\begin{aligned}
 q(x_1, t) - q(x_2, t) &= \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho dx \\
 &= \frac{d}{dt} \left( \int_{x_1}^{x_*} \rho dx + \int_{x_*}^{x_2} \rho dx \right) \\
 &= \frac{dx_*}{dt} \rho(x_*, t) + \int_{x_1}^{x_*} \rho dx \\
 &\quad - \frac{dx_*}{dt} \rho(x_*, t) + \int_{x_*}^{x_2} \rho dx \\
 &= [\rho] \frac{dx_*}{dt} + \int_{x_1}^{x_2} \rho dx,
 \end{aligned}$$

on  $[\rho]$  indica el salt de  $\rho$  a la discontinuïtat, és a dir  $\rho(x_*, t) - \rho(x_*, t)$ .

Si ara fem  $x_2 - x_1$  tendir a 0, queda

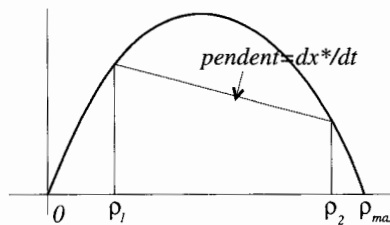
$$[\rho] \frac{dx_*}{dt} = [q],$$

essent  $[q] = q(x_*, t) - q(x_*, t)$  el salt de  $q$ .

D'aquí deduïm que perquè una discontinuïtat sigui vàlida, s'ha de moure amb una velocitat

$$\frac{dx_*}{dt} = [q]/[\rho].$$

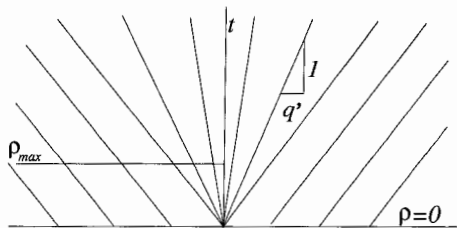
Si coneixem  $\rho$  a banda i banda de la discontinuïtat, llavors podem obtenir aquest valor a partir de la gràfica de  $q(\rho)$ :



Una discontinuïtat d'aquest tipus és coneguda com a *xoc*.

Com a exemples molt senzills de l'aplicació del que hem dit en aquest apèndix, podem veure el comportament del trànsit quan hi ha cotxes aturats per un semàfor, i aquest es posa verd, deixant la carretera lliure davant dels primers.

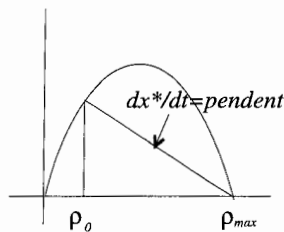
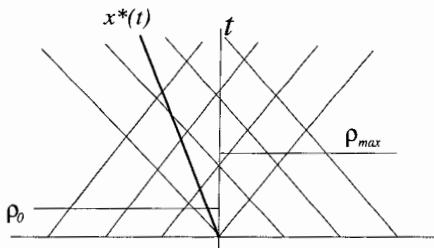
La figura següent il·lustra aquesta situació i l'evolució que segueix.



Aquí hem suposat una condició inicial per  $\rho$  discontinua, la qual cosa ens proporciona el que s'anomena una *zona d'expansió*, amb característiques emergint de l'origen. Deixem com a exercici justificar-ho.

Les característiques ens donen  $\rho$ , i hem il·lustrat la trajectòria de l'automòbil que ocupava la posició  $x_0$  per a  $t = 0$ .

Ara, si considerem un flux uniforme de densitat  $\rho_0$ , i de sobte un semàfor es posa vermell, es produeix una discontinuïtat, un xoc, que es propaga enrere amb una certa velocitat, segons la condició que hem explicat:







## Capítol 11

# Integració de funcions de múltiples variables

### 11.1 Introducció

Ja dèiem a la introducció del capítol 8 que les funcions de més d'una variable van ser utilitzades per a l'estudi de situacions en les quals calia més d'un número real per a determinar el punt o l'estat de què es tractés. Un dels càlculs que es va necessitar fer des de més antic és el del volum d'un cos donat. Ja els egipcis tenien, fa uns 4000 anys, una bona fórmula per al volum d'un tronc de piràmide. Per a nosaltres el volum d'un cos es pot obtenir integrant les funcions de dues variables que ens defineixen la seva superfície. La integració de funcions de més d'una variable entra també en l'expressió de les solucions de diverses equacions en derivades parcials: l'equació de la calor, l'equació d'ones, l'equació del potencial i d'altres, que no estan a l'abast d'aquest llibre. Ja dèiem que els matemàtics del segle XVIII van utilitzar aquesta integració per a calcular els efectes gravitatoris dels cossos i per a altres problemes del continu. Va ser *Euler* el primer que va utilitzar la integració iterada (regla de Fubini) i els canvis de coordenades.

La teoria de la integració de les funcions de múltiples variables reals evoluciona, passant per *Riemann* i *Lebesgue*, fins a donar lloc, al nostre segle, a l'*Anàlisi funcional*, on les mateixes funcions són els punts de nous espais sobre els quals podem definir noves funcions. Aquests desenvolupaments no són estèrils, i permeten el tractament de problemes que fins fa poc eren fora de l'abast de la matemàtica. Tals són, per exemple, els models que es fan amb equacions amb derivades parcials del vol d'una nau aèria o bé del funcionament d'un reactor nuclear; models que tractats amb ordinador proporcionen respostes sobre el comportament del que estem modelant.

Incloem en aquest capítol els teoremes de Green, Gauss i Stokes, que ajuden a expressar diverses lleis dels medis continus.

## 11.2 La integral d'una funció contínua sobre un rectangle

De la mateixa manera que la integral d'una funció de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sobre un interval  $I = [a, b]$  representa l'àrea compresa entre la gràfica de la funció i l'eix de les abscisses, així la integral d'una funció de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sobre un conjunt de  $\mathbb{R}^2$  representa el *volum sota la gràfica* de  $f$ . Considerarem que el conjunt sobre el qual integrem és el rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$ .

Si  $f$  és una funció contínua a  $R$ , definim la *integral* (de Cauchy) de  $f$  sobre  $R$  ben bé de la mateixa manera que en el cas d'una sola variable. Dividim tant l'interval  $[a, b]$  com el  $[c, d]$  en  $n$  intervals iguals mitjançant els punts  $x_i = x_0 + i(b-a)/n$ , amb  $x_0 = a$ , i  $y_j = y_0 + j(d-c)/n$ ,  $y_0 = c$ . Això ens divideix el rectangle  $R$  en  $n^2$  rectangles  $R_{jk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Definim la *integral de  $f$  sobre el rectangle  $R$*  com el límit de la suma dels volums dels prismes aixecats sobre els rectangles  $R_{ij}$ , amb altura igual a  $f(x_i, y_j)$  (que pot ser negativa) quan  $n$  tendeix a  $\infty$ .

Denotem per  $s_n$  la suma dels volums dels prismes, és a dir

$$s_n = \sum_{i,j=1}^n f(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} f(x_i, y_j).$$

llavors, definim la integral de  $f$  sobre  $R$  per

$$\int_R f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

També farem servir la notació  $\int_R f(x, y) dx dy$ .

Per a fer veure que aquest límit existeix, mostrarem que  $\{s_n\}$  és una successió de Cauchy, és a dir, que per a cada  $\varepsilon > 0$ , existeix  $n_0$  tal que si  $m, n > n_0$ , llavors  $|s_m - s_n| < \varepsilon$ .

Això és així perquè  $f$  és uniformement contínua a  $R$ , ja que  $f$  és contínua i  $R$  és compacte (tancat i acotat). És a dir, per a qualsevol  $\eta > 0$ , existeix  $\delta > 0$  amb la propietat que si  $|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)| < \delta$ , llavors  $|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \eta$ . Si prenem ara  $\eta < \varepsilon/2(b-a)(d-c)$  i  $n_0$  tal que  $(b-a)(d-c)/n_0 < \delta$ , resulta que  $|s_m - s_n| \leq (b-a)(d-c)\eta < \varepsilon$ .

Per veure això, suposem  $m > n$ . Usant la desigualtat del triangle i la suma  $s_{mn}$  corresponent a dividir  $R$  en  $mn$  trossos podem escriure

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &\leq |s_m - s_{mn}| + |s_{mn} - s_n| \\ &= \left| \sum_{i,j=1}^m \frac{(b-a)(d-c)}{m^2} f(x_i, y_j) - \sum_{i,j=1}^{mn} \frac{(b-a)(d-c)}{(mn)^2} f(x_i, y_j) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i,j=1}^{mn} \frac{(b-a)(d-c)}{(mn)^2} f(x_i, y_j) - \sum_{i,j=1}^n \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} f(x_i, y_j) \right| \end{aligned}$$

i cadascun dels dos sumands resulta més petit que  $(b-a)(d-c)\eta$ . En efecte, cada rectangle de la “partició” corresponent a  $m$  (i a  $n$ ) conté exactament  $n$  rectangles ( $m$ ) de la partició corresponent a  $mn$ . Així, podem agrupar tots els termes de  $s_{mn}$  corresponents al mateix rectangle de  $s_m$  (i de  $s_n$ ) comparant-los amb un únic sumand de  $s_m$  (i de  $s_n$ ). El valor absolut de la diferència de la funció avaluada a dos punts qualssevol del mateix rectangle de  $s_m$  (i de  $s_n$ ) és més petit que  $\eta$  perquè  $n > n_0$ .

Amb això hem establert l'existència de la integral per a una funció contínua a  $R$ . Aquesta definició no sembla gaire bona, perquè hem pres les divisions dels intervals d'una manera molt particular, i això pot dificultar la demostració d'alguna propietat. Hi ha la definició de *Riemann* que, *mutatis mutandis*, és la mateixa que donem a l'apèndix del capítol 3 per a funcions d'una variable, i que permet divisions dels intervals més generals. No l'hem presa com a definició de partida perquè, tot i no ser gaire complicada, requereix més feina, i, a més, no obtenim la integral com el límit d'una expressió definida. Sigui com sigui, les definicions són equivalents per a les funcions contínues, com qualsevol lector prou interessat pot comprovar. La integral de Riemann permet integrar funcions que tinguin discontinuïtats en un conjunt de mesura zero. També es pot definir la integral de Lebesgue, que fa que la integral existeixi per a encara més funcions. No la tractarem, no perquè no sigui important, que ho és molt pel desenvolupament de l'anàlisi matemàtica, sinó perquè no té prou espai en aquest llibre.

Intentar avaluar directament la integral d'una funció  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cercant el límit de  $s_n$  és massa enredat: ja ho era per a funcions d'una sola variable. Cal recórrer, doncs, a altres procediments, i en particular a expressar la integral sobre  $R$  com a dues integrals successives sobre els intervals  $[a, b]$  i  $[c, d]$  que té  $R$  per costats.

### 11.3 La integral sobre un rectangle com a integrals iterades

Demostrarem que si  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  és contínua, i  $R$  és el rectangle  $[a, b] \times [c, d]$  contingut al domini de  $f$  (que suposem obert), llavors

$$\int_Q f = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

és a dir, obtenim la integral prenent primer, per a cada  $x$  fixada, la integral de  $f$  respecte de  $y$  a l'interval  $[c, d]$  la qual cosa ens dóna una funció de  $x$ , i després integrant aquesta funció a l'interval  $[a, b]$ .

Per definició

$$\int_c^d f(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{d-c}{n} f(x, y_j) =: F(x).$$

A la secció 8.18 ja hem mostrat que  $F$  és contínua a  $[a, b]$ . Tenim, doncs,

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \right) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \frac{b-a}{m} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{d-c}{n} f(x_i, y_j) \right),$$

on ja sabem que els límits existeixen.

Posem

$$s_{mn} = \sum_{i=1}^m \frac{b-a}{m} \left( \sum_{k=1}^n \frac{d-c}{n} f(x_i, y_j) \right).$$

És clar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{mn} = \sum_{i=1}^m \frac{b-a}{m} F(x_i)$ , i observem que

$$\left| s_{mn} - \sum_{i=1}^m \frac{b-a}{m} F(x_i) \right|$$

tendeix a 0 quan  $m$  tendeix a  $\infty$ , ja que  $\sum_{j=1}^n \frac{d-c}{n} f(x_i, y_j)$  convergeix uniformement a  $F(x_i)$ .

Per tant, com que  $s_m$  tendeix a  $\int_R f$  quan  $m \rightarrow \infty$ , mentre que  $\sum_{i=1}^m \frac{b-a}{m} F(x_i)$  tendeix a  $\left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ , queda establerta la igualtat

$$\int_R f = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

D'una manera anàloga establim que

$$\int_R f = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy,$$

és a dir, que podem canviar l'ordre d'integració.

Les igualtats anteriors, que inclouen casos bastant més generals que el tractat aquí d'una funció contínua en un rectangle, es coneixen com a *teoremes de Fubini*.

## 11.4 La integral d'una funció contínua sobre un domini del pla

Si tenim una funció  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  i un domini del pla,  $D$ , que suposarem tancat i acotat, intentem definir la integral de  $f$  sobre  $D$  de manera que correspongui al *volum sota la gràfica* de  $f$  restringida a  $D$ .

Una manera de fer-ho és prendre un rectangle  $R$  prou gran perquè  $D$  hi estigui contingut, redefinir la funció  $f$  a  $R$ , de manera que a  $D$  coincideixi amb

l'anterior, i que als punts de  $R$  que no siguin a  $D$  valgui 0. Anomenarem  $\tilde{f}$  aquesta nova funció. Llavors posem

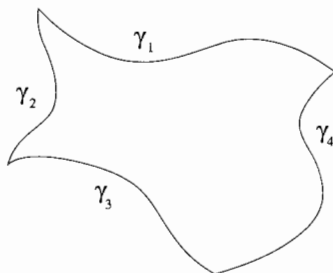
$$\int_D f = \int_R \tilde{f}.$$

El problema per veure si aquesta integral està ben definida, encara que  $f$  sigui contínua a  $D$ , és que  $\tilde{f}$  no és contínua a  $R$ , si no és que  $f = 0$  a  $\partial D$  on per  $\partial D$  denotem la *frontera* o *vora* de  $D$ , que definim com els punts de l'adherència de  $D$  que no en són interiors. En els punts de  $\partial D$ ,  $\tilde{f}$  no és contínua, si  $f$  no hi val 0.

Per tal d'assegurar la integrabilitat de  $f$  contínua a  $D$ , hem d'imposar restriccions sobre  $\partial D$ . De fet les possibilitats de complicacions amb la vora de  $D$  desafien la imaginació. Pot ser que  $\partial D$  sigui un conjunt de mesura positiva o bé que sigui un *fractal* o que no sigui localment connex, i tot això essent  $D$  la clausura d'un *obert connex* (és a dir, que tots els punts es poden connectar amb arcs dins del conjunt), o que sigui un conjunt indescomponible (que no és unió de tancats connexos, encara que s'intersequin), etc.

En molts d'aquests casos tenim dificultats per a demostrar que la integral existeix tal com l'hem definida. Precisament aquesta és una de les raons per les quals s'han anat introduint noves definicions d'integral. Així, la *integral de Riemann* definida amb sumes superiors i inferiors, com descrivim a l'apèndix del capítol 3, permet que tinguin integral ben definida les funcions contínues a  $D$  quan  $\partial D$  té mesura nul·la (vegeu el llibre de Spivak de càlcul sobre varietats).

Nosaltres serem més modestos, i ens conformarem amb mostrar que la integral que hem definit existeix si la vora  $\partial D$  de  $D$  és *contínuament derivable a trossos*. Això vol dir que  $\partial D$  està formada per un nombre finit de corbes  $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , més ben dit, per les seves imatges, cada una d'elles amb derivada contínua fins als extrems (és a dir, que  $\gamma'_i(t)$  té límit quan  $t$  tendeix a  $a_i$  i a  $b_i$ ). A més, és clar, volem que  $\gamma(b_{i-1}) = \gamma(a_i)$ , i si hi ha  $p$  corbes, que  $\gamma(b_p) = \gamma(a_0)$ .



Observem que el càlcul de la integral d'una funció sobre  $D$  fent servir directament la definició és pràcticament impossible. Fins i tot com a mètode numèric és d'una eficàcia molt baixa. En canvi, si restringim els dominis  $D$  a tenir  $\partial D$  derivable a trossos, podem donar una expressió a la integral sobre  $D$

mitjançant dues integracions successives respecte d'una variable cada vegada. Resulta, doncs, que les restriccions que hem imposat sobre  $\partial D$ , no solament són les que satisfan en general les integrals que apareixen en la pràctica, sinó que corresponen també a les integrals que podem calcular amb les eines que hem anat desenvolupant.

Demostrem, doncs, que si  $f$  és contínua a  $D$  amb  $\partial D$  derivable a trossos, llavors la integral de  $f$  existeix. Per a simplificar una mica la notació, com a rectangle  $R$  prendrem un quadrat  $Q = [a, b]^2$  que contingui  $D$  al seu interior, i definirem  $\tilde{f}(x) = f(x)$  si  $x \in D$  i  $\tilde{f}(x) = 0$  si  $x \in Q \setminus D$  (és a dir, si és un punt de  $Q$  que no pertany a  $D$ ).

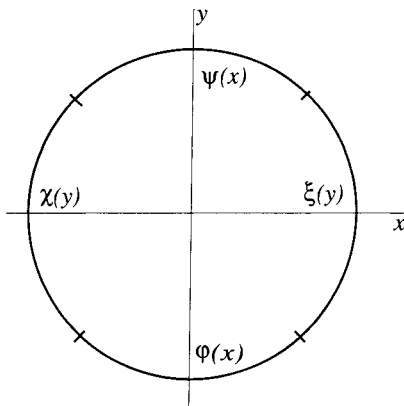
La definició de la integral ens diu

$$\int_D f = \int_Q \tilde{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n \frac{(b-a)^2}{n^2} \tilde{f}(x_i, y_j).$$

Com que  $\partial D$  es compon d'un nombre finit d'imatges de corbes amb derivada contínua, resulta que  $\partial D$  té una longitud  $l$  finita: la suma de les longituds de cada arc corresponent a  $\gamma_i$ . Cada una d'aquestes longituds existeix, d'acord amb la secció 8.19. La intuïció ens diu llavors que l'àrea total dels quadrats de la forma  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  que contenen punts de  $\partial D$  no sobrepassa  $2\sqrt{2}hl$ , on  $h = (b-a)/n$ , i això perquè tots els quadrats que intersequen  $\partial D$  hauran d'estar continguts en una faixa d'amplada  $2\sqrt{2}h$  a l'entorn de  $\partial D$ . Així, quan  $n \rightarrow \infty$ , tenim que  $h \rightarrow 0$  i, per tant, en ser la funció  $f$  (i per tant  $\tilde{f}$ ) acotada ( $D$  és tancat i acotat, i per tant tota funció contínua hi és acotada), resulta que la suma dels termes corresponents als quadrats que toquen  $\partial D$  també tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ . Per tant, a la suma que defineix la integral  $f$  sobre  $D$  podem deixar de banda tots els quadrats que no estan a l'interior de  $D$ . Com que a  $D$ ,  $f$  és uniformement contínua, el mateix argument que hem fet servir per a mostrar que la integral existeix quan  $D$  és un rectangle s'aplica aquí, amb la petita complicació que quan  $n \rightarrow \infty$  van apareixent nous quadrats del tipus  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  en la suma, en deixar d'intersecar  $\partial D$ , però l'àrea total d'aquests també tendeix a 0.

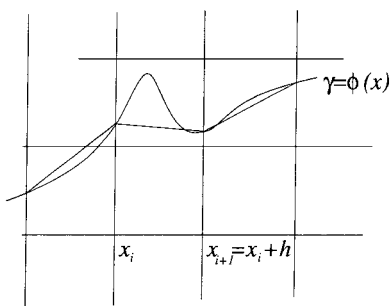
Donar aquests arguments d'una manera rigorosa és prou embolicat, i no voldríem que els matolls no ens deixessin veure el bosc. Així i tot, justificarem que la suma de les àrees dels quadrats que intersequen  $\partial D$  tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ :

D'acord amb la hipòtesi de derivada contínua a trossos de la vora  $\partial D$  de  $D$ , podem dividir-la en un nombre finit de trossos projectables ja sigui a l'eix  $x$  o a l'eix  $y$ , és a dir, trossos que són gràfiques de funcions de  $x$  o de  $y$ . Així, per exemple, si tenim que  $D$  és un cercle, podem dividir la vora, que és una circumferència, en quatre trossos que siguin arcs parametritzats per  $x$  o per  $y$ :



Veurem que cada una d'aquestes gràfiques es pot recobrir amb quadrats de la forma  $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  de manera que quan  $n \rightarrow \infty$ , l'àrea total d'aquests quadrats tendeix a 0.

Considerem una part de la gràfica de la funció, diguem  $\phi(x)$ , que defineix un tros  $\gamma$  de la vora de  $D$ , i la quadrícula amb quadrats de costat  $h = (b-a)/n$ ,



Substituïm la gràfica de  $\phi$  per la poligonal  $\psi$  obtinguda en unir els punts  $(x_{i-1}, \phi(x_{i-1}))$  i  $(x_i, \phi(x_i))$  per una recta. Veiem que podem prendre  $h$  prou petita perquè  $(\phi(x) - \psi(x)) < h$  per a tota  $x$ . Efectivament,  $\phi$  i  $\psi$  coincideixen a cada  $x_i$ , i tenim que entre  $x_i$  i  $x_{i+1}$ ,  $\psi$  ve donada per

$$\psi(x_i + y) = \phi(x_i) + \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)}{h}y,$$

i per tant

$$\begin{aligned} |\phi(x_i + y) - \psi(x_i + y)| &= \left| \phi(x_i + y) - \phi(x_i) - \frac{\phi(x_i + h) - \phi(x_i)}{h}y \right| \\ &= \left| \phi'(\xi)y - \frac{\phi(x_i + h) - \phi(x_i)}{h}y \right| = o(|y|) \end{aligned}$$

on  $\xi \in (x_i, x_{i+1})$ .

Pel fet que  $|y| \leq h$ , aquesta diferència resulta ser  $o(h)$ , i, per tant, podem fer-la més petita que  $h$  prenent  $h$  prou petita, que és el que volíem aconseguir.

Això vol dir que a cada interval  $[x_i, x_{i+1}]$ , el nombre de quadrats intersecats per la gràfica de  $\phi$  no és superior a l'enter  $M$  immediatament més gran que el suprem de  $|\phi'|$  al seu interval de definició més dos, i aquests dos últims a causa de la màxima desviació possible de  $\psi$  i  $\phi$ , que no passa de  $h$ . Com que  $M$  està acotat perquè  $\phi'$  és una funció contínua definida en un interval acotat, resulta que l'àrea màxima possible dels quadrats que cobreixen la gràfica de  $\phi$  entre  $x_i$  i  $x_{i+1}$  és  $(M + 2)h^2$ . Si multipliquem això per la longitud, diguem  $a$ , de l'interval de definició de  $\phi$ , tenim en total una àrea de  $(M + 2)h$  per a tots els quadrats que intersequen la gràfica de  $\phi$ . Certament això tendeix a 0 quan  $h$  ho fa.

Així tenim, doncs, assegurat que la nostra definició d'integral és bona per a les funcions contínues en dominis acotats amb vora contínuament derivable a trossos.

Si prenem  $f = 1$ , llavors  $\int_D f$  s'anomena l'àrea de  $D$ , i coincideix amb la noció habitual d'àrea per al cas que  $D$  sigui un rectangle.

Amb aquesta definició d'integral ens resulta ara evident que si tenim dues regions acotades i tancades disjunctes  $A$  i  $B$ , o bé tenint en comú un nombre finit d'arcs amb derivada contínua, i una funció  $f$  que és contínua a cada una de les regions, resulta la propietat additiva de la integral

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Essent la raó, com abans, que l'àrea total dels quadrats que intersequen els arcs comuns tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ , amb la funció  $f$  acotada.

Una altra propietat que resulta immediata de la definició, és que  $\int_D (af + bg) = a \int_D f + b \int_D g$ , essent  $a$  i  $b$  números qualssevol.

Una variant interessant de la definició d'integral, que funciona com el que hem acabat de veure en el cas de vores derivables amb continuïtat a trossos, consisteix a prendre els punts  $x_i, y_j$  independents del rectangle  $R$  o del quadrat  $Q$ , és a dir, fixos a  $\mathbb{R}^2$  per a tots els casos. Així tindríem

$$x_i = i/n, \quad y_j = j/n,$$

i amb l'argument que l'àrea total dels quadrats que intersequen les vores tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ , obtindríem els mateixos resultats.

El teorema de Fubini, que hem exposat per al cas que  $f$  és contínua al rectangle  $R$ , també és vàlid quan  $f$ , contínua a  $D$ , s'estén a tot  $R$ . Essent  $\partial D$  derivable amb continuïtat a trossos, el conjunt de discontinuïtats de  $\tilde{f}$  a  $R$  queda recobert per rectangles de la forma  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ , de manera que la seva àrea total tendeix a 0 quan  $n$  tendeix a  $\infty$ . D'una manera ben semblant a com ho hem fet quan  $f$  era contínua, es prova llavors que

$$\int_D f = \int_R \tilde{f} = \int_a^b \left( \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b \tilde{f}(x, y) dx \right) dy.$$



No en farem la justificació en detall, perquè ja era prou feixuga en el cas de  $f$  contínua a  $R$ , i fer-ho no aportaria idees diferents de les que ja hem utilitzat en aquesta secció.

## 11.5 La integral sobre un domini $D$ del pla com a integrals iterades

Ja hem fet notar que la definició que hem donat per a la integral d'una funció de dues variables no és la més adient per a calcular aquesta integral. De fet les generalitzacions de Riemann i Lebesgue, que representen esforços profitosos per a donar un marc teòric més clar i més estructurat, no ajuden gens a calcular les integrals, és a dir, a donar un procediment mitjançant el qual i utilitzant les eines del càlcul, com ara el seu teorema fonamental, podem obtenir expressions per avaluar aquestes integrals, quan donem  $f$  i les corbes que defineixen  $\partial D$  de manera explícita.

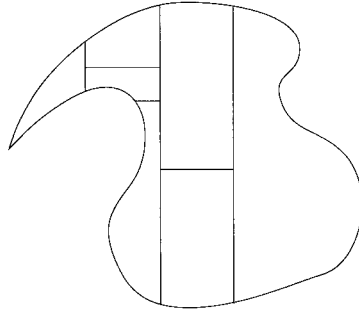
Per sort, el fet que hàgim restringit  $f$  a ser contínua i  $\partial D$  a estar constituïda per un nombre finit d'arcs amb derivada contínua, ens permet reduir el càlcul de la integral al que s'anomena *integració iterada*, tal com hem fet en el cas en què  $D$  era un rectangle a la secció 11.3. Per a ser més precisos, hauríem de dir que reduïm el càlcul a un nombre finit d'integrals iterades.

Per a fer-ho dividim la regió  $D$  mitjançant rectes paral·leles als eixos en regions del tipus



i semblants respecte de la variable  $y$ .

Això sempre és possible donades les condicions que hem suposat a  $\partial D$ . Per exemple la figura següent s'ha descompost en cinc regions com les anteriors.

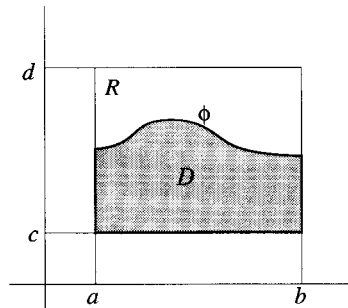


Ara utilitzem la propietat additiva de la integral per a calcular la integral de  $f$  sobre cada una d'aquestes regions. Considerem una regió del primer tipus que hem il·lustrat, és a dir, definida per una funció  $\phi(x)$  amb derivada  $\phi'$  contínua, definida en un interval  $[a, b]$ . El teorema de Fubini ens diu llavors que, immergint la regió en un rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$ , tenim que

$$\int_D f = \int_a^b \left( \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right) dx,$$

que en el nostre cas queda com a

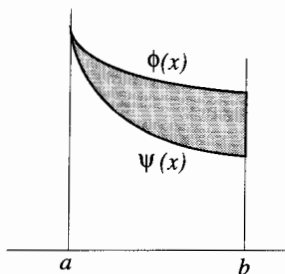
$$\int_D f = \int_a^b \left( \int_c^{\phi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$



Si ens trobem en el segon cas il·lustrat, tenim

$$\int_D f = \int_a^b \left( \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

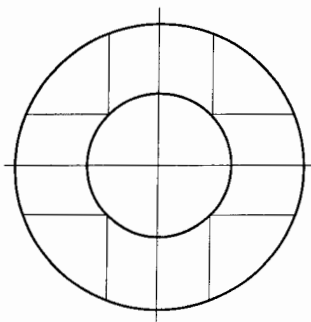
com es veu a la figura següent



Si hem de projectar sobre l'eix  $y$ , queda

$$\int_D f = \int_c^d \left( \int_a^{\chi(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

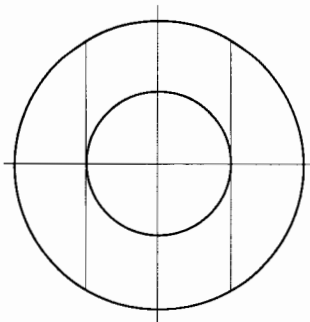
Per exemple ens podríem proposar integrar una funció  $f$  contínua a la regió del pla que es troba entre els cercles de radi 1 i de radi 2 centrats a 0.



Podem dividir la regió en els vuit trossos ilustrats, per tal d'obtenir les condicions que hem imposat sobre  $\phi$  (que tingui la derivada contínua).

Es pot abreujar, però, dividint-la només en quatre trossos encara que  $\phi'$  no sigui acotada, de manera que obtindrem

$$\begin{aligned} \int_D f &= \int_{-2}^{-1} \left( \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right) dx + \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx \\ &+ \int_{-1}^1 \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right) dx + \int_1^2 \left( \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$



## 11.6 Integració a $\mathbb{R}^3$ i a $\mathbb{R}^n$

Quan ens proposem integrar funcions definides a  $\mathbb{R}^3$  ens trobem si fa no fa amb la mateixa problemàtica que en el cas de dues variables. En lloc d'un rectangle o d'un quadrat, la regió d'integració serà un paralelepípede o un cub. Si tenim el paralelepípede  $P = [x_0, x_n] \times [y_0, y_n] \times [z_0, z_n]$ , llavors definim la integral de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mitjançant

$$\int_P f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j,k=1}^n f(x_i, y_j, z_k)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}),$$

on  $x_i = x_{i-1} + (x_n - x_0)/n$ ,  $y_j = y_{j-1} + (y_n - y_0)/n$ ,  $z_k = z_{k-1} + (z_n - z_0)/n$  quan aquest límit existeix.

Quan  $f$  és contínua a  $P$  no hi ha cap dificultat afegida per provar que la integral existeix, fent servir els mateixos arguments que a la secció 11.2, on té un paper important la continuïtat uniforme de  $f$  a  $\mathbb{R}$ .

Ara bé, si volem integrar  $f$  contínua en una regió  $D$  acotada i tancada de l'espai, la situació es complica força per les possibles característiques de la frontera  $\partial D$  del domini  $D$ . D'una manera intuïtiva, així com en el cas de  $D$  bidimensional teníem una frontera formada per "línies", en el cas tridimensional tindrem una frontera formada per "superfícies". Si ja els conjunts  $\partial D$  al pla eren prou complicats, moltes més possibilitats de complicació hi ha en augmentar el nombre de dimensions. Una manera de resoldre el problema és utilitzar la definició d'integral de Riemann (que ja hem dit que coincideix amb la nostra en tots els casos que tractem), en la qual n'hi ha prou amb demanar que la mesura de  $\partial D$  sigui 0 (és a dir, que es pugui recobrir amb una quantitat comptable de cubs de volum total tan petit com vulguem). El problema després podria estar a decidir si  $\partial D$  és de mesura nul·la en algun cas complicat, encara que als casos que es troben en la pràctica certament tenen frontera de mesura 0. D'una manera semblant resol el problema el concepte d'integral de Lebesgue. Aquests conceptes, més generals, d'integral, ja hem dit que no solament volen evitar les complicacions que es presenten, sinó que proporcionen una visió més

pregona de l'anàlisi i en permeten el desenvolupament, sobretot vers l'anomenada anàlisi funcional. Sigui com sigui, nosaltres no volem anar en aquesta direcció, entre d'altres coses perquè hauríem d'enriquir encara més la càrrega conceptual que utilitzem. Al cap i a la fi, voldríem ser capaços d'entendre els aspectes més elementals de la integració de funcions amb diverses variables, que són els que fem servir en el càlcul dels casos pràctics habituals: càlcul de volums, de moments d'inèrcia, de centres de massa i també en l'expressió de solucions d'equacions en derivades parcials. Per aquesta raó limitarem el nostre estudi a les funcions contínues a  $D$  amb frontera  $\partial D$  que sigui derivable amb continuïtat a trossos. Això vol dir que  $\partial D$  està format per *superfícies* derivables amb continuïtat, que es troben l'una amb l'altra al llarg de corbes també derivables amb continuïtat a trossos.

Tractem una mica d'aquestes superfícies.

### 11.6.1 Superfícies a $\mathbb{R}^3$ i la frontera de $D$

Així com hem definit les corbes a  $\mathbb{R}^2$ , mitjançant una aplicació  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , podem definir una *superfície* a  $\mathbb{R}^3$  com una aplicació  $\sigma: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Perquè vagi bé demanarem que  $\sigma$  sigui derivable amb continuïtat fins a la vora del rectangle  $[a, b] \times [c, d]$ , i això vol dir que les derivades parcials siguin contínues, incloent-hi els punts on només existeixen per l'esquerra o per la dreta. Això serà una *superfície parametritzada* pels dos paràmetres  $(s, t)$ , diguem:

$$\sigma: (s, t) \mapsto \sigma(s, t) \in \mathbb{R}^3.$$

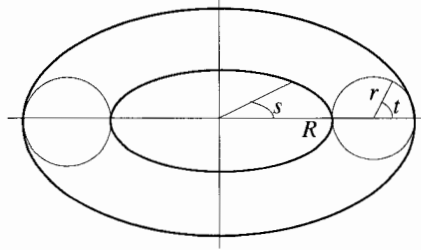
Ja es veu tot seguit que aquesta definició no serà suficient per als nostres propòsits, perquè seria ben casual que els trossos de superfície que enrajolen  $\partial D$  fossin imatges de rectangles. Per tant hem de permetre superfícies  $\sigma$  definides sobre subconjunts acotats i no rectangulars de  $\mathbb{R}^2$ . Procedim, doncs, com quan hem tractat del domini  $D$  d'integració en dues variables: considerem  $\sigma$  definida sobre un tancat acotat  $S$  de  $[a, b] \times [c, d]$  que tingui una vora derivable amb continuïtat a trossos formada per corbes  $\gamma_i$ .

Per a no complicar la notació, identificarem l'aplicació  $\sigma$  amb la seva imatge  $\sigma(S)$  quan creguem que això no comporta complicacions.

Aquestes imatges han d'aplicar-se bé sobre la frontera  $\partial D$  de  $D$ , de manera que s'intersequin sobre les imatges de les corbes  $\gamma_i$ .

Un exemple senzill d'un domini a  $\mathbb{R}^3$  que satisfà les nostres condicions és el tor massís  $T$ , que té per vora  $\partial T$  la imatge de

$$\sigma: (s, t) \mapsto ((R + r \cos t) \cos s, (R + r \cos t) \sin s, r \sin t), \quad s \in [0, 2\pi], \quad t \in [0, 2\pi].$$



En aquest cas particular, n'hi ha hagut prou amb un sol quadrat  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  per a recobrir tota la frontera de  $T$ . Notem que hem enganxat els punts que són imatge de  $s = 0$  amb els de  $s = 2\pi$  i els de  $t = 0$  amb els de  $t = 2\pi$ .

Per a recobrir una bola no n'hi hauria prou amb una sola  $\sigma$ . Podríem fer-ho amb dos hemisferis que fossin imatge de dos cercles: un cobrint el nord fins a l'equador i l'altre el sud també fins a l'equador.

Una *reparametrització* d'una superfície és una aplicació bijectiva derivable amb invers derivable que porti  $S$  sobre  $S$ . La regla de la cadena ens dóna la relació entre derivades segons diverses parametritzacions.

## 11.6.2 Integral d'una funció contínua a $D$

Suposarem que la frontera de  $D$  està formada per un nombre finit de superfícies  $\sigma_i$ , i suposarem, a més, que aquestes superfícies són parametritzables mitjançant  $(x, y)$  o bé  $(y, z)$  o bé  $(z, x)$ , és a dir, són projectables respecte d'algun dels tres eixos. Això sempre és possible quan  $\partial D$  és derivable amb continuïtat a trossos, però no ens entretindrem a fer-ho veure. El que fem per a definir la integral de  $f$  sobre  $D$  és semblant al que hem fet en el cas de dues variables: prenem un cub  $C : [a, b]^3$ , de manera que  $D$  quedi en el seu interior. Estenem la funció  $f$  definida a  $D$  a tot  $C$ , fent  $f(x) = 0$  si  $x$  està a  $C$  i no està a  $D$ . Anomenem  $\tilde{f}$  la funció estesa. Definim llavors

$$\int_D f = \int_C \tilde{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j,k=1}^n h^3 \tilde{f}(x_i, y_j, z_k),$$

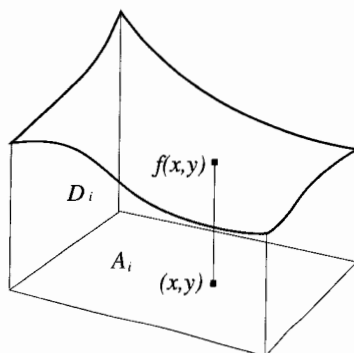
on  $h = (b - a)/n$ .

Aquest límit existeix perquè el volum total dels cubs que intersequen  $\partial D$  tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ . Fer veure això resulta massa feixuc: ens conformem amb la intuïció. Com al cas de dimensió 2, també és complex que si  $D$  és unió de dos conjunts  $A$  i  $B$  que si s'intersequen és només a trossos de les seves fronteres, que són derivables amb continuïtat a trossos, llavors

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

### 11.6.3 Integració iterada a $\mathbb{R}^3$

D'una manera anàloga al cas a  $\mathbb{R}^2$ , el que fem és dividir  $D$  en porcions que seran del tipus



on hem il·lustrat el cas d'un tros projectable al llarg de l'eix  $z$ . Aquí suposem que  $\phi$  és una funció derivable sobre un domini  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ , que suposem amb vora derivable amb continuïtat a trossos.

Tal com hem fet a la secció anterior, tenim que la integral sobre  $D_i$  de  $f$  ve donada per

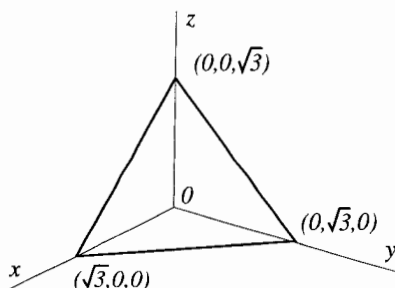
$$\int_A \left( \int_0^{\phi(x,y)} f(x, y, z) dz \right).$$

La integral sobre  $A$  es pot, al seu torn, expressar com dues integrals iterades.

Sumant totes les integrals sobre les regions del tipus  $D_i$ , obtenim  $\int_D f$ .

Com a exemple calculem la massa d'un cos en forma de piràmide que té per base un triangle amb el vèrtex oposat a aquesta base que dista una unitat de longitud d'ella i és trirectangular. Suposem que la densitat del material que la constitueix és igual a  $1 - d$ , essent  $d$  la distància del punt a la base.

Una manera de resoldre'l és situar la piràmide de la manera que es mostra a la figura, és a dir, amb el vèrtex a l'origen i les arestes laterals al llarg dels eixos:



Una mica de geometria ens permet posar les coordenades dels vèrtexs. Aplicant la integració iterada, ens queda que la massa val

$$M = \int_0^{\sqrt{3}} \left( \int_0^{\sqrt{3}-x} \left( \int_0^{\sqrt{3}-x-y} \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z) dz \right) dy \right) dx.$$

Tot el que hem dit en aquesta secció es pot generalitzar a funcions  $f$  contínues en un domini  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  que tingui la frontera derivable amb continuïtat a trossos, i encara que  $f$  no sigui contínua a tot  $D$  es pot partir  $D$  en trossos amb frontera  $C^1$ , on  $f$  ho sigui a cada tros i tot continua essent vàlid.

## 11.7 Canvi de variable a la integració

La reducció de la integral d'una funció de múltiples variables a integrals successives respecte a cada una de les variables pot portar, segons les simetries de la funció  $f$  o del domini  $D$  sobre el que estem integrant, a expressions més o menys difícils de tractar. Pot passar, però, que mitjançant un canvi de variables es redueixi la integració a expressions molt més senzilles.

Un *canvi de variables* és una aplicació  $\phi$  d'un domini  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ , a la qual demanem que tingui derivada contínua, i que sigui injectiva sobre una regió  $\phi(D)$  amb invers derivable amb continuïtat. El teorema de funció inversa ens diu que aquest serà el cas si  $\phi$  és injectiva i  $D\phi$  és invertible a tots els punts de  $D$ . Cal potser fer notar que essent  $D$  un conjunt tancat no podem aplicar el teorema de funció inversa a la frontera  $\partial D$ . Per a estalviar-nos problemes, en la majoria dels casos suposarem que  $\phi$  compleix les condicions que hem demanat a tot un obert contenint  $D$ , i si aquest no és el cas, ja farem les consideracions convenients a cada situació particular.

El teorema central d'aquesta secció ens diu que si  $D$  és una regió de  $\mathbb{R}^n$  amb frontera  $\partial D$  derivable amb continuïtat a trossos, on tenim definit un canvi de variables  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , i si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  és una funció contínua a  $D$ , llavors es compleix

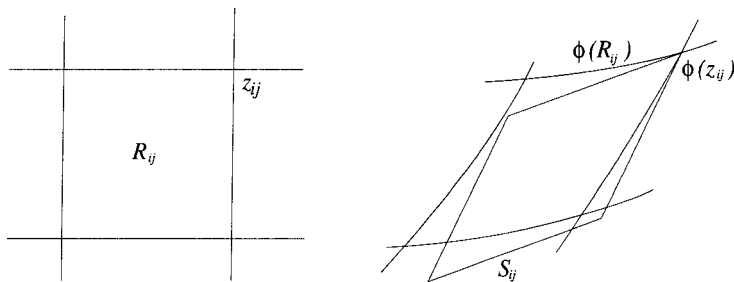
$$\int_D f = \int_{\phi(D)} (f \circ \phi^{-1}) |\det D\phi^{-1}|.$$

Aquí hem denotat per  $|\det D\phi^{-1}|$  la funció que associa a cada punt  $\zeta$  de  $\phi(D)$  el valor absolut del determinant de la diferencial de  $\phi^{-1}$  avaluada a  $\zeta$ .

D'una manera intuïtiva podem fer versemblant aquest teorema amb els següents arguments, que il·lustrarem per a  $n = 2$ , encara que per a  $n$  més gran són els mateixos.

La idea és que si cobrim  $D$  amb la retícula de quadrats  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  de costat  $h = (b-a)/n$ , que ens serveix per a definir la integral, i considerem la imatge d'aquesta retícula sota  $\phi$ , observem que cada un dels quadrats  $R_{ij}$  es transforma en un conjunt molt proper al paral·lelogram  $S_{ij}$  format pels punts de la forma  $\phi(z_{ij}) + D\phi(z_{ij})z$ , on  $z_{ij} = (x_i, y_j)$  i  $z$  són els vectors del quadrat  $[-h, 0]^2$





Això resulta del teorema de Taylor, que ens dóna

$$\phi(z_{ij} + z) = \phi(z_{ij}) + D\phi(z_{ij})z + o(|z|).$$

Ara bé, l'àrea de  $S_{ij}$  és la mateixa que la de  $D\phi(z_{ij})([-h, 0]^2)$ , de la qual  $S_{ij}$  n'és un traslladat per  $\phi(z_{ij})$ . Aquesta àrea, d'acord amb el que hem dit a la secció 8.6, val  $|\det D\phi(z_{ij})| h^2$ , és a dir

$$A(S_{ij}) = |\det D\phi(z_{ij})| A(R_{ij}),$$

on hem denotat per  $A(\cdot)$  l'àrea del que es troba entre els parèntesis.

Tenim

$$\int_D f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n T_{ij},$$

amb  $T_{ij} = f(z_{ij})A(R_{ij})$ . Si substituïm l'expressió acabada de trobar, ens queda

$$T_{ij} = (f \circ \phi)^{-1} \phi(z_{ij}) |\det D\phi(z_{ij})|^{-1} A(S_{ij}),$$

on hem utilitzat  $f = f \circ \phi^{-1} \circ \phi$ .

Si en lloc de  $A(S_{ij})$  poséssim  $A(\phi(R_{ij}))$ , que hem dit que eren pròximes, ens quedaria

$$\sum_{i,j=1}^n (f \circ \phi)^{-1} \phi(z_{ij}) |\det D\phi(z_{ij})|^{-1} A(\phi(R_{ij})),$$

i si ara sabéssim també que per a calcular la integral d'una funció, en lloc de la retícula  $R_{ij}$ , també podem utilitzar una retícula com la donada per  $\phi(R_{ij})$ , tindríem que el límit d'això és

$$\int_{\phi(D)} (f \circ \phi)^{-1} |\det D\phi|^{-1}.$$

Com que  $|\det D\phi(z_{ij})|^{-1} = |\det D\phi^{-1}(\phi(z_{ij}))|$ , ja tenim l'expressió que ens dóna el teorema. A l'apèndix donem una versió de la demostració que cobreix els passos que aquí no hem fet.

Notem que el mètode de substitució per a integrar funcions d'una variable no és més que el teorema de canvi de variables a  $\mathbb{R}$ .

### 11.7.1 Exemples de canvi de variable a la integració

A la secció 8.12 hem donat els canvis de variables a coordenades polars, en el cas bidimensional, i a coordenades esfèriques en el cas tridimensional. Vegem com es transformen les integrals en aquests dos casos.

El canvi a coordenades polars ve donat per

$$\phi : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) =: (x, y),$$

i està ben definit, per exemple, és a dir té invers amb derivada contínua a  $\Omega = (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ , de manera que podem aplicar la fórmula del canvi de variables a la integral, si prenem el domini  $D$  on  $f$  està definida dins de  $\Omega$ .

Tot el que hem de fer és modificar l'integrand i trobar el nou domini  $\phi(D)$  sobre el qual haurem d'integrar. Per a modificar l'integrand hem de calcular  $|\det D\phi|$ .

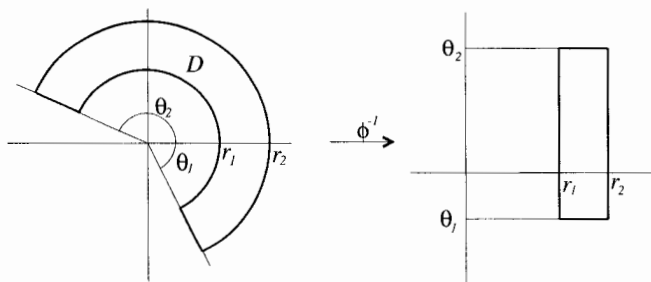
Tenim

$$D\phi = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix},$$

i, per tant  $|\det D\phi| = r$ , i  $|\det D\phi^{-1}| = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ .

Si volguéssim calcular la integral de  $f$  sobre una regió limitada per cercles centrats a 0 i per línies radials, ens podria convenir aplicar  $\phi^{-1}$ .

Així, per exemple, si la regió és una porció d'anell circular centrat a 0, tal com es mostra a la figura



tindríem llavors que

$$\begin{aligned} \int_D f &= \int_{\phi^{-1}(D)} (f \circ \phi) |\det D\phi| \\ &= \int_{\phi^{-1}(D)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta. \end{aligned}$$

Com que  $\phi^{-1}(D)$  és un rectangle, tenim

$$\int_D f = \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, d\theta \right) dr.$$

Si, per exemple,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , quedaria

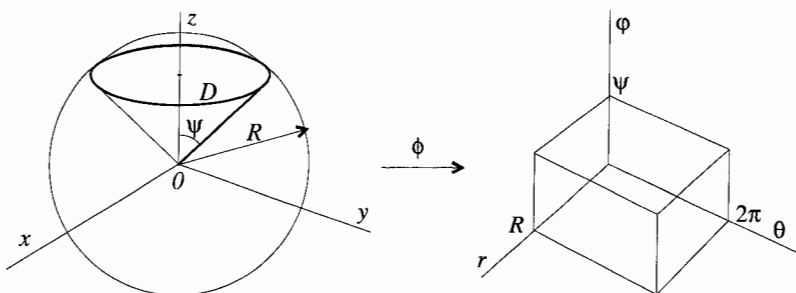
$$\begin{aligned}\int_D f &= \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3 d\theta \right) dr = (\theta_2 - \theta_1) \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr \\ &= (\theta_2 - \theta_1)(r_2^4 - r_1^4)/4.\end{aligned}$$

El canvi a coordenades esfèriques es tracta d'una manera anàloga. En aquest cas resulta

$$|\det D\phi| = r^2 \sin \varphi$$

(vegeu la secció 8.12 per trobar l'expressió de  $\phi$ ).

Així, si es vol calcular el volum de la regió  $0 < \varphi < \psi$  de la bola de radi  $R$  centrada a 0,



resulta

$$V = \int_D dx dy dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\psi r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr,$$

on hem utilitzat que el volum de  $D$  és  $\int_D f$  amb  $f$  la funció constant igual a 1. Així mateix, hem suprimit els parèntesis a les integrals iterades, per a simplificar la notació. Calculant, tenim

$$V = \int_0^R r^2 \left( \int_0^{2\pi} (1 - \cos \psi) d\theta \right) dr = 2\pi(1 - \cos \psi)R^3/3.$$

## 11.8 Integrals sobre corbes i teorema de Green

Per acabar aquest capítol tractarem de tres teoremes, el de *Green*, el de *Gauss* i el de *Stokes*, que són importants pel fet que serveixen per a expressar algunes lleis de la Física i també perquè ajuden a la resolució d'algunes equacions en derivades parcials.

Per a enunciar el *teorema de Green* necessitem definir la *integral d'un camp vectorial sobre una corba*. Recordem que una corba és una funció diferenciable  $\gamma$  d'un interval  $[a, b]$  a  $\mathbb{R}^n$ . Per al nostre cas en tenim prou amb  $n = 2$ . Suposem

que tenim un camp vectorial  $X$  definit en un entorn de l'arc  $\gamma([a, b])$  al pla  $\mathbb{R}^2$ , i que les components de  $X$  són, com les de  $\gamma$ , de classe  $C^1$ .

Explícitament tenim, doncs,

$$\begin{aligned}\gamma &: t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \\ X &: (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)).\end{aligned}$$

Definim la *integral de  $X$  sobre  $\gamma$*  mitjançant

$$\int_{\gamma} X = \int_a^b \langle X \circ \gamma, \gamma' \rangle.$$

Si fem una reparametrització de  $\gamma$ , és a dir, si considerem una aplicació creixent i exhaustiva

$$\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$$

que sigui de classe  $C^1$ , amb invers a  $C^1$ , tenim

$$\int_a^b \langle X \circ \gamma, \gamma' \rangle = \int_c^d \langle X \circ \gamma \circ \phi, \gamma' \circ \phi \rangle \phi',$$

d'acord amb la regla de substitució en una integral. D'altra banda, la regla de la cadena ens dona  $(\gamma \circ \phi)' = (\gamma' \circ \phi)\phi'$ , i per tant

$$\int_{\gamma} X = \int_a^b \langle X \circ \gamma, \gamma' \rangle = \int_c^d \langle X \circ \gamma \circ \phi, (\gamma \circ \phi)' \rangle,$$

és a dir, que  $\int_{\gamma} X$  és independent de la parametrització de  $\gamma$ , sempre que  $\phi' > 0$ . Si  $\phi'$  fos negativa, canviaria el signe de la integral.

Intuitivament, podem veure  $\int_{\gamma} X$  com la integral de la projecció sobre la tangent, a cada punt de  $\gamma$ , de  $X$ , al llarg de  $\gamma$ .

Observem que si, en particular,  $X = \text{grad } \phi = (\phi_x, \phi_y)$ , resulta que

$$\int_{\gamma} X = \int_a^b \langle \text{grad } \phi \circ \gamma, \gamma' \rangle = \int_a^b (\phi \circ \gamma)' = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)),$$

o sigui que si tenim una *corba tancada*, és a dir que  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , resulta que  $\int_{\gamma} \text{grad } \phi = 0$ .

Si tenim un camp vectorial  $X = (P, Q)$ , de classe  $C^1$ , el *teorema de Green* ens iguala la integral de la funció  $Q_x - P_y$  sobre un domini  $D$  amb la integral de  $X$  sobre la vora  $\partial D$ . Suposem que  $\partial D$  té una sola component ( $D$  no té forats) i és derivable amb continuïtat a trossos, i per tant té sentit aquesta darrera integral segons la definició que n'acabem de donar. Considerem  $\partial D$  format per una corba  $\gamma$  (o per un nombre finit de corbes  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ ), de manera que quan el paràmetre creixi el punt  $\gamma(t)$  recorri  $\partial D$  en el sentit contrari de les agulles del rellotge (en el sentit anomenat directe). Llavors

$$\int_{\gamma} X = \int_D (Q_x - P_y).$$

Pel fet que

$$\int_{\partial D} X = \int_a^b \langle X \circ \gamma, \gamma' \rangle,$$

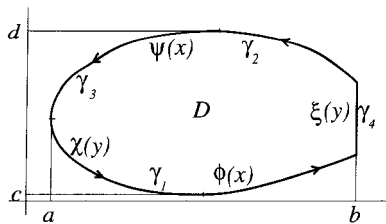
i

$$\langle X \circ \gamma, \gamma' \rangle = P(x, y)x' + Q(x, y)y',$$

és habitual trobar l'expressió

$$\int_{\partial D} X = \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Demostrarem el teorema en el cas que la regió  $D$  sigui projectable tant respecte a l'eix  $x$  com respecte a l'eix  $y$ , és a dir, quan és del tipus,



és a dir, que la vora  $\partial D$  es pot expressar tant en termes de funcions de  $x$ ,  $\phi$  i  $\psi$  definides a  $[a, b]$ , com en termes de funcions de  $y$ ,  $\chi$ ,  $\xi$ , definides a  $[c, d]$ . També podem permetre que una part de la vora sigui de  $x$  o de  $y$  constant, tal com es mostra a la figura.

La vora  $\partial D$ , la considerem constituïda o bé per les corbes  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ , corresponents a les gràfiques de les funcions  $\phi$  i  $\psi$  respectivament (i per la porció vertical de  $\gamma_4$ ), o bé per les corbes  $\gamma_3$  i  $\gamma_4$  corresponents a  $\chi$  i  $\xi$ . D'acord amb l'exigència del teorema, les parametritzem de manera que en incrementar-se el paràmetre, recorrin  $\partial D$  en sentit contrari a les busques del rellotge, és a dir, deixant  $D$  a l'esquerra. Diem, entre parèntesi, que aquesta darrera manera de definir el sentit amb què es recorre  $\partial D$  permet estendre la validesa del teorema de Green al cas de regions  $D$  amb forats.

Provem ara que

$$\int_{\gamma} P(x, y) dy = \int_D -P_y.$$

Efectivament

$$\begin{aligned} \int_D P_y &= \int_a^b \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} P_y(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b P(x, \psi(x)) - P(x, \phi(x)) dx \\ &= \int_{\gamma_2} P(x, y) dx - \int_{\gamma_1} P(x, y) dx = - \int_{\gamma} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

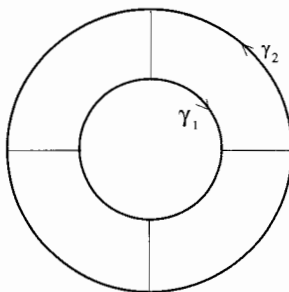
La darrera igualtat és deguda al fet que la part vertical de la vora no contribueix a  $\int_{\gamma} P dx$ .

Per altra banda, canviant  $x$  per  $y$  i  $P$  per  $Q$ , obtenim

$$\int_D Q_x = \int_{\gamma} Q(x, y) dy.$$

Ajuntant els dos resultats tenim la fórmula cercada.

Les regions que ens trobem a la pràctica pot ser que no satisfacin les condicions que imposem, però moltes vegades poden descompondre's convenientment. Per exemple en el cas d'un anell podem partir-lo com es mostra a la figura, i estem en les condicions anteriors



En tornar a ajuntar els quatre trossos, les parts de les integrals sobre les corbes comunes a dues regions, en ser de signes contraris, s'anul·len.

Observem que si  $X = (P, Q) = \text{grad } f$ , és a dir  $P = f_x$ ,  $Q = f_y$ , llavors, com que  $\gamma$  és una corba tancada, tenim que  $\int_{\gamma} X = \int_D (Q_x - P_y) = 0$ , com ha de ser, ja que llavors  $Q_x = f_{yx}$  i  $P_y = f_{xy}$ , que certament coincideixen si  $Q_x$  i  $P_y$  estan a  $C^1$  (que vol dir que  $f$  està a  $C^2$ ).

## 11.9 Integrals sobre superfícies i els teoremes de Gauss i de Stokes

Una superfície a  $\mathbb{R}^3$  es pot definir paramètricament mitjançant una funció de classe  $C^1$

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto (\phi_1(s, t), \phi_2(s, t), \phi_3(s, t)). \end{aligned}$$

El domini de  $\phi$  serà una regió  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  complint les condicions que hem imposat per poder definir-hi la integral d'una funció contínua.

De la imatge de  $D$  sota  $\phi$  en diem també *superfície*, i la denotarem per  $\sigma$ .

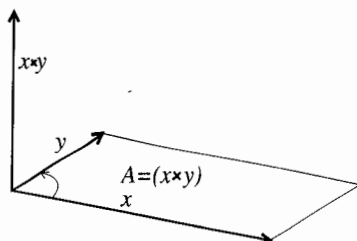
Definim l'àrea de la superfície  $\sigma = \phi(D)$  mitjançant la integral:

$$A(\sigma) = \int_D |\phi_s \times \phi_t|.$$

Hem d'explicar la notació:  $\phi_s$  i  $\phi_t$  són respectivament les derivades parcials de  $\phi$  respecte de  $s$  i de  $t$ . Com que  $\phi$  té tres components,  $\phi_s$  i  $\phi_t$  són vectors a  $\mathbb{R}^3$ . Donats dos vectors  $x, y$  a  $\mathbb{R}^3$  definim el seu *producte vectorial* mitjançant la fórmula

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Una manera de veure intuïtivament quin és aquest vector és adonar-se que és ortogonal tant a  $x$  com a  $y$  (es comprova fent-ne el producte escalar), i que la seva norma  $|x \times y|$  correspon precisament a l'àrea del paral·lelogram que defineixen.

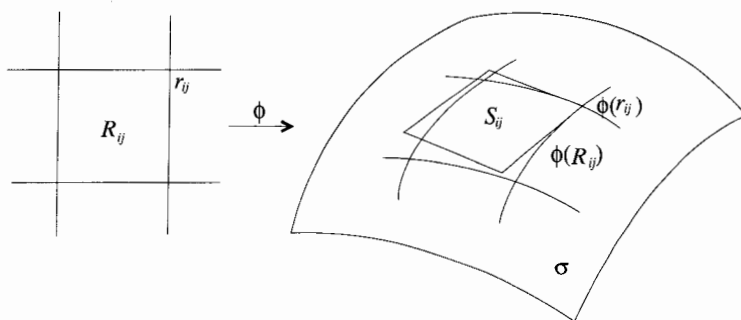


A més, vist des de la punta de  $x \times y$ , l'angle que ha de recórrer  $x$  en el sentit directe per estar en la mateixa direcció i sentit que  $y$  està entre  $0$  i  $\pi$  (inclosos).

Ara justificarem d'una manera que esperem que sigui intuïtivament prou convincent la definició d'àrea de  $\sigma$  que hem donat:

Considerem la regió  $D$  quadriculada amb els quadrats  $R_{ij} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ , que hem fet servir per a definir la integral d'una funció contínua sobre  $D$ . Suposem com abans que  $(s_i - s_{i-1}) = (t_j - t_{j-1}) = h = (b - a)/n$ . Sigui també  $r_{ij} = (s_i, t_j)$ .

La imatge de  $R_{ij}$  sota  $\phi$  serà molt propera (pel teorema de Taylor, tal com l'hem utilitzat abans), al paral·lelogram  $S_{ij} = \phi(r_{ij}) + D\phi(r_{ij})[-h, 0]^2$ . A la figura tractem d'il·lustrar la situació



Tindrem l'àrea de  $\sigma$ , sumant les àrees de les  $S_{ij}$ , i fent tendir  $n$  a  $\infty$ .

Ara bé  $S_{ij}$  té la mateixa àrea que  $D\phi(r_{ij})[-h, 0]^2$ , que és un paral·lelògram que té per costats les imatges dels vectors  $-hD\phi(r_{ij})e_1$  i  $-hD\phi(r_{ij})e_2$ . Com que

$$D\phi = \begin{pmatrix} \partial\phi_1/\partial s & \partial\phi_1/\partial t \\ \partial\phi_2/\partial s & \partial\phi_2/\partial t \\ \partial\phi_3/\partial s & \partial\phi_3/\partial t \end{pmatrix},$$

resulta que  $D\phi e_1 = \partial\phi/\partial s = \phi_s$  i  $D\phi e_2 = \partial\phi/\partial t = \phi_t$ .

D'acord amb el que hem dit sobre el producte vectorial, doncs, tenim que l'àrea de  $S_{ij}$  val  $h^2|\phi_s r_{ij} \times \phi_t r_{ij}|$ .

En passar al límit quan  $n \rightarrow \infty$ , queda justificada la definició de l'àrea de  $\sigma$  que hem donat.

Ara s'hauria de comprovar que el valor d'aquesta àrea no depèn de la particular parametrització triada, és a dir, que sota un canvi de variables no se n'altera el valor. Ho deixem com a exercici.

Aplicant el que acabem de veure a trobar l'àrea de l'esfera

$$\begin{aligned} x &= R \sin \varphi \cos \theta \\ y &= R \sin \varphi \sin \theta \\ z &= R \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

obtenim  $A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = 4\pi R^2$ , tal com Arquimedes ja va obtenir fa 23 segles d'una manera prou diferent.

Si la superfície  $\sigma$  està parametritzada per  $(x, y)$ , és a dir, si és la gràfica d'una funció  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$  sobre un domini  $D$ , llavors queda

$$A(\sigma) = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

Si tenim una funció  $f$  definida a  $\sigma = \phi(D)$ , llavors prenem la integral de  $f$  sobre la superfície  $\sigma$ , com

$$\int_\sigma f = \int_D (f \circ \phi) |\phi_s \times \phi_t|.$$

A l'enunciat dels teoremes de Gauss i de Stokes apareixen integrals sobre superfícies de components normals de camps vectorials. Per tal de definir la *normal a una superfície* (fixem-nos que ho podem fer perquè la superfície està a  $\mathbb{R}^3$ ; a  $\mathbb{R}^4$  n'hi hauria moltes, de "normals"), utilitzem el producte vectorial dels dos vectors tangents que acabem de fer servir. Prenem, doncs,

$$\nu = (\phi_s \times \phi_t) / |\phi_s \times \phi_t|$$

com a vector unitari normal a  $s$  al punt  $\phi(s, t)$ .

D'acord amb això tenim

$$\begin{aligned} \int_\sigma \langle X, \nu \rangle &= \int_D \langle X \circ \phi, \nu \rangle |\phi_s \times \phi_t| \\ &= \int_D \langle X \circ \phi, \phi_s \times \phi_t \rangle. \end{aligned}$$



### 11.9.1 Teorema de Gauss o de la divergència

Suposem un camp vectorial  $X$  de classe  $C^2$  definit en un obert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , és a dir, una funció  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  amb  $X(x) = (X_1(x), X_2(x), X_3(x))$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Definim la *divergència* de  $X$  com

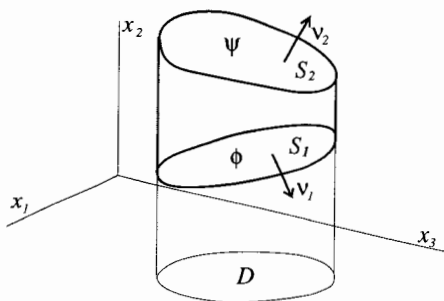
$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^3 \partial X_i / \partial x_i,$$

és a dir, com la traça de la seva matriu jacobiana (o de la seva diferencial).

El *teorema de Gauss* o *de la divergència*, ens diu que si  $D$  és una regió continguda a  $\Omega$ , amb frontera  $\partial D$  derivable amb continuïtat a trossos i  $\nu$  és el vector unitari normal *exterior* a  $\partial D$ , llavors

$$\int_{\partial D} \langle X, \nu \rangle = \int_D \operatorname{div} X.$$

Per fer veure la seva validesa, tornarem a partir la regió  $D$  en trossos que es puguin projectar bé al llarg dels eixos. Cada un d'aquests trossos és típicament de la forma



Provarem que

$$\int_{\partial D} X_i \nu_i = \int_D \partial X_i / \partial x_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

i sumant aquestes igualtats obtindrem la igualtat del teorema.

Ho farem per a  $i = 3$  per tal de simplificar la notació, entenent-se que serà el mateix per als altres valors de  $i$ .

Tenim, pel teorema fonamental del càlcul, que

$$\int_D \partial X_3 / \partial x_3 = \int_{\pi D} (X_3(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) - X_3(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))) dx_1 dx_2,$$

on  $\psi$  i  $\phi$  són les funcions les gràfiques de les quals constitueixen les parts superior i inferior de  $\partial D$ , que denotarem amb  $S_2$  i  $S_1$  respectivament, i  $\pi D$  és la projecció de  $D$  sobre el pla  $(x_1, x_2)$ .

Per altra banda, tenim que

$$\int_{\partial D} X_3 \nu_3 = \int_{S_1} X_3 \nu_3 + \int_{S_2} X_3 \nu_3,$$

ja que les components  $\nu_3$  de  $\nu$  a les parts de  $\partial D$  que són verticals valen 0.

D'acord amb la definició d'integral de superfície, tenim

$$\int_{S_1} X_3 \nu_3 = \int_D \langle X_3, \nu_3 \rangle \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + 1},$$

i com que

$$\nu_3 = -1/\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + 1}$$

(vegeu la secció 8.8), resulta que

$$\int_{S_1} X_3 \nu_3 = - \int_D X_3(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) dx_1 dx_2.$$

D'una manera semblant

$$\int_{S_2} X_3 \nu_3 = \int_D X_3(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) dx_1 dx_2.$$

Per tant, ja hem establert el que volíem, i per tant també tenim demostrat el teorema de la divergència per regions del tipus considerat. Altres tipus de regions es poden reduir a aquest mitjançant una partició adient i sumant els resultats, que s'eliminen entre ells a les fronteres comunes.

El teorema de la divergència és vàlid per a  $D$  a  $\mathbb{R}^n$ , no només a  $\mathbb{R}^3$ . La diferència està en el fet que no podem expressar la normal  $\nu$  com a  $\phi_s \times \phi_t$ , ja que hem definit el producte vectorial només per a  $n = 3$ . En particular també per a  $n = 2$ , on queda expressat per

$$\int_{\partial D} \langle X, \nu \rangle = \int_{\gamma} P dy - Q dx = \int_D P_x + Q_y = \int_D \operatorname{div} X$$

si és que prenem  $X = (P, Q)$ , i si  $\gamma$  denota la corba que forma  $\partial D$ , parametritzada en el sentit directe.

Aquesta versió bidimensional del teorema de la divergència s'obté a partir del teorema de Green prenent el camp  $X = (-Q, P)$ .

### 11.9.2 El teorema de Stokes

Suposem ara que tenim un camp vectorial  $X$  definit en un obert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . Definim el *rotacional* de  $X$  mitjançant

$$\operatorname{rot} X = (\partial X_3 / \partial x_2 - \partial X_2 / \partial x_3, \partial X_1 / \partial x_3 - \partial X_3 / \partial x_1, \partial X_2 / \partial x_1 - \partial X_1 / \partial x_2).$$

Aquest vector representa d'alguna manera la tendència a girar del camp  $X$  al punt considerat.

El *teorema de Stokes* apareix en expressar lleis de l'electromagnetisme i de la hidrodinàmica. Ens diu que si tenim una superfície  $\sigma$  encabida a  $\Omega$ , i  $\gamma$  és la corba que constitueix la seva vora, llavors

$$\int_{\sigma} \langle \text{rot } X, \nu \rangle = \int_{\gamma} X,$$

on  $\nu$  és la normal a  $\sigma$  orientada de manera que des de l'extrem de  $\nu$  es vegi  $\gamma$  girant en sentit directe. Aquí, encara que  $\gamma$  no sigui una corba plana,  $\int_{\gamma} X = \int_a^b \langle X \circ \gamma, \gamma' \rangle$ .

Observem que aquest teorema és també una generalització del teorema de Green a dimensió 3. Efectivament, si prenem  $\sigma$  de manera que sigui una superfície plana amb  $x_3 = 0$ , llavors  $\nu = (0, 0, 1)$ , i llavors el teorema de Stokes queda

$$\int_{\sigma} (\partial X_2 / \partial x_1 - \partial X_1 / \partial x_2) = \int_{\gamma} X,$$

que és precisament el teorema de Green.

La justificació, molt intuïtiva, d'aquest teorema, es troba precisament en el teorema de Green. Si prenem la partició de  $\sigma$ , que ja hem utilitzat anteriorment, resulta que podem considerar  $\phi(R_{ij})$  gairebé com una paralelogram pla, en què el teorema de Green ens diu que  $\int_{S_{ij}} \langle \text{rot } X, \nu \rangle$  és igual a la *circulació*  $\int_{\gamma_{ij}} X$  de  $X$  al llarg de la corba  $\gamma_{ij}$  que descriu la vora de  $S_{ij}$  en el sentit directe, vist des de la punta de  $\nu$ . Sumant tots aquests elements, i tenint en compte que les contribucions de  $\int_{\partial S_{ij}} X$  al llarg de les fronteres comunes de les  $\phi(R_{ij})$  s'anul·len, obtenim el teorema de Stokes.

## Exercicis i problemes

1. Comproveu que  $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  expressant  $I^2$  com a integral d'una funció de 2 variables.
2. Per a comprovar que  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$  podem fer el següent:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \left( \int_0^{\infty} e^{-xy} dy \right) \sin x dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left( \int_0^a e^{-xy} \sin x dx \right) dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} - \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left( \int_a^{\infty} e^{-xy} \sin x dx \right) dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Justifiquen aquests passos.

3. Fa més de 2200 anys, Arquimedes va calcular els següents volums:

El de la part petita d'un cilindre circular partit per un pla que passa per un sol punt a la vora d'una de les bases i per un diàmetre de l'altra, val 1/6 del volum del prisma de base quadrada circumscrit.

El de la intersecció de dos cilindres circulars diferents, cada un amb bases inscrites a cares oposades d'un mateix cub, val 2/3 del volum del cub.

Demostreu-ho.

4. Justifiquen la regla de *Pappos* i *Guldin* per a trobar el volum i l'àrea d'un cos engendrat per la rotació dels punts entre la gràfica de  $f$  amb  $f(x) \geq 0$  i l'eix de les abscisses, per a  $x \in [a, b]$ , al voltant d'aquest eix:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \bar{y} \int_a^b f \\ A &= 2\pi \tilde{y} L, \end{aligned}$$

on  $\bar{y}$  és l'ordenada del baricentre del tros sota la gràfica que gira, que ve donada per  $\bar{y} = \int_a^b \int_0^{f(x)} y dy dx / \int_a^b f$ ,  $\tilde{y}$  és l'ordenada del baricentre del tros de gràfica que gira, que ve donada per  $\tilde{y} = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx / \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ , i  $L$  és la longitud del tros de gràfica:  $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

Utilitzeu aquestes fórmules per a calcular el volum i l'àrea del tor donat a la secció 11.6.1.

5. Per saber si una biga horitzontal de gruix uniforme estintolada als seus extrems es trencarà sota un pes  $P$  aplicat al seu punt mitjà, calculem el moment de les forces en la secció central, que val  $M = \frac{L}{4} (P + \frac{p}{2})$ , on  $p$  és el pes de la biga i  $L$  la longitud entre suports. Llavors tenim que l'esforç màxim, que és el crític, ve donat per  $\tau = \frac{M}{I} y_{\max}$ , on  $I$  és el moment d'inèrcia de la secció transversal de la biga respecte de l'eix horitzontal que passa pel seu baricentre. Recordem que  $I = \int_S y^2 dy$ , on  $y$  és la distància dels punts de la secció  $S$  en aquest eix, mentre que  $y_{\max}$  representa el màxim d'aquestes distàncies.

Si tenim una biga de fusta, de secció circular, de 10 m de longitud i 0.25 m de diàmetre (suposem que la densitat és 0.9), i el límit de seguretat per a l'esforç són 250 kg/cm<sup>2</sup>, quin és el pes màxim que suportarà al seu punt mitjà? (Deixant de banda els efectes locals, que podrien produir tallaments de fibres en estar la càrrega massa concentrada).

6. Comproveu que

$$\int_0^{\infty} y^n e^{-xy} dy = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

7. Comproveu que en les següents funcions no podem intercanviar l'ordre d'integració al quadrat  $[0, 1]^2$ :

$$(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2, (x - y)/(x + y)^3.$$

I a  $[0, 1] \times [0, \infty)$ :  $(2xy - x^2y^2)e^{-xy}$ .

8. Comproveu que no es pot obtenir la derivada respecte de  $x$ , per  $x = 0$ , de les expressions donades, derivant primer l'integrand i després integrant:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} dy, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{y} dy.$$

9. Justifiqueu els passos següents per a calcular la *integral de Fresnel*  $F_1 := \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ . Com que  $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} dx$  (posant  $x = s/\sqrt{t}$  a la darrera integral), resulta

$$F_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} \sin t dt \right) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

10. Justifiqueu els passos de

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{\ln x}{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} \left[ \ln \frac{1+x^2y}{1+y} \right]_{y=0}^\infty \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \left( \frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y} \right) dy \right) \frac{dx}{1-x^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \frac{dy}{(1+x^2y)(1+y)} \right) dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y} \left[ \frac{1}{\sqrt{y}} \operatorname{arctg} x\sqrt{y} \right]_{x=0}^\infty \\
 &= -\frac{\pi}{4} \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} = -\frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{\pi^2}{4}.
 \end{aligned}$$

11. Una altra manera de veure que  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ :

Fem  $x = \sqrt{t}$ , i es veu que l'expressió anterior val  $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ .

I ara es veu que

$$\left( \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}},$$

que s'integra prenent  $x = \sin^2 t$ , mentre que el primer membre s'expressa com a producte d'integrals a  $\mathbb{R}^2$ .

12. Quina és la distància del centre de gravetat de l'hemisferi sòlid de radi 1 a  $\mathbb{R}^{100}$  al centre de l'esfera, amb un error de menys del 10%?

13. Un *planímetre* és un instrument que s'utilitza per a mesurar àrees de figures en un dibuix pla. Consisteix en una barra rígida,  $OP$ , que té el punt  $O$ , sobre el qual pivota, fixat al dibuix. A l'extrem  $P$  hi pivota una altra barra rígida  $QPR$ . El punt  $Q$  té una punta que resseguirà el contorn de la figura de la que es vol mesurar l'àrea, mentre que a  $R$  hi ha una roda d'eix  $QPR$ , que gira d'acord amb la component perpendicular del moviment del seu punt de contacte amb el paper. Demostreu que la roda gira un angle proporcional a l'àrea de la figura quan  $Q$  n'ha resseguit tota la vora.

## Apèndixs

### 1. Demostració del teorema de canvi de variable

Reprenem aquí el teorema de la secció 11.7, que expressa que si  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  és un canvi de variables i si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  és contínua, tot en un domini  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  que tingui frontera amb derivada contínua a trossos, llavors

$$\int_D f = \int_{\phi(D)} (f \circ \phi^{-1}) |\det D\phi^{-1}|.$$

D'acord amb la definició d'integral, tenim

$$\int_D f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n T_{ij},$$

on  $T_{ij} = f(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = f(z_{ij})A(R_{ij})$ .

Ja hem vist a la secció 11.7 que

$$T_{ij} = (f \circ \phi)^{-1} \phi(z_{ij}) |\det D\phi(z_{ij})|^{-1} A(S_{ij}),$$

i volem mostrar que  $A(S_{ij})$  és propera a  $A(\phi(R_{ij}))$ . Per fer-ho, notem que  $\phi(R_{ij})$  és una regió de  $\mathbb{R}^2$  amb vora derivable amb continuïtat a trossos. Aquesta vora serà propera a la del paral·lelogram  $S_{ij}$ . De fet, el teorema de Taylor ens diu que

$$\phi(z_{ij} + z) = \phi(z_{ij}) + D\phi(z_{ij})z + o(|z|), \quad z \rightarrow 0,$$

i si prenem que  $z$  sigui un vector a la vora de  $R_{ij}$ , resulta que la distància de  $\phi(z_{ij} + z)$  a la vora de  $S_{ij}$  és  $o(h)$ . Com que la vora de  $S_{ij}$  té longitud que és una constant que depèn de  $z_{ij}$  multiplicada per  $h$ , resulta que

$$A(\phi(R_{ij})) - A(S_{ij}) = o(h^2), \quad h \rightarrow 0.$$

(Es pot ser molt més detallat en l'argument que acabem de fer servir. Recomanem al lector interessat que consulti el llibre de Courant i John inclòs a la bibliografia).

Tenint en compte això, resulta

$$T_{ij} = (f \circ \phi^{-1}) \phi(z_{ij}) |\det D\phi(z_{ij})|^{-1} (A(\phi(R_{ij})) + o(h^2)).$$

En efectuar la suma de les  $T_{ij}$  sobre tots els valors  $i, j$  entre 1 i  $n$ , veiem que els factors  $(f \circ \phi^{-1}) \phi |\det D\phi|^{-1}$  són acotats en valor absolut, diguem per  $M$ . Havent-hi  $n^2$  sumands, com que el terme  $o(h^2)$  quan  $h \rightarrow 0$  és  $o(n^{-2})$  quan  $n \rightarrow \infty$ , resulta que la seva contribució tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ .

Ens queda, doncs,

$$\int_D f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n (f \circ \phi^{-1}) \phi(z_{ij}) |\det D\phi(z_{ij})|^{-1} A(\phi(R_{ij})).$$

Per l'altra banda, tenim

$$\int_{\phi(D)} (f \circ \phi^{-1}) |\det D\phi^{-1}| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k,l=1}^m \frac{1}{m^2} (f \circ \phi^{-1})(\zeta_{kl}) |\det D\phi^{-1}(\zeta_{kl})|,$$

on  $\zeta_{kl} = (\xi_k, \eta_l)$ , amb  $\xi_k = \xi_{k-1} + (d-c)/m$ ,  $\eta_l = \eta_{l-1} + (d-c)/m$ , essent  $[c, d]^2$  un quadrat que conté  $\phi(D)$  al seu interior. Denotem per  $P_{kl}$  el quadrat  $[\xi_{k-1}, \xi_k] \times [\eta_{l-1}, \eta_l]$ .

Per simplificar la notació posarem

$$(f \circ \phi^{-1}) |\det D\phi^{-1}| = \psi, \quad \psi_{kl} = \psi(\zeta_{kl}), \quad A(P_{kl}) = A_{kl}, \quad \sum_{k,l=1}^m = \sum_{kl}^m.$$

L'expressió de la integral queda, doncs,

$$\int_{\phi(D)} \psi = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{kl}^m \psi_{kl} A_{kl}.$$

Ara prendrem una  $n$  fixada, i agruparem els termes de la suma que tenen els seus quadrats  $P_{kl}$  continguts al mateix conjunt  $\phi(R_{ij})$ , on  $R_{ij}$  són els quadrats corresponents a  $n$  en la definició de la integral de  $f$  sobre  $D$ . Indicarem la suma sobre totes les  $i, j$ , amb

$$\sum_{ij}^n \sum_{kl \subset ij}^m \psi_{kl} A_{kl}.$$

Aquesta suma no és la mateixa de  $\sum_{kl}^m \psi_{kl} A_{kl}$ , ja que en difereix en els quadrats  $P_{kl}$  que no estan totalment continguts en una  $\phi(R_{ij})$ . La diferència, però, amb aquesta suma és  $O(1/m - n)$ , ja que  $|\psi| < M$  a  $\phi(D)$ , la longitud total de les vores de  $\phi(R_{ij})$ , sobre totes les  $i, j$  és  $O(n)$  i l'amplada de l'entorn d'aquesta vora que hem d'excloure per assegurar-nos que eliminem tots els quadrats  $P_{kl}$  que la cavalquen és  $O(1/m)$ . Per tant, quan  $m \rightarrow \infty$ , la suma anterior tendeix a  $\int_{\phi(D)} \psi$ .

D'altra banda tenim que

$$\left| \sum_{ij}^n \sum_{kl \subset ij}^m \psi_{kl} A_{kl} - \sum_{ij}^n \psi_{ij} \sum_{kl \subset ij}^m A_{kl} \right| < \varepsilon(n) A(\phi(D)),$$

amb  $\varepsilon(n) \rightarrow 0$  quan  $n \rightarrow \infty$  i on  $\psi_{ij}$  vol dir  $\psi(\zeta_{ij})$  amb  $\zeta_{ij} = \phi(z_{ij})$ . Això és així, perquè per a  $P_{kl}$  dins de cada  $\phi(R_{ij})$  tenim que  $|\psi_{ij} - \psi_{kl}| < \varepsilon$  arbitrària si  $n$  és prou gran, a causa de la continuïtat uniforme de  $\psi$  a  $\phi(D)$ . Com que aquesta cota és independent de  $m$ , valdrà en el límit quan  $m \rightarrow \infty$ , és a dir

$$\left| \int_{\phi(D)} \psi - \sum_{ij}^n \psi_{ij} A(\phi(R_{ij})) \right| \leq \varepsilon(n) A(\phi(D)).$$



I ara, fent tendir  $n$  a  $\infty$ , resulta que

$$\int_{\phi(D)} \psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{ij}^n \psi_{ij} A(\phi(R_{ij})).$$

Com que

$$\begin{aligned} \psi_{ij} = (f \circ \phi^{-1})(\zeta_{ij}) | \det D\phi^{-1}(\zeta_{ij}) | &= (f \circ \phi^{-1})\phi(z_{ij}) | \det(D\phi(z_{ij}))^{-1} | \\ &= (f \circ \phi^{-1})\phi(z_{ij}) | \det D\phi(z_{ij}) |^{-1}, \end{aligned}$$

resulta de l'expressió obtinguda abans que

$$\int_{\phi(D)} \psi = \int_D f,$$

que és el que volíem provar.

## 2. Integrals impròpies de funcions amb múltiples variables

En el cas que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  no sigui acotada al domini  $D$ , o bé que aquest domini no sigui acotat, llavors la definició d'integral que hem donat no és aplicable. El que fem aleshores és, d'una manera anàloga a com hem fet en el cas d'una variable, definir-la com el límit de funcions acotades sobre dominis acotats.

Definim la integral impròpia sobre  $D$  d'una funció  $f$ , com el límit de les integrals  $\int_{D_k} f$ , on  $f$  és acotada sobre cada un dels dominis  $D_k$ , que també són acotats i amb frontera admissible.

Aquests dominis  $D_k$  tendiran a  $D$  en el següent sentit:  $D_{k-1} \subset D_k \subset D$  per a tota  $k$ , i per a cada acotat i tancat (compacte),  $K$ , contingut a l'interior de  $D$ , podem trobar  $k_0$  tal que si  $k > k_0$ , llavors  $K \subset D_k$ . En el cas que  $D$  sigui acotat, això comporta que la mesura (àrea si  $n = 2$ ) de la diferència entre  $D$  i  $D_k$  tendeix a 0 quan  $k$  tendeix a  $\infty$ .

També demanarem que el límit de la successió d'integrals de  $f$  sobre  $D_k$  sigui independent de la successió de dominis  $D_k$  escollida.

Sota aquestes condicions és vàlid el següent teorema:

Si existeix un número  $M$  i una successió  $\{D_k\}$  com abans, de manera que  $\int_{D_k} |f| < M$  per a tota  $k$ , és a dir, si aquestes integrals estan uniformement acotades, llavors la integral impròpia  $\int_D f$  existeix.

Per a la demostració el que es fa és veure que les integrals sobre els dominis  $D_k$  formen una successió de Cauchy.

Tenim que  $\int_{D_l} |f| - \int_{D_k} |f| < \varepsilon$  si  $k < l$  són prou grans. Per tant

$$\left| \int_{D_l} f - \int_{D_k} f \right| = \left| \int_{D_l \setminus D_k} f \right| \leq \int_{D_l \setminus D_k} |f| < \varepsilon.$$

Per a demostrar la independència del límit de la particular successió de dominis que tendeixen a  $D$ , suposem que  $\{D_k\}$  dóna un límit  $I$ , mentre que  $\{E_l\}$  dóna un límit  $J$ .

Resulta llavors que per a  $k$  i  $l$  prou grans

$$\left| I - \int_{D_k \cap E_j} f \right| < \varepsilon, \quad \left| J - \int_{D_k \cap E_j} f \right| < \varepsilon.$$

Els detalls d'aquesta part de la demostració es poden veure al llibre de Courant i John inclòs a la bibliografia.

El requisit que el límit sigui independent de la successió de dominis  $D_k$  escollida elimina els casos, com el de la funció  $f(x) = 1/x$  a l'interval  $[-1, 1]$ , en què la integral val 0 si  $D_k = [-1, -1/k] \cup [1/k, 1]$  (valor principal de Cauchy), però pot valer qualsevol número, o no existir, si se seleccionen els dominis  $D_k$  de manera diferent.

Un exemple interessant ens és donat per les funcions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma  $f(r) = 1/r^\alpha$ , on  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  i  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Suposem que volem integrar una tal funció al disc  $D$  de radi  $R$  centrat a 0. Si  $\alpha \leq 0$  la funció és contínua i acotada a  $D$ , i no tenim cap problema. Ara, si  $\alpha > 0$ , considerem la successió de dominis  $D_n$  obtinguts de  $D$  traient-li els discos oberts de radi  $1/n$ .

Tenim

$$\int_{D_n} |f| \leq \int_{1/n}^R \int_0^{2\pi} |f|r \, d\theta \, dr = 2\pi \int_{1/n}^R r^{1-\alpha} \, dr = \frac{2\pi}{2-\alpha} (R^{2-\alpha} - (1/n)^{2-\alpha}).$$

Aquesta integral convergeix si  $\alpha < 2$ , i divergeix si  $\alpha > 2$ .

Per a  $\alpha = 2$ , la integral val  $2\pi [\ln r]_{1/n}^R = 2\pi \ln nR$ , que certament tendeix a  $\infty$  si  $n$  ho fa.

Si considerem  $f(r) = 1/r^\alpha$  definida a  $\mathbb{R}^3$ , és a dir,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , llavors això convergeix només si  $\alpha < 3$ .

Un exemple més complicat, ens el proporciona el càlcul del "volum" i de l'"àrea" d'una bola i d'una esfera, respectivament, a l'espai  $\mathbb{R}^n$ .

Per començar considerem una funció  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , amb *simetria esfèrica*, és a dir que  $f$  sigui funció de  $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

Apliquem el teorema de canvi de variables al canvi a *coordenades esfèriques en dimensió  $n$* :

$$\begin{aligned} \phi : \quad x_1 &= r \cos \varphi_1 \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1} \\ x_n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

on  $r \in (0, \infty)$ ,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2} \in [0, \pi]$ ,  $\varphi_{n-1} \in [0, 2\pi)$ .

El determinant del jacobià de  $\phi$  val

$$\det D(\phi) = r^{n-2} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} > 0.$$

Tenim així que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) &= \int_0^\infty \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r)r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_3 \dots \\ &\dots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-1} d\varphi_{n-2} \dots d\varphi_1 dr \\ &= \omega_n \int_0^\infty f(r)r^{n-1} dr, \end{aligned}$$

on  $\omega_n = 2\pi \left(\int_0^\pi \sin^{n-2}\right) \left(\int_0^\pi \sin^{n-3}\right) \dots \left(\int_0^\pi \sin\right)$ .

En particular  $\omega_2 = 2\pi$ ,  $\omega_3 = 4\pi$ .

Si fem  $f(|x|) = 1$  per  $|x| \leq R$  i zero per  $|x| > R$ , la integral ens dona la mesura (volum generalitzat a dimensió  $n$ ) de la bola  $\bar{B}(0, R) =: B_R$ . D'acord amb l'expressió que acabem d'obtenir, aquest volum resulta

$$V(B_R) = \omega_n \int_0^R r^{n-1} dr = \frac{\omega_n}{n} R^n =: \Omega_n R^n.$$

Aquí  $\Omega_n$  és, doncs, el volum de la bola unitària a  $\mathbb{R}^n$ . En particular  $\Omega_2 = \pi$ ,  $\Omega_3 = 4\pi/3$ , etc.

Per tal de calcular  $\omega_n$  en general, prenem  $f(|x|) = e^{-|x|^2}$ . De la nostra fórmula surt que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \omega_n \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr.$$

Si avaluem la primera integral impròpia (el domini no és acotat) prenent la successió de cubs  $[-M, M]^n$ , resulta que val

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \dots \int_{-M}^M e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \dots e^{-x_n^2} dx_1 \dots dx_n = 0\pi^{n/2},$$

recordant que  $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ .

D'altra banda tenim

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n-2}{2}} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

on hem fet el canvi  $r^2 = s$  i hem utilitzat la definició  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  (vegeu el capítol 5).

D'aquí surt, doncs, que

$$\omega_n = 2\pi^{n/2} / \Gamma(n/2),$$

i que el volum de  $B_R$  és  $\Omega_n R^n$ , amb

$$\Omega_n = \frac{\omega_n}{n} = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Recordem que

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = (2m)! \sqrt{\pi} / m! 2^{2m},$$

la qual cosa ens permet avaluar  $\Omega_n$  si  $n$  és senar. Si  $n$  és parell, llavors apliquem  $\Gamma(m) = m!$ .

Finalment fem notar que de la integració en coordenades esfèriques que hem fet, es dedueix que  $\omega_n$  és l'àrea de l'esfera unitària (és a dir de la frontera de la bola de radi 1) a  $\mathbb{R}^n$ .

# Bibliografia

- ABRAMOWITZ, M I STEGUN, I.A. (eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Nova York, 1965.
- ACTON, F.S. *Numerical Methods that work*. Harper & Row, Nova York, 1970.
- ARNOLD, V.I. *Équations Différentielles Ordinaires*, Mir, Moscou, 1974.
- AVINYÓ, A & AL. *Anàlisi Matemàtica. Problemes resolts i pràctiques amb ordinador*, McGraw-Hill, Madrid, 1993.
- BEREZIN, I.S. I ZHIDKOV, N. P. *Computing Methods*, Pergamon Press, Oxford, 1965.
- BESICOVITCH, A.S. *Almost Periodic Functions*, Dover Publications, Nova York, 1954.
- BONET, C. ET AL. *Càlcul Numèric*, Centre Publicacions d'Abast, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1991.
- BRAUN, M. *Differential Equations and their Applications*, Springer-Verlag, Nova York, 1975.
- CARSLAW, H.S. *An Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, Dover Publications, Nova York, 1950.
- COURANT, R. I JOHN, F. *Introduction to Calculus and Analysis*, John Wiley and sons, Nova York, 1974.
- DAHLQUIST, G. I AKE BJORCK *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nova Jersey, 1974.
- DAVIS, P.J. *Interpolation and Approximation*, Dover Publications, Nova York, 1975.
- DE LA VALLÉE POUSSIN, CH.-J. *Cours d'Analyse Infinitésimale*, Gauthier-Villars, París, 1954.
- DEMIDOVICH, B. ET AL. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*, Mir, Moscou, 1967.
- GARNIR, H.G. *Fonctions de Variables Réelles*, Gauthier-Villars, París, 1965.
- GELFAND, I.M. I FOMIN, S.V. *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, Nova Jersey, 1963.

- GOLDSTINE, H.H. *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, Springer Verlag, Nova York, 1977.
- DE GUZMÁN, M I RUBIO, M *Problemas, Conceptos y Métodos del Análisis Matemático, I i II*, Pirámide, Madrid, 1990 i 1992.
- HADELER, K.P. *Matemáticas para Biólogos*, Reverté, Barcelona, 1992.
- HIRSCH, M.W. I SMALE, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, Nova York, 1974.
- ISAACSON, E. I KELLER, H.B. *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley and sons, Nova York, 1966.
- KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, Nova York, 1972.
- KÖRNER, T.W. *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.
- LANG, S. *Calculus of Several Variables*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1973.
- MARSDEN, J.E. I TROMBA, A.J. *Vector Calculus*, W.H. Freeman, Nova York, 1988.
- REY PASTOR, J. I DE CASTRO BRZEZICKI, A. *Elementos de Matemáticas*, SAETA, Madrid, 1964.
- ROYDEN, H.L. *Real Analysis*, Macmillan, Londres, 1968.
- RUDIN, W *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Nova York, 1953.
- SCHWARTZ, J.T. *Nonlinear Functional Analysis*, Courant Institute, Nova York, 1965.
- SPIVAK, M. *Calculus*, W.A. Benjamin, Nova York, 1967.
- SPIVAK, M. *Calculus on Manifolds*, W.A. Benjamin, Nova York, 1965.
- STOER, J. I BULIRSCH, R. *Introduction to Numerical Analysis*, Springer Verlag, Nova York, 1980.
- STROUD, A.H. *Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations*, Springer Verlag, Nova York, 1974.
- VELASCO DE PANDO, M *Repertorio de Funciones*, Editorial Dossat, Madrid, 1949.
- WALKER, S *Fourier Analysis*, Oxford University Press, Nova York, 1988.
- WHITTAKER E.T. I WATSON, G.N. *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.
- ZYGMUND, A. *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1968.

# Índex terminològic

- a trossos 83
- absolutament contínua 96
- absolutament convergent 136
- acotada 29, 44, 269
- acumulació 268
- Adams 334
- Adams-Bashforth 312
- Adams-Moulton 312, 335
- adherència 268
- afitat 29
- Aitken 225
- Al-Karhi 87
- Al-Khowarizmi 21
- Alembert, D' 25, 265
- algebraic 59
- alternant 135
- amplitud 212
- antilogaritme 101
- anàlisi funcional 26, 421
  - infinitesimal 25
  - no estàndard 28, 36
- aplicació de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  269
- aplicació lineal 273
- Apol·loni 22, 65, 99
- aproximació de mínims quadrats 230
- arc sinus 104
- àrea de  $D$  428
- àrea d'una superfície 442
- àrea de la bola unitària a  $\mathbb{R}^n$  456
- argument 127
- argument del cosinus hiperbòlic 120
- Aristòtil 20
- Arnold 350
- Arquimedes 20, 21, 65, 121
- asimptòticament 314, 318
- asimptòtiques 144
- atractor 385
  - estrany 412
- autònoma 313
- axiomes 27
- Banach 302
- Barrow 24
- base 101, 266
  - de  $\mathbb{R}^n$  228
- Bernoulli, Jakob 24, 161
- Bernoulli 24, 129
- Birkhoff 350
- blocs de Jordan 397
- bola oberta 267
- bola tancada 267
- Bolzano 20, 26
- Bombelli 22
- Boole 27
- Bourbaki 27
- Brahe, Tycho 99
- branca de la funció 200
- braquistòcrona 24, 122, 340, 342
- Briggs 35, 100, 215
- Brouwer 28, 302
- Bürgi 100
- càlcul de variacions 326
- camp vectorial 270, 353
- Cantor 20, 26, 27, 45, 57
- canvi a coordenades esfèriques 439
- canvi a coordenades polars 285
- canvi de variables 109, 285, 298, 436
  - canvi de variables a la integració 436

- canviar l'ordre d'una sèrie 134
- canvis de coordenades 285
- caos 216
- característiques 414
- Cardano 22, 62
- cardinals 36
- catenària 24, 119, 342
- Cauchy 25, 129, 130
- Cavalieri 20
- caòtic 412
- centre 356
- Chuquet 22
- cicloide 68, 121
- Clairaut 25, 265
- classes d'equivalència 31
- clausura d'un conjunt 92, 268
- coeficients binomials 54
  - de Fourier 205
  - indeterminats 372
- coll 292, 356
- combinacions lineals de vectors 228
- capacitat 90
- compacte 48, 268
- complement 31
- completesa 44, 93, 268
- components 228, 269
- condició de Lipschitz 325
- cònica 33
- conjunt 56
  - buit 31
  - de Cantor 59
  - de mesura zero 93
  - obert 57, 267
  - tancat 57, 267
  - ternari de Cantor 94, 413
- conservatiu 392
- constant d'Euler 161, 308
- continu 212
- contínua 271
  - a trossos 83, 93, 189, 271
  - en un conjunt 272
- continuació analítica 199, 186
- contínuament derivable a trossos 425
- continuitat uniforme 80
- convergència uniforme 176
- convergent 44, 130
- convergència puntual 177
  - quadràtica 252
  - uniforme d'una integral impròpia 297
- coordenades cilíndriques 285
  - esfèriques 286
  - polars 125
- Copèrnic 99
- corba 270
  - de Peano 92
  - regular 297
- corbes algebraiques 34
  - característiques 414
  - de nivell 270
  - integrals 353
- corrector 333
- cosinus 101
- cosinus hiperbòlic 120
- cota 29
  - inferior 47
  - superior 47
- criteri d'Abel 206
  - de Cauchy 138
  - de comparació 136
  - de convergència de Cauchy 130
  - de convergència de l'arrel 138
  - de convergència del quocient 137
  - de d'Alembert 137
  - de Routh-Hurwitz 400
  - de Sylvester 293
- critèris de convergència de sèries 136
- Dal Ferro 62
- Dedekind 20, 26
- delta de Dirac 405
- delta de Kronecker 228
- denombrable 57
- dens 47
- derivable 281
  - amb continuïtat 282
  - d'ordre  $n$  amb continuïtat 145



- derivada 276
  - contínua 282
  - contínua a trossos 189
  - de la funció inversa 78
  - de segon ordre 288
  - direccional 278
  - parcial 278
  - per l'esquerra 72
  - per la dreta 72
- derivades de potències fraccionàries 79
- derivades parcials d'ordre  $r$  289
- Descartes 22, 26
- desenvolupament asimptòtic 166
- desigualtat de Bessel 193, 205
- desigualtat de Cauchy-Schwartz 267
- desigualtat de Gronwall 154
- desigualtat del triangle 43, 63, 267
- determinant 275
  - de Vandermonde 218
- diferència dividida d'ordre  $k$  221
- diferenciable 281
- diferencial 276
- dimensió de Hausdorff 413
- dinàmica caòtica 303
- Diofant 21
- disc 267
  - obert 64
  - tancat 64
- distribució 405
- distància 267
  - entre dos punts 47
- divergència 445
- domini 67
  - de  $f$  269
  - de la funció 67
- el pèndol de Foucault 389
- Elea, Zenó d' 20
- elecció assenyada 372
- endomorfisme lineal 275
- entorn 47
  - d'un punt 267
- equació característica 351, 360, 362
  - d'Euler 341
  - de Bessel 373, 390
  - de diferències 348
  - de primera variació 344, 400
  - de Riccati 324, 345
  - de Van der Pol 392
  - diferencial de primer ordre 313
  - logística 315
  - equacions característiques 414
    - en diferències 335
    - homogènies 372
    - no homogènies 372
  - error d'arrodoniment 215
    - de truncament 215
  - escalars 228, 266
  - escapament en temps finit 318
  - escola pitagòrica 19
  - espai euclidià de dimensió  $n$  266
    - vectorial 266
  - espiral 121
    - logarítmica 121
  - esquema de Picard 326
  - Euler 25, 129, 161, 216, 265, 289, 312, 421
  - existeix 30
  - explícit 333
  - exponencial d'un número imaginari
    - $i\phi$  126
  - exponencial integral 150
  - extrapolació 227
    - de Richardson 244
  - extrem inferior 48
  - extrem superior 47
- factor d'integració 392
- factorial 32
- fenomen de Runge 170, 220, 259
- Fermat 22, 88, 129
- Ferrari 62
- Fibonacci 35
- finít 56
- fitat 29
- flor de neu 413
- fluent 24

- fluxió 24
- focus estable 358
- focus inestable 359
- forma canònica de Jordan 357, 395
  - de Lagrange 202
  - definida positiva 293
  - quadràtica 291
- fórmula binomial 72
  - correctora d'Adams 335
  - d'Euler-Maclaurin 159
  - d'interpolació de Lagrange 221
  - d'interpolació per a diferències
    - dividides de Newton 221
  - de De Moivre 127
  - de Lagrange 220
  - de Leibniz 74
  - de Liouville 401
  - de Newton 220
  - de Newton-Cotes 237
  - de Peano 227
  - de reducció 111
  - de Simpson 237
  - de Stirling 159, 166
  - de Taylor 172, 291
  - de variació de paràmetres 323, 367, 374
  - de Wallis 157, 163
  - del binomi de Newton 54
- fórmules d'Adams-Bashforth 335
  - de Romberg 236
  - predictores d'Adams 334
- Fourier 25
- fractal 216, 413, 425
- Frege 27
- freqüència 211
  - fonamental 211
- frontera 425
  - inferior 48
  - superior 47
- funció 67, 269
  - algebraica 69
  - analítica 174, 292
  - circular 100
  - composta 77
  - creixent (decreixent) 78
  - de Bessel 390
  - de Cantor 92, 94, 95, 96
  - de Dirichlet 69
  - de Heaviside 404
  - de Liapunov 386, 410
  - de prova 405
  - derivable 73
  - d'ona quadrada 191
  - en dent de serra 191
  - error 160, 181
  - exponencial 101, 105
  - exponencial de base  $a$  106, 119
  - exponencial-integral 160
  - gamma 157, 158, 308
  - implícita 69
  - inversa 77
  - logaritme-integral 160
  - logarítmica 100
  - trigonomètrica 100
  - contínua 73
- funcional 340
  - funcions analítiques 169
  - de Bessel 373
  - elementals 101
  - eulerianes 160
  - el·líptiques 160
  - hiperbòliques 119
  - polinòmiques 68
  - racionals 68
- Galileu 20, 21, 55, 342, 378
- Gauss 37, 129, 216
- giratori 390
- gradient 279
- grau  $n$  269
- graus 116
- Gregory 23, 25
- gràfica 270
  - d'una funció 68
- Gödel 28, 36
- hamiltonià 392
- harmònic 211
- Harrison 312

- hèlix 270
- Hermite 60
- Hessià 291
- Hilbert 27
- Hiparcos 65, 99
- hipersuperfície 293
- holomorfes 201
- homogènia 322
- Hôpital, L' 24, 25, 129
- Huygens 22, 121, 129, 391
  
- implica 20
- implícit 333
- impuls 405
- incommensurables 40
- inequacions en diferències 331
- ínfim 48
- infinitèsims 28
- integració iterada 429
  - per parts 110
- integral d'una funció 79
  - de Cauchy 83
  - de Dirichlet 192
  - de Fresnel 449
  - de Frullani 150
  - de Lebesgue 94, 423
  - de Riemann 93, 423
  - de  $f$  a l'interval  $I$  81
  - de  $f$  sobre el rectangle  $R$  422
  - d'un camp vectorial sobre una corba 439
  - indefinida 84
  - primera 392
- integrals immediates 85
  - impròpies 148
- interior 267
- interpolació d'Hermite 242
- interpolació polinomial 170
- intersecció 31
- interval infinit 47
  - obert 47
  - tancat 47
- intuïcionisme 28
- irracionalitat de  $e$  50
  
- isoclines 381
- isomorfisme lineal 275
- isòcrona 122
  
- jacobià 279
- Jacobi 279
- Jakob Bernoulli 340
- Johann Bernoulli 340
  
- Kepler 20, 99
- Klein 28
- Kolmogorov 350
- Kronecker 28
  
- La Salle 410
- Lagrange 25, 340
- Laplace 25, 265
- Le Roy 312
- Lebesgue 26, 421
- Leibniz 20, 23, 26, 265
- lemma fonamental del càlcul de variacions 339
- Leonhard Euler 340
- Leverrier 334
- Liapunov 350
- Lie, Sophus 345
- límit 20, 44, 70, 129
  - d'una successió 268
  - de  $f(y)$  quan  $y$  tendeix a  $x$  271
  - inferior de la successió 131
  - infinit 130
  - per l'esquerra 70
  - per la dreta 70
  - superior de la successió 131
- Lindemann 60
- linealment dependents 228
- linealment independents 228
- Liouville 60
- lleis de Malthus 315
- lleis de Hooke 350
- llocs geomètrics 66
- Llull 26
- localment integrable 405

- logaritme de Napier 66
  - decimal 119
  - en base  $a$  106, 119
  - integral 150
  - natural o neperià 104
  - natural 101, 119
  - neperià 66, 101
- logaritmes decimals 100
- Lorenz 350, 411
  
- Maclaurin 24, 25, 129
- matriu 32
  - fonamental 374
  - jacobiana 279
  - tridiagonal 227
- màxim 145
- màxim estricte 292
- màxim local 292
- Mersenne 66
- Merton College 21, 65
- mesura 58
- mètode d'Aitken 235
  - d'Euler 328
  - d'exhaustió d'Èudox 21
  - d'integració de Gauss 240
  - de Horner 250
  - de la bisecció 250
  - de la secant 252
  - de la sèrie de Taylor 332
  - de Lagrange 224
  - de Neville 226
  - de Newton-Raphson 251
  - de Newton 225
- mètodes de passos múltiples 333
  - de quadratura 243
  - de Runge-Kutta 332
- mètrica 267
  - exterior 69
  - interior 69
- mínim 145
- mínim local 292
- mitjana aritmètica 55
  - geomètrica 55
  - harmònica 55
- monòtona 31
- mòdul 63, 126
- Morgan 27
- Moser 350
  
- $n$ -vectors 228
- Napier 100
- Neville 225
- Newton 20, 23, 24, 25, 99, 129, 216, 265, 311, 350
- no homogènia 322
- no singular 275
- nombre 29
- nombre d'elements 56
- norma 228, 267
  - d'una aplicació lineal 282
  - de  $f$  229
- normal a una superfície 444
- notació matricial 356
- nucli de Dirichlet 192
- nucli de l'aplicació  $f$  274
- numerables 57
- número 29
  - cardinal 56
  - d'Euler 159
  - d'or 51, 53
  - imaginari 63
  - real 41
  - complexos 62, 125
  - de Bernoulli 161, 162
  - enters 38
  - irracionals 40
  - naturals 36
  - racionals 39
- nus estable 355
- nus inestable 355
  
- obert 267
- obert relatiu 272
- ober connex 425
- Omar-Khayam 21
- ordre de creixement 143, 272
- ordre de derivació 289, 349
- Oresme 21, 65

- origen 267
- Orlhac, Gerbert d' 35
- ortogonalitat 188
- ortogonals 205, 228, 229
  
- Pappos 22, 66
- paquets d'ones 212
- parametrització per la longitud d'arc 298
- parametritzada 277
- part entera 43
  - imaginària 63
  - lineal del camp vectorial 384
  - negativa 94
  - positiva 94
- pas al quocient 31
- Pascal 23
- Peano 27, 36
- pàndol de Foucault 389
- per a tot 30
- pla 277
- pla tangent 277
- planímetre 450
- Poincaré 28, 350, 411
- Poisson 265
- polinomi característic 395, 400
- polinomi de Taylor 172
  - interpolador de la funció  $f$  218
  - mònic 141
- polinomis d'Hermite 243
  - de Bernoulli 161
  - de Bernstein 188
  - de Gram 231
  - de Laguerre 243
  - de Legendre 240
  - de Txebixev 243
  - trigonomètrics 233
- potència fraccionària 69
- pre-imatge 272
- predictor 333
- predictor-corrector 333
- primitiva 84
- principal 374
- principi d'Arquimedes 36
  - d'inducció 36
  - de contracció 302
- problema de Kepler 391
- problema de valor inicial 324
- problemes isoperimètrics 342
- producte cartesià 31
  - escalar 228, 229, 267
  - intern 228, 229
- progressió geomètrica 50, 55
- projecció de  $(x, y)$  sobre  $\mathbb{R}^n$  270
- propietat de Heine-Borel 48, 56, 90, 91, 269
- propietat de minimax dels polinomis de Txebixev 234
- propietat de Weierstrass 48, 56, 268
- Ptolemeu 65, 99
- punt crític 145, 292, 354
- punt d'acumulació 48
- punt d'acumulació d'una successió 130
- punt 266
  - d'adherència 268
  - d'equilibri 354
  - d'inflexió 145
  - de repòs 354
  - fix 253
  - límit 130, 268
  - mig 47
- punts aïllats 268
- punts d'equilibri 319
  
- quasi-aleatori 412
- quasiperiòdica 211
- quocient de  $X$  per la relació d'equivalència donada 31
- quàdriques 33
  
- radi de curvatura 197
- radià 29
- rang 274
- reflexivitat 267
- regla de Barrow 24, 84
  - de Horner 224
  - de l'Hôpital 142

- de la cadena 282
- de la cadena 77
- de trapezi 235
- del rectangle 235
- regula falsa 253
- regulador de velocitat de Watt 392
- relació d'equivalència 31
- relació d'ordre 31
- reordenar els termes d'una sèrie 136
- reparametrització 298, 434
- residu 172
- ressonància 369
- retrat 354, 355
- Riemann 26, 421, 423
- Rikitake 350
- Roberval 20, 23, 122
- romanent 172
- rotacional 446
- Runge-Kutta 312
- Russell 27
  
- Sant Vicent 23
- Sarasa 23
- secció àurea 53
- sella 292, 356
- sèrie 134
  - binomial 138
  - de Fourier 189
  - de Gregory 185
  - de Leibniz 175
  - de potències 169
  - de Taylor 173
  - geomètrica 134
  - geomètrica 55
  - harmònica 134
  - infinita 134
- sèries o desenvolupaments asimptòtics 166
- Siegel 350
- simetria 267
- singular 267
- singularitat 169, 199
- sinus hiperbòlic 121
  
- sistema de dues equacions de primer ordre 352
- sistema de  $n$  equacions de primer ordre 394
- sistema formal 27
- sistema ortogonal 205
- sistema presa-predador 393
- Smale 350
- solucions d'equilibri 319
- solució fonamental 374
- spline 226
  - cúbics 227
  - cúbics naturals 227
- Stevin 35
- Stirling 129
- substitució de variables a la integral 108
- subtangent 124
- successions de Cauchy 44
- successió 37
  - d'elements de  $\mathbb{R}^n$  268
  - de Cauchy 42, 64, 268
  - de Fibonacci 37, 51
  - suma de la sèrie 134
  - suma parcial 134
  - sumatori 32
  - sumes inferiors 93
  - sumes superiors 93
  - superfície a  $\mathbb{R}^3$  433, 442
  - superfícies de Riemann 201
  - suprem 47
  
- tangent 277
- tangent hiperbòlica 121
- Tartaglia 22, 62
- Taylor 24, 25
- tendeix a infinit 71
- tendeix a menys infinit 71
- teorema d'existència i unicitat 324
  - de Bendixson-Poincaré 383, 409
  - de Bolzano 78
  - de Floquet 374
  - de Fourier 212
  - de Fubini 424, 428

- de Gauss 439, 442, 445
- de Green 439, 440
- de la divergència 445
- de la funció implícita 286
- de Pappos i Guldin 448
- de Pitàgores 61, 228
- de Rolle 74
- de Stokes 439, 442, 447
- de Taylor 172, 290
- de Weierstrass 170
- del valor mitjà 75
- del valor mitjà per a la integral
  - 85
- fonamental de l'àlgebra 33, 63
- fonamental de l'aritmètica 61
- fonamental del càlcul 24, 84
- teoria de conjunts 27
- topologia 268
- Toricelli 20
- totalment ordenat 32
- tractriu 123
- trajectòria 354
- trajectòria a  $\mathbb{R}^m$  270
- transformació d'Euler 256
- transformació de Laplace 402
- transformada de Fourier 212
- transformada de Laplace 402
- traça de  $A$  401
  
- unicitat 318
- uniformement contínua 91, 272
- unió 31
  
- valor absolut 43
- valor de la funció 68
- valor principal de Cauchy 150, 314
- valors propis 360, 395
- variable independent 67
- variació 341
  - de constants 322
  - de paràmetres 322
- vector real de dimensió  $n$  228
- vectors 266
- velocitat crítica 390
- Vieta 22
- volum sota la gràfica 424
- volum de la bola unitària a  $\mathbb{R}^n$  455
- vora 425
  
- Wallis 23
- Weierstrass 20, 26
- Weyl 28
- Whitehead 27
- wronskià 372
- Wronsky 372
  
- xoc 418
  
- Zenó 20
- Zermelo 27
- zero 267
- zona d'expansió 419



Societat Catalana de Matemàtiques

Filial de l'Institut d'Estudis Catalans

*<http://scm.iec.cat>*